Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 92, 2020, с. 4–14

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 92, 2020, p. 4–14
DOI: 10.26565/2221-5646-2020-92-01

УДК 517.9

Лінійна нетерова крайова задача для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова

С. М. Чуйко[1], М. В. Дзюба[2], Я. В. Калініченко[1]

[1]*Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, вул. Генерала Батюка, 19, Донецька обл., Україна 84 116*
[2]*Донбаська державна машинобудівна академія, вул. Академічна, 72, м. Краматорськ, Донецька обл., Україна 84313*
chujko-slav@ukr.net

Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного аналога рівняння Ляпунова.
Ключові слова: різницево-алгебраїчні рівняння; крайові задачі; матричне рівняння Ляпунова.

S. M. Chuiko, M. V. Dzyuba, Ya. V. Kalinichenko. **Linear Noetherian boundary value problem for the matrix difference-algebraic Lyapunov equation.** In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation.
Keywords: differential-algebraic equation; boundary value problem; matrix Lyapunov equation.

Чуйко С. М., Дзюба М. В., Калиниченко Я. В. **Линейная нетерова краевая задача для матричного разностно-алгебраического уравнения Ляпунова.** Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина для линейной нетеровой краевой задачи для матричного разностно-алгебраического аналога уравнения Ляпунова.
Ключевые слова: разностно-алгебраические уравнения; краевые задачи; матричное уравнение Ляпунова.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24, 34B15, 34C25.

1. Постановка задачі. Досліджено задачу про знаходження обмежених розв'язків [1, 2]

$$Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad k \in \Omega := \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \omega\}$$

лінійної нетерової ($\alpha\beta \neq \lambda\mu$) крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова

$$A(k)\,Z(k+1) = B(k)\,Z(k) + Z(k)\,C(k) + F(k), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \check{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}. \tag{2}$$

Компоненти

$$Z^{(i,j)}(k),\ F^{(i,j)}(k) : \Omega \to \mathbb{R}^1$$

матриць $Z(k)$ та $F(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ припускаємо обмеженими на множині Ω функціями. Тут $A(k),\ B(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ і $C(k) \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — обмежені на множині Ω матриці,

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$$

— лінійний обмежений матричний функціонал, визначений на просторі обмежених матриць $Z(k)$. Визначимо оператор [3]

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}] :\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений із n стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\Big\} :\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектор-стовпцю $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\in\mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $\mathcal{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$. В англомовній літературі оператор $\mathcal{M}[A]$ називають оператором векторизації і позначають [4]: $\mathcal{M}[A] := \mathrm{vec(A)}$.

Задача про знаходження обмежених розв'язків $Z(k)$ лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1) приводиться до задачі про знаходження обмежених розв'язків [2]

$$z(k) := \mathcal{M}Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad k \in \Omega$$

лінійного різницево-алгебраїчного рівняння

$$A(k)\,Z(k+1) = B(k)\,Z(k) + Z(k)\,C(k) + F(k). \tag{3}$$

Позначимо

$$\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \ j = 1,\ 2,\ \dots\,,\ \alpha\cdot\beta$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ та $c_j,\ j = 1, 2,\ \dots\,,\ \alpha\cdot\beta$ — константи, які визначають розвинення матриці

$$\check{Z} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Theta^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,\ 2,\ \dots\,,\ \alpha\cdot\beta$$

за векторами $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Позначимо матриці

$$\mathcal{A}^{(k)} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^{(k)} & \mathcal{A}_2^{(k)} & \dots & \mathcal{A}_{\alpha\beta}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_i^{(k)} := \mathcal{M}A(k)\Theta_i \in \mathbb{R}^{\alpha\beta},$$

а також
$$\mathcal{B}^{(k)} := \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1^{(k)} & \mathcal{B}_2^{(k)} & \dots & \mathcal{B}_{\alpha\beta}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times\alpha\beta},$$
де
$$\mathcal{B}_i^{(k)} := \mathcal{M}\left(A(k)\Theta_i + \Theta_i\, B(k)\right) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}.$$
Таким чином, задача про знаходження обмежених розв'язків $Z(k)$ лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (3) приведена до задачі про знаходження обмежених розв'язків
$$z(k) := \mathcal{M}Z(k) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad k \in \Omega := \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \omega\}$$
лінійного різницево-алгебраїчного рівняння
$$\mathcal{A}^{(k)} z(k+1) = \mathcal{B}^{(k)} z(k) + f(k), \quad f(k) := \mathcal{M}F(k). \tag{4}$$

