Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 90, 2019, с. 60–72

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 90, 2019, p. 60–72
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-90-04

УДК 517.9

Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку

С.М. Чуйко[1], О.В. Нєсмєлова[1,2]

[1]*Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Донецька область, вул. Г. Батюка, 19, 84116, Україна*
[2]*Інститут прикладної математики и механіки НАН України Слов'янськ, Донецька область, вул. Г. Батюка, 19, 84116, Україна*
chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net

Знайдено умови існування та побудовано ітераційну схему для знаходження розв'язків слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі.
Ключові слова: крайові задачі; диференціально-алгебраїчна система; некритичний випадок; псевдообернена матриця.

Чуйко С.М., Несмелова О.В. **О приведении нелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи к некритическому случаю.** Найдены условия существования и построена итерационная схема для нахождения решений слабонелинейной нетеровой дифференциально-алгебраической краевой задачи.
Ключевые слова: краевые задачи; дифференциально-алгебраическая система; некритический случай; псевдообратные матрицы.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova. **On the reduction of a nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary-value problem to a noncritical case.** We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution and iterative scheme for the approximate solutions of nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem in critical case.
Keywords: boundary-value problems; differential-algebraic equations; noncritical case; pseudoinverse matrices.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B15.

1. Лінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі [1, 2, 3]

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

тут

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

— неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервний вектор-стовпець; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k$. Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або квадратною, але виродженою. За умови [3]

$$P_{A^*(t)} = 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{2}$$

система (1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)), \quad \text{rank}\ A(t) := \sigma_0 = m \leq n; \tag{3}$$

тут

$$\mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця, $P_{A^*}(t)$ — матриця-ортопроектор: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n\times\rho_0)-$ матриця, складена з ρ_0 лінійно незалежних стовпців $(n \times n)-$ матриці-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким чином, за умови $\rho_0 \neq 0$, система (3), розв'язна відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (3). Відмітимо, що нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ невироджена. За умови (2) система (3), а отже і система (1), має розв'язки вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1). Оскільки за умови (2) система (1) розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, то випадок (2) будемо називати невиродженим [3, 4, 5]. Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння, розв'язного тоді і тільки тоді, коли [4, 5]

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{4}$$

Тут P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*}, крім того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Отже, тільки за умови (4) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) := X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

Тут P_Q — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ складена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора P_Q. За умови $P_{Q^*} = 0$, крайова задача (1) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α. За аналогією з теорією нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [2] за умови $P_{Q^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) представляє некритичний випадок.

2. Про приведення лінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$ розв'язність диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \quad \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0\times w}[a,b],\ \gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t)$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) представимо у виді

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t) + K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s)\Big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \Big[\ Q\ ;\ \ell K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\Big](\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{k\times(\rho_0+w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(t, c_{\rho_0}) = X_0(t)c_{\rho_p} + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t) + K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\gamma\Big](t), \quad c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot), \quad \check{c} := \mathrm{col}\,(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}. \qquad (5)$$

Рівняння (5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_d^*}\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{6}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$; матриця $P_{\mathcal{D}_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$, крім того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times\rho_0}$. Отже, за умови (6) загальний розв'язок рівняння (5)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} + P_{\mathcal{D}}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}$$

визначає загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної задачі (1)

$$z(t,\delta) = K\left[A^+(s)f(s)\right](t) + \left\{X_0(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)\right](t)\right\}\mathcal{D}^+\left\{\alpha - \right.$$

$$\left. -\ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\} + \left\{X_0(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\right](t)\right\}P_{\mathcal{D}}\,\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ — матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_p+w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. *За умови (2) і (6) загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s);\psi(s);\alpha\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G\left[f(s);\psi(s);\alpha\right](t) := K\left[A^+(s)f(s)\right](t) +$$

$$+\left\{X_0(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)\right](t)\right\}\mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[A^+(s)f(s)\right](\cdot)\right\}.$$

Матриця $X_r(t)$ складена з r лінійно незалежних столпців матриці

$$\left\{X_0(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\right](t)\right\}P_{\mathcal{D}}.$$

Приклад 1. *Вимогам леми задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)\,z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 & e^t \end{pmatrix}^*, \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \tag{7}$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \quad \alpha := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 - e^{2\pi} \\ 1 - e^{2\pi} \\ -4 - e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок однорідної задачі (7) визначає вироджена матриця $Q = 0$. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$, то задача (7) представляє критичний випадок, при цьому виконано умову (6) її розв'язності. Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (7):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t) = \frac{1}{10\,\pi}\begin{pmatrix} -5\,t - 2\pi\cos t + 2e^t\pi\cos t - \pi\sin t - e^t\pi\sin t \\ 2\pi\left(-\cos t + e^t\cos t + 2\sin t + 2\,e^t\sin t\right) \\ 5\,t - 2\pi\cos t + 2\,e^t\pi\cos t - \pi\sin t - e^t\pi\sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (7).

