Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 93, 2021, с. 4–11

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 93, 2021, p. 4–11
DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-01

УДК 517.954

Керованість систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Макаров О. А.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, Харків, Україна, 61022
makarovifamily07@gmail.com

Отримано необхідні та достатні умови повної керованості систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в просторі Л. Шварца. Знайдено також ряд ефективних достатніх умов повної керованості для окремих випадків. Для всіх цих окремих випадків наведено приклади.
Ключові слова: повна керованість; задача Коши; перетворення Фур'є.

A. A. Makarov. **Controllability of systems of linear partial differential equations.** Necessary and sufficient conditions for complete controllability of systems of linear partial differential equations with constant coefficients in L. Schwartz space are obtained. A number of sufficient conditions for complete controllability have also been found for special cases.Examples are given for all of these special cases.
Keywords: complete controllability; the Cauchy problem; Fourier transform.

Макаров А. А. **Управляемость линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными.** Получены необходимые и достаточные условия полной управляемости линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами в пространстве Л. Шварца. Найден также ряд достаточных условий полной управляемости для частных случаев. Для всех этих частных случаев приведены примеры.
Ключевые слова: полная управляемость; задача Коши; преобразование Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10.

1. Вступ та постановка задачі

Теорії керованості останнім часом присвячено багато робіт, але значна частина з них присвячена звичайним диференціальним рівнянням; а з рівнянь з частинними похідними розглядаються здебільшого рівняння математичної фізики. Наприклад, в роботах Скляра Г. М. та Фардіголи Л. В. [1, 2] розглядалась керованість хвильового рівняння.

У роботі автора [3] була досліджена керованість системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Крім того було доведено, що якщо власні значення поліноміальної матриці, по якій будується ця система, дійсні або уявні, то існує керування у вигляді $u(x)v(t)$.

У даній роботі доведено критерій повної керованості даної системи у просторі Л. Щварца, а також знайдено ряд ефективних достатніх умов повної керованості. Всі ці випадки проілюстровані прикладами.

Отримана також умова некерованості системи, за допомогою якої наведено приклад некерованої системи.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами наступного вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + v(t)u(x), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n \\ w(x,0) = \varphi(x),\end{gathered} \tag{1}$$

де:
— $P(s)$ — квадратна матриця $m \times m$, єлементи якої є поліномами;
— вектор-функції $u(x)$ та $\varphi(x)$ належать простору Л. Шварца $S = \bigcap\limits_{s,l=0}^{\infty} C_l^s$, який складається з нескінченно-диференційованих та швидко спадних функцій (див. [4]);
— скалярна функція $v(t)$ є кусково-неперервною, але в даній роботі ми будемо розглядати лише функцію $v(t) = e^{-\alpha t}$ з $\alpha > 0$.

Визначення. Система (1) називається повністю керованою у просторі S, якщо для будь-якої функції $\varphi(x) \in S$ існує керування $u(x) \in S$ таке, що розв'язок даної системи $w(\cdot,t) \in S$ задовольняє умові $w(x,T) = 0$.

2. Критерій повної керованості

В статті [3] була доведена теорема.

Теорема. Система (1) буде повністю керованою у просторі S тоді і тільки тоді, якщо існує обернена матриця

$$\left(\int\limits_0^T \exp(-\alpha t)\exp\left(-tP(s)\right) dt\right)^{-1} \in C_{-\infty}^{\infty}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

де $C_{-\infty}^{\infty} = \bigcap\limits_{s=0}^{\infty}\bigcup\limits_{l=0}^{\infty} C_{-l}^s$ — простір нескінченно-диференційованих функцій, яки зростають не швидше степені (див. [4]).

Наслідок. Якщо визначник

$$\Delta = \det\int\limits_0^T \exp\left(-t(P(s) + \alpha E)\right) dt \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n,$$

то система (1) буде повністю керованою у просторі S (E — одинична матриця).

Це випливає з роботи [5], де доведено, що з умови $\Delta \neq 0$ випливає належність оберненої матриці простору $C^{\infty}_{-\infty}$.

Умова наслідку еквівалентна наступній умові

$$\frac{\exp\left(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\right)-1}{\lambda_j(s)+\alpha} \neq 0, \quad j=\overline{1,m}, \tag{2}$$

де $\lambda_j(s)$ — власні значення матриці $P(s)$.