2. Умови розв'язності для фіксованої функції $\nu_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$. Припустимо, що рівняння (4) задовольняє вимогам теореми [5, с. 570], а саме: припустимо, що має місце виродження або першого $p = 1$, або другого порядку: $p = 2$, при цьому лінійна різницево-алгебраїчна система (4) має розв'язок вигляду
$$z(k, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(k)\, c_{\rho_{p-1}} + K[f(i), \nu_p(i)](k), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$
залежний від довільної обмеженої вектор-функції $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$; припустимо також функцію $\nu_p(k)$ фіксованою. Позначимо матрицю
$$Q_p := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{\upsilon\times\rho_{p-1}},$$
а також [6]
$$P_{Q_p} : \mathbb{R}^{\rho_{p-1}} \to \mathbb{N}(Q_p), \quad P_{Q_p^*} : \mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}(Q_p^*)$$
— матриці-ортопроектори. Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші $z(0) = c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}$ неоднорідного лінійного різницево-алгебраїчного рінняння (4) у крайову умову
$$\ell z(\cdot) = \check{\alpha} := \mathcal{M}\check{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu},$$
приходимо до рівняння
$$Q_p\, c = \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot),$$
розв'язного тоді і тільки тоді, коли [6]
$$P_{Q_p^*}\Big\{\check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot)\Big\} = 0; \tag{5}$$
у цьому випадку розв'язок $z(k)$ лінійної нетерової крайової задачі (1), (2) визначає вектор
$$c_{\rho_{p-1}} = Q_p^{+}\Big\{\check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot)\Big\} + P_{Q_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $Q_p^+ \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times\upsilon}$ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора $P_{Q_p} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}\times\rho_{p-1}}$. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема 1. *Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійного різницево-алгебраїчного рівняння (1) у випадку виродження першого* $p = 1$, *або другого порядку:* $p = 2$ *має розв'язок вигляду*

$$Z(k, c_{\rho_{p-1}}) = W(k, c_{\rho_{p-1}}) + K[F(i), \nu_p(i)](k),$$

залежний від довільної обмеженої вектор-функції $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$. *Тут*

$$W(k, c_{\rho_{p-1}}) := \mathcal{M}^{-1}\left[X_p(k)\, c_{\rho_{p-1}}\right], \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

крім того

$$K[F(i), \nu_p(i)](k) := \mathcal{M}^{-1}\left[K[f(i), \nu_p(i)](k)\right].$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку виродження або першого $p = 1$, *або другого порядку:* $p = 2$, *для фіксованої обмеженої вектор-функції* $\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$ *за умови (5) має розв'язок*

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$W(k, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\left[X_r(k)\, c_r\right], \quad X_r(k) := X_p(k) P_{Q_r}, \quad k \in \Omega$$

та

$$G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k) := \mathcal{M}^{-1}\left[G[f(j), \nu_p(j), \check{\alpha}](k)\right]$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2), крім того

$$G[f(j), \nu_p(j), \check{\alpha}](k) := K[\mathfrak{F}_p(j, \nu_p(j))](k) +$$
$$+ X_p(k) Q_p^+ \left\{ \check{\alpha} - \ell K[f(j), \nu_p(j)](\cdot) \right\}.$$

Приклад 1. *Знайдемо розв'язок лінійної матричної періодичної задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку*

$$A(k)\, Z(k+1) = B(k)\, Z(k) + Z(k)\, C(k) + F(k), \;\; k \in \Omega \tag{6}$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := Z(0) - Z(3) = 0, \tag{7}$$

де

$$A(k) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$C(k) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(k) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (6) приводиться до задачі про знаходження обмежених розв'язків лінійного різницево-алгебраїчного рівняння (4), де

$$\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система (4) вироджена, при цьому матриця

$$A_1(k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця повного рангу, тому для різницево-алгебраїчного рівняння (4) має місце виродження першого порядку

$$P_{A_1}(k) \neq 0, \quad P_{A_{\rho_1}}(k) \neq 0,$$

тому шуканий розв'язок різницево-алгебраїчного рівняння (4)

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k) c_{\rho_0} + K\Big[f(j), \nu_1(j)\Big](k), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^5$$

залежить від довільної обмеженої функції; покладемо її нульовою: $\nu_1(k) := 0$. Оскільки виконано умову (5), то лінійна матрична періодична задача для системи (6) має розв'язок

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \nu_p(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^2;$$

тут

$$Z(k, c_r) = \begin{pmatrix} 2\,(c_{r_1} + c_{r_2}) & 0 \\ -1 & -1 \\ 2\,(c_{r_1} + c_{r_2}) & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \Omega,$$

крім того

$$c_r := \begin{pmatrix} c_{r_1} \\ c_{r_2} \end{pmatrix}.$$

3. Умови розв'язності для не фіксованої функції $\nu_\mathbf{p}$. У випадку виродження або першого порядку $p = 1$, або другого порядку: $p = 2$, для не фіксованої обмеженої вектор-функції

$$\nu_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p}$$

розв'язність лінійної нетерової крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) суттєво залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_p(k) := \Psi_p(k)\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{\theta};$$

тут $\Psi_p(k) \in \mathbb{R}^{\rho_p \times \theta}$ — довільна обмежена матриця повного рангу. Оператор Гріна задачі Коші для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) представимо у вигляді

$$K\Big[f(j), \nu_p(j)\Big](k) = K\Big[f(j)\Big](k) + K\Big[\Psi_p(j)\Big](k)\,\gamma;$$

тут

$$K\Big[\Psi_p(j)\Big](k) := \prod_{i=0}^{p-1} S_i^{-1}(k-1) P_{D_{\rho_i}}(k) \mathcal{K}\Big[\Psi_p(j)\Big](k).$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(k, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(k)\, c_{\rho_{p-1}} + K[f(i), \nu_p(i)](k), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (4) в крайову умову

$$\ell z(\cdot) = \check{\alpha} := \mathcal{M}\check{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{\lambda\mu},$$

приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}_p\, \check{c} = \alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot), \quad \check{c} := \mathrm{col}\,(c_{\rho_{p-1}}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}+\theta},$$

розв'язного тоді і тільки тоді, коли [1, 2, 6]

$$P_{\mathcal{D}_p^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{8}$$

Тут $P_{\mathcal{D}_p^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}_p^*)$. За умови (8) і тільки за неї загальний розв'язок крайової задачі для рівняння (4)

$$z(k, \delta) = \Big\{X_p(k); K\Big[\Psi_p(j)\Big](k)\Big\}\mathcal{D}_p^{+}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} +$$

$$+ K\Big[f(j)\Big](k) + \Big\{X_p(k); K\Big[\Psi_p(j)\Big](k)\Big\} P_{\mathcal{D}_p}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}+\theta}$$

визначає загальний розв'язок крайової задачі (1), (2). Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійного матричного різницево-алгебраїчного рівняння (1) у випадку виродження або першого $p = 1$, або другого порядку: $p = 2$, має розв'язок вигляду*

$$Z(k, c_{\rho_{p-1}}) = W(k, c_{\rho_{p-1}}) + K[F(i), \nu_p(i)](k),$$

залежний від фіксованої обмеженої матриці повного рангу $\Psi_p(k)$:

$$K\Big[f(j),\nu_p(j)\Big](k)=K\Big[f(j)\Big](k)+K\Big[\Psi_p(j)\Big](k)\,\gamma.$$

Тут

$$W(k,c_{\rho_{p-1}}):=\mathcal{M}^{-1}\left[X_p(k)\,c_{\rho_{p-1}}\right],\quad c_{\rho_{p-1}}\in\mathbb{R}^{\rho_{p-1}},$$

крім того

$$K[F(i)](k):=\mathcal{M}^{-1}\left[K[f(i)](k)\right].$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійної матричної різницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку виродження порядку $p\geq 1$ *для фіксованої обмеженої матриці повного рангу* $\Psi_p(k)$ *при умові (8) має розв'язок*

$$Z(k,c_r)=W(k,c_r)+G[F(i),\Psi_p(i),\check{\alpha}](k),\quad c_r\in\mathbb{R}^r;$$

тут

$$W(k,c_r):=\mathcal{M}^{-1}\left[X_r(k)\,c_r\right],\quad X_r(k):=X_p(k)P_{Q_r},\quad k\in\Omega$$

і

$$G[F(i),\Psi_p(i),\check{\alpha}](k):=\mathcal{M}^{-1}\left[G[f(j),\nu_p(j),\check{\alpha}](k)\right]$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової ріницево-алгебраїчної крайової задачі (1), (2), крім того

$$G[f(j),\nu_p(i),\check{\alpha}](k):=K[\mathfrak{F}_p(j)](k)+$$
$$+\left[X_p(k);K\Big[\Psi_p(j)\Big](k)\right]D_p^+\left\{\check{\alpha}-\ell K[f(j)](\cdot)\right\}.$$