Теорема 1. ***(загальний критерій керованості)***
Нехай існує невід'ємне α таке, що на множинах

$$N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : \ Re\lambda_j(s) = -\alpha\}, \quad j=\overline{1,m}$$

виконуються нерівності $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}, \quad k=\pm1,\pm2,\ldots.$
Тоді система (1) є повністю керованою.

Доведення. У силу наведенного наслідку достатньо перевірити умову (2), яка рівнозначна тому, що $Re\lambda_j(s) \neq -\alpha$ або $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}$.
А це, в силу умові Теореми, виконано.
Теорема доведена.
Приклад 1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = 4w_2(x,t) + \Delta w_2(x,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x,t)}{\partial t} = -2w_1(x,t) + \Delta w_1(x,t) + u_2(x)e^{-\alpha t} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Запишемо матрицю $P(s)$ для даної системи $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 4-|s|^2 \\ -|s|^2 & -2 \end{pmatrix}$, де $|s|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k^2$. Тоді характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - 2\lambda - |s|^4 + 4|s|^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{|s|^4 - 4|s|^2 + 1} = 1 \pm \sqrt{(|s|^2-2)^2 - 3}$ або обидва дійсні, або комплексні з $|Im\lambda_j(s)| \leq \sqrt{3}$.
Отже, наприклад, при $T=1$ виконується умова Теореми 1: $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{2k\pi}{T}$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, тобто система повністю керована.

Теорема 2. ***(умова некерованості)***
Якщо при будь-яких значеннях $\alpha \geq 0$ існує $s_0 \in \mathbb{R}^n$ і існує значення $\lambda_j(s_0)$ таке, що $Re\lambda_j(s_0) = -\alpha$ та $Im\lambda_j(s_0) = \dfrac{2k\pi}{T}$ з деяким цілим k, тоді система (1) є некерованою.

Доведення. Це випливає з того, що не виконана умова (2).

Приклад 2. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = w_2(x_1,x_2,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x_1,x_2,t)}{\partial t} = -\Delta w_1(x_1,x_2,t) + 2\dfrac{\partial w_2(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Так як матриця для даної системи має вигляд $P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s_1^2+s_2^2 & 2is_1 \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння буде таким $\lambda^2 - 2is_1\lambda - s_1^2 - s_2^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = is_1 \pm s_2$. Тому у рівнянні $T(is_1 - s_2 + \alpha) = 2k\pi i$ завжди буде дійсний корінь $\begin{cases} s_1 = 2k\pi/T, \\ s_2 = \alpha \end{cases}$, а значить, система не є керованою.

В цьому випадку керування слід шукати в іншому вигляді.
Так, в роботі [3] було доведено, що рівняння

$$\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [0;T]$$

завжди повністю кероване в просторі Л. Шварца з керуванням

$$u(x,t) = F_s^{-1}\left(\frac{ReP(s)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{\exp(-T\cdot ReP(s)) - 1}\cdot\exp\left(i\,t\,ImP(s)\right)\right),$$

де F_s^{-1} — обернене перетворення Фур'є по змінної s.

Приклад 2-1. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} +$$
$$+ b_1\cdot\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_1} + b_2\cdot\frac{\partial w_1(x_1,x_2,t)}{\partial x_2} + u(x_1,x_2,t), \quad b_1,b_2 \in \mathbb{R}.$$

В данному рівнянні:
— $P(s) = -s_1^2 + s_2^2 + ib_1s_1 + ib_2s_2$,
— $ReP(s) = -s_1^2 + s_2^2$,
— $ImP(s) = b_1s_1 + b_2s_2$.

Система $\begin{cases} -s_1^2 + s_2^2 = -\alpha, \\ b_1s_1 + b_2s_2 = \dfrac{2k\pi}{T} \end{cases}$ завжди має дійсні корені, тому не існує керування вигляду $u(x)e^{-\alpha t}$. Але існує керування

$$u(x,t) = F_s^{-1}\left(\frac{(-s_1^2+s_2^2)\cdot\widetilde{\varphi}(s)}{\exp T(s_1^2 - s_2^2) - 1}\cdot\exp(i\,t\,(b_1s_1 + b_2s_2)\right) =$$
$$= G_1(x) * \varphi(x_1 - b_1t,\ x_2 - b_2t), \quad \text{де } G_1(x) = F_s^{-1}\left(\frac{s_2^2 - s_1^2}{\exp T(s_1^2 - s_2^2) - 1}\right),$$

при якому це рівняння повністю кероване у просторі Л. Шварца.

3. Окремі випадки

З теореми 1 випливає ряд важливих наслідків.

Наслідок 1. Якщо система (1) коректна за Петровським [6], тобто $Re\lambda_j(s) < C$, або $Re\lambda_j(s) > -C$ з деяким C для будь-яких $s \in \mathbb{R}^n$ та $j = \overline{1,m}$, то вона є повністю керованою.

Доведення. Перевіримо умову $\lambda_j(s) + \alpha \neq \dfrac{2k\pi}{T}$ при $k \neq 0$.

Якщо $Re\lambda_j(s) < C$, то існує $\alpha > C$ при який $Re\lambda_j(s) \neq \alpha$, тобто нерівність доведена. Таким чином, твердження доведено.

Приклад 3. (рівняння звуку у в'язкому середовищі)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1(x,t)}{\partial t} = w_2(x,t) + u_1(x)e^{-\alpha t}, \\ \dfrac{\partial w_2(x,t)}{\partial t} = 2\Delta w_2(x,t) + \Delta w_1(x,t) + u_2(x)e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + 2|s|^2\lambda + |s|^2 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2}(s) = -|s|^2 \pm \sqrt{|s|^4 - |s|^2} = -|s|^2 \pm |s|\sqrt{|s|^2 - 1}$.
При $|s| \geq 1$ корені дійсні і $\max\limits_j Re\lambda_j(s) < 0$, а при $|s| < 1$ корені комплексні та $\max\limits_j Re\lambda_j(s) = 0$. Тобто система коректна за Петровським.

Наслідок 2. Якщо $x \in \mathbb{R}$, то система (1) завжди повністю керована з деяким α.

Доведення. Заперечення умови (2) еквівалентно системі

$$\begin{cases} Re\lambda_j(s_0) = -\alpha, \\ Im\lambda_j(s_0) = \dfrac{2k\pi}{T} \end{cases}$$

з деяким j та дійсним s_0.
Випадок дійсніх власних значень був розглянутий в роботі [3]. Тому розглянемо тільки випадок, коли $Im\lambda_j(s_0) \neq 0$.

Друге рівняння системи має кінцеве або злічену кількість нулів при фіксованому k, а всього цих коренів — злічення множина $s_k \in \mathbb{R}$. Тоді множина значень $Re\lambda_j(s_k)$ теж злічення і тому завжди знайдеться таке α, при якому $Re\lambda_j(s_k) \neq -\alpha$. Значить існує $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що виконується умова (2), а отже система керована.

3. Висновки

У даній роботі доведено загальний критерій керованості для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у просторі Л. Шварца з керуванням вигляду $u(x)e^{-\alpha t}$.

Також знайденi умови некерованої системи та наведен приклад такої системи.

Крiм того розглянутi важливi окремi випадки керованих систем: коректнi за Петровським системи та будь-якi системи з однiєю просторовою змiнною.

Для всiх випадкiв наведенi приклади.

ORCID ID

A. A. Makarov https://orcid.org/0000-0002-9050-4987

REFERENCES

1. G. M. Sklyar, L. V. Fardigola. The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis, Matem. Fizika, Analiz, Geometriya, 2002. – Vol. **9**, No. **2**. – P. 233-242.

2. L. V. Fardigola. Controllability Problems for the String Equation on a Half-Axis with a Boundary Control Bounded by a Hard Constant, SIAM J. Control Optim., – 2008. – Vol. **47**, No. **4**. – P. 2179-2199. https://doi.org/10.1137/070684057

3. A. A. Makarov. Controllability of evolution partial differential equation, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics", – 2016. – **83**. – P. 47-56. DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2016-83-04 (in Russian).

4. L. R. Volevich, S. G. Gindikin. Distributions and convolution equations. 1994. Nauka, M., 336 p. (in Russian). **in English:** 1992. Gordon and Breach, Philadelphia, xi+465 p., ISBN 2-88124-753-9

5. L. V. Fardigola. An integral boundary-value problem in a layer for a system of partial differential equations, Mat. sbornik, – 1995. – Vol. **186**. – No. **11**. – P. 123-144. (in Russian) **English translation:** Sbornik: Mathematics, – 1995. – Vol. **186**. – No. **11**. – P. 1671–1692

6. I. N. Gelfand, G. E. Shilov. Some questions of the theory of differential equations. 1958. Physmatgiz, M., 275 p. (in Russian).

Керованiсть систем лiнiйних диференцiальних рiвнянь з частинними похiдними

Макаров О. А.