Означення 1. *За умови* $P_{\mathcal{D}_p^*}\neq 0$ *будемо казати, що лінійна нетерова крайова задача для матричного ріницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1), (2) у випадку виродження порядку* $p\geq 1$ *представляє критичний випадок, і навпаки: за умови*

$$P_{Q_p^*}\neq 0,\quad P_{\mathcal{D}_p^*}=0$$

будемо казати, що матрична різницево-алгебраїчна крайова задача (1), (2) приведена до некритичного випадку.

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок лінійної матричної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку*

$$A(k)\,Z(k+1)=B(k)\,Z(k)+Z(k)\,C(k)+F(k) \tag{9}$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot):=M\,\mathcal{M}(Z(1)+Z(2))=0, \tag{10}$$

де матриці $A(k),B(k),C(k)$ *і вектор-функція* $F(k)$ *наведені в прикладі 1, крім того*

$$M:=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \alpha:=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix},\quad k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

У прикладі 1 встановлено, що для різницево-алгебраїчного рівняння (9) має місце виродження першого порядку, тому шуканий розв'язок різницево-алгебраїчного рівняння (9) залежить від довільної функції; покладемо

$$\Psi_p(n) := \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця приводить матричну крайову задачу (9), (10) до некритичного випадку: $P_{Q_1^*} \neq 0, P_{\mathcal{D}_1^*} = 0$; тут

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, згідно теореми 1, існує розв'язок лінійної матричної крайової задачі (9), (10) вигляду

$$Z(k, c_r) = W(k, c_r) + G[F(i), \Psi_1(i), \check{\alpha}](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^5;$$

тут

$$W(0, c_r) = \begin{pmatrix} -2\,(cr_1 + cr_2 + cr_3) & -2\,(cr_1 - 3\,cr_2 + cr_3) \\ -cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ -2\,(cr_1 + cr_2 - 3\,cr_3) & 6\,cr_1 - 2\,(cr_2 + cr_3) \end{pmatrix},$$

$$W(1, c_r) = \begin{pmatrix} 4\,cr_1 - 4\,cr_2 + 4\,cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \\ -4\,cr_1 + 4\,cr_2 - 4\,cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \end{pmatrix},$$

$$W(2, c_r) = \begin{pmatrix} -4\,cr_1 + 4\,cr_2 - 4\,cr_3 + cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \\ -cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ 4\,cr_1 - 4\,cr_2 + 4\,cr_3 + cr_4 + cr_5 & -cr_4 - cr_5 \end{pmatrix},$$

$$W(3, c_r) = \begin{pmatrix} 4\,cr_1 - 4\,cr_2 + 4\,cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \\ -5\,cr_4 - cr_5 & 5\,cr_4 + cr_5 \\ -4\,cr_1 + 4\,cr_2 - 4\,cr_3 - cr_4 - cr_5 & cr_4 + cr_5 \end{pmatrix}$$

та

$$G[F(i), \Psi_1(i), \check{\alpha}](k) \equiv K[F(i), \nu_1(i)](k) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі (9), (10).

Отримані результати аналогічно [7] можуть бути використані в теорії стійкості для систем різницевих рівнянь. Для розв'язання задачі про знаходження обмежених розв'язків нетерової крайової задачі для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова (1), (2) в критичному випадку також може бути застосована техніка регуляризації [8, 9, 10].

ORCID ID

S. M. Chuiko https://orcid.org/0000-0001-7186-0129

M. V. Dzyuba https://orcid.org/0000-0003-2579-9157

Ya. V. Kalinichenko https://orcid.org/0000-0002-8352-1965

REFERENCES

1. A. A. Boichuk, S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. Linear Noetherian boundary value problem for the matrix difference equation, Ukrainian math. journal, – 2020. – 3. **72**. – P. 386-402. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-020-01789-8

2. A. A. Boichuk. Boundary value problems for systems of difference equations, Ukrainian mathematical journal, – 1997. – 6. **49**. – P. 832-835 (in Russian).

3. S. M. Chuiko. The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem, Siberian Mathematical Journal, – 2015. – 4. **56**. – P. 752-760 (in Russian). DOI: 10.17377/smzh.2015.56.417.