Харкiвський нацiональний унiверситет iм. В. Н. Каразiна

м. Свободи, 4, Харкiв, Україна, 61022

Останнiм часом теорiя керованостi вивчалася в багатьох роботах. Але чимало з них присвячено керованим системам, якi описуються звичайними диференцiальними рiвняннями. У випадку систем, якi описуються диференцiальними рiвняннями

з частинними похідними, вони вивчалися здебільшого для класичних рівнянь математичної фізики. Наприклад, у роботах Г. Скляра і Л. Фардиголи було вивчено проблеми керованості для хвильового рівняння на пів осі.

У цій роботі проблему повної керованості вивчено для систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в просторах Шварца швидко спадних функцій. Одержано необхідні і достатні умови повної керованості цих систем з розподіленим керуванням спеціального вигляду: $\mathbf{u}(x,t) = e^{-\alpha t}u(x)$.

Для доведення цих умов було використано інші необхідні і достатні умови, одержані автором раніше (див. роботу "Керованість еволюційного диференціального рівняння в частинних похідних". Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". 2016. Т. 83, с. 47–56 [3]).

Так система

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + e^{-\alpha t}u(x), \quad t \in [0,T], \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

є повністю керованою в просторі Шварца, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\det\left(\int_0^T \exp\big(-t(P(s)+\alpha E)\big)\,dt\right) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^N.$$

Ця умова еквівалентна наступній умові: існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\exp\big(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\big) \neq 1, \quad \text{якщо } (\lambda_j(s)+\alpha) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

де $\lambda_j(s)$, $j = \overline{1,m}$, є власними значеннями матриці $P(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Також досліджено окремий випадок системи (1), для якої $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, є обмеженими зверху або знизу. Наприклад, системи (1), які є коректними за Петровським, є повністю керованими.

Одержано також умови існування системи вигляду (1), яка не є повністю керованою. Наведено приклад такої системи. Проте, якщо керування заданого вигляду не існує, то може існувати керування іншого вигляду. Приклад, що ілюструє цей ефект, також наведено в роботі.

Ключові слова: повна керованість; задача Коші; перетворення Фур'є.

Controllability of systems of
linear partial differential equations

A. A. Makarov
V. N. Karazin Kharkiv National University,
4 Svobody sqr., Kharkiv, 61022, Ukraine

In a number of papers, the controllability theory was recently studied. But quite a few of them were devoted to control systems described by ordinary differential equations. In the case of systems described by partial differential equations, they were studied mostly for classical equations of mathematical physics. For example, in papers by G. Sklyar and L. Fardigola, controllability problems were studied for the wave equation on a half-axis.

In the present paper, the complete controllability problem is studied for systems of linear partial differential equations with constant coefficients in the Schwartz space of rapidly decreasing functions. Necessary and sufficient conditions for complete controllability are obtained for these systems with distributed control of the special form: $\mathbf{u}(x,t) = e^{-\alpha t}u(x)$.

To prove these conditions, other necessary and sufficient conditions obtained earlier by the author are applied (see "Controllability of evolution partial differential equation". Visnyk of V. N. Karasin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". 2016. Vol. 83, p. 47–56 [3]).

Thus, the system

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) w(x,t) + e^{-\alpha t}u(x), \quad t \in [0,T], \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

is completely controllable in the Schwartz space if there exists $\alpha > 0$ such that

$$\det\left(\int_0^T \exp\big(-t(P(s)+\alpha E)\big)\,dt\right) \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^N.$$

This condition is equivalent to the following one: there exists $\alpha > 0$ such that

$$\exp\big(-T(\lambda_j(s)+\alpha)\big) \neq 1 \quad \text{if } (\lambda_j(s)+\alpha) \neq 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n, \ j = \overline{1,m},$$

where $\lambda_j(s)$, $j = \overline{1,m}$, are eigenvalues of the matrix $P(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$.

The particular case of system (1) where $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, are bounded above or below is studied. These systems are completely controllable. For instance, if the Petrovsky well-posedness condition holds for system (1), then it is completely controllable.

Conditions for the existence of a system of the form (1) which is not completely controllable are also obtained. An example of a such kind system is given. However, if a control of the considered form does not exists, then a control of other form solving complete controllability problem may exist. An example illustrating this effect is also given in the paper.

Keywords: complete controllability; Cauchy problem; Fourier transform.

Article history: Received: 17 March 2021; Final form: 25 May 2021;
Accepted: 30 May 2021.