4. J. R. Magnus. L-structured matrices and linear matrix equations, Linear algebra and its appl., – 1983. – **14**. – P. 67-88. DOI: https://doi.org/10.1080/03081088308817543

5. S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. Boundary value problems for systems of linear difference-agebraic equations, Nonlinear oscillations, – 2019. – 4. **22**. – P. 560-573.

6. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 p. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110378443

7. V. I. Korobov, M. O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems, uncontrollable in the first approximation, Rep. NAS Ukraine, – 2014. – **2**. – P. 20-25 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.15407/dopovidi2014.02.020

8. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin. Methods for solving ill-posed problems. 1986. Nauka, M., 288 p. (in Russian).

9. S. G. Krein. Linear equations in a Banach space. 1971. Nauka, M., 104 p. (in Russian).

10. S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, – 2018. – **88**. – P. 27-34 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2018-88-03

Лінійна нетерова крайова задача для матричного різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова

Чуйко С. М.[1], Дзюба М. В.[2], Калініченко Я. В.[1]
[1]*Донбаський державний педагогічний університет, вул. Генерала Батюка, 19, м. Слов'янськ, Донецька обл., Україна 84 116*
[2]*Донбаська державна машинобудівна академія, вул. Академічна, 72, м. Краматорськ, Донецька обл., Україна 84313*

Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейєрштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю. Є. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця, О. А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням крайових задач для різницевих рівнянь, започаткованим у роботах А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна, Я. С. Безиковича, О. О. Гольфонда, С. Л. Соболєва, В. С. Рябенького, В. Б. Демідовича, А. Халаная, Г. І. Марчука, О. А. Самарського, Ю. О. Митропольського, Д. І. Мартинюка, Г. М. Вайніко, А. М. Самойленка, О. А. Бойчука та О. М. Станжицького. Дослідженню нелінійних сингулярно збурених крайових задач для різницевих рівнянь у частинних різницях присвячені роботи В. П. Аносова, Л. С. Франка, П. Є. Соболєвського, О. Л. Скубачевського та А. Ашералієва. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А. М. Самойленка та О. А. Бойчука на лінійні крайові задачі для різницево-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі у випадку різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова. Запропоновано оригінальну класифікацію критичних і некритичних випадків для лінійної нетерової крайової задачі у випадку різницево-алгебраїчного рівняння Ляпунова.
Ключові слова: різницево-алгебраїчні рівняння; крайові задачі; матричне рівняння Ляпунова.

Linear Noetherian boundary value problem for a matrix difference-algebraic Lyapunov equation

S. M. Chuiko[1], M. V. Dzyuba[2], Ya. V. Kalinichenko[1]
[1]*Donbas State Pedagogical University, 19, Batiuk General st., Slavyansk, Donetsk region, 84 116, Ukraine*
[2]*Donbas State Engineering Academy, 72 Academic st. Kramatorsk, Donbass region, 84 313, Ukraine*

The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N. N. Luzin and F. R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu. E. Boyarintsev, V. F. Chistyakov, A. M. Samoilenko, M. O. Perestyuk, V. P. Yakovets, O. A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of

nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of boundary value problems for difference equations, initiated in A. A. Markov, S. N. Bernstein, Ya. S. Besikovich, A. O. Gelfond, S. L. Sobolev, V. S. Ryaben'kii, V. B. Demidovich, A. Halanay, G. I. Marchuk, A. A. Samarskii, Yu. A. Mitropolsky, D. I. Martynyuk, G. M. Vayniko, A. M. Samoilenko, O. A. Boichuk and O. M. Standzhitsky. Study of nonlinear singularly perturbed boundary value problems for difference equations in partial differences is devoted to the work of V. P. Anosov, L. S. Frank, P. E. Sobolevskii, A. L. Skubachevskii and A. Asheraliev. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk on linear boundary value problems for difference-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a linear boundary value problem for a difference-algebraic equation.

Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A. M. Samoilenko and O. A. Boichuk on the linear boundary value problems for the differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the linear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation.

In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation. The proposed scheme of the research of the linear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation in the critical case in this article can be transferred to the seminonlinear differential-algebraic boundary value problem for a matrix Lyapunov equation.

Keywords: differential-algebraic equation; boundary value problem; matrix Lyapunov equation.

Article history: Received: 1 November 2020; Final form: 18 November 2020;
Accepted: 18 November 2020.