За умови $P_{Q^*} \neq 0$, $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного випадку. Останнє означення є узагальненням критичного випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, отриманої з системи (1) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Наслідок. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (1) задовольняє умовам леми. За умови $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α, а також початкової функції $\varphi(t)$. Загальний розв'язок диференціально алгебраїчної крайової задачі (1)*

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t) := K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](t)+$$

$$+\Big\{X_0(t);K\Big[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)\Big](t)\Big\}\mathcal{D}^{+}\Big\{\alpha-\ell K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1).

Приклад 2. *Вимогам наслідку задовольняє двоточкова диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)\,z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (z(0) - z(2\pi)) = 0, \tag{8}$$

де матриці $A(t)$ і $B(t)$, а також функція $f(t)$ наведена в прикладі 1.

У випадку однорідної задачі (8) матриця $Q = 0$, отже, відповідно до традиційної класифікації нетерових крайових задач, для задачі (8) має місце критичний випадок. Покладемо $\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix}$, при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то задача (8) представляє некритичний випадок, і, відповідно, диференціально-алгебраїчна крайовая задача (8) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α. Таким чином, знаходимо загальний розв'язок неоднорідної задачі (8):

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\psi(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3;$$

тут $X_r(t) = X_0(t)$, а також

$$G\Big[f(s);\psi(s)\Big](t) = \frac{1}{10\pi}\begin{pmatrix} t - e^{2\pi}t - 2\pi\cos t + 2e^t\pi\cos t - \pi\sin t - e^t\pi\sin t \\ 2\pi\left(-\cos t + e^t\cos t + 2\sin t + 2\,e^t\sin t\right) \\ e^{2\pi}t - t - 2\pi\cos t + 2\,e^t\pi\cos t - \pi\sin t - e^t\pi\sin t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (8).

3. Нелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем

Дослідимо задачу про побудову розв'язків

$$z(t,\varepsilon):\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b],\ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$A(t)z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{9}$$

Розв'язки нетерової ($n \neq k$) крайової задачі (9) шукаємо в малому околі розв'язку $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ породжуючої задачі

$$A(t)z_0'(t) = B(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{10}$$

Тут $A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — неперервний вектор; $Z(z,t,\varepsilon)$ — нелінійна функція, неперервно диференційовна по незалежній $z(t)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по $t \in [a,b]$ і неперервна по малому параметру $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний векторний функціонал: $\ell z(\cdot,\varepsilon) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k$. Нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (9) узагальнює багаточисленні постановки нелінійних нетерових крайових задач [2]. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) невироджена породжуюча задача (10) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконано умову (4) і для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має r лінійно незалежних розв'язків

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

У критичному випадку в малому околі розв'язку породжуючої задачі крайова задача (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли [4]

$$P_{Q_d^*}\ell K\Big[Z(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon),\nu_0(s)\Big](\cdot) = 0. \tag{11}$$

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язність нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо $\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma,\ \Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0\times w}[a,b],\ \gamma \in \mathbb{R}^w$; тут $\Psi(t)$ — довільна неперервна матриця повного рангу. Припустимо, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного випадку: $P_{Q^*} \neq 0,\ P_{\mathcal{D}^*} = 0$.

У статті [4] знайдено умови існування, а також ітераційна схема для знаходження розв'язків невиродженої слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку, а саме: за умови $P_{Q^*} \neq 0$. Умови існування, а також ітераційна схема для знаходження розв'язків невиродженої слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в некритичному випадку, а саме: за умови $P_{Q^*} = 0$, знайдені в статті [5]. Метою даної статті є знаходження умов звідності нелінійної невиродженої нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку до некритичного випадку аналогічно [5, 6]. Припустимо, що крайова задача (9) невироджена; в цьому випадку система (9) розв'язна відносно похідної. Розв'язки невиродженої крайової задачі (9) в такому разі визначає система

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)) + \varepsilon\, A^+(t)Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha. \tag{12}$$

Розв'язки крайової задачі (12) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої задачі: $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$. Фіксуючи одну з констант $c_r \in \mathbb{R}^r$, для знаходження вектора

$$x(t,\varepsilon): \; x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in \mathbb{C}^1[0,\varepsilon_0], \quad x(t,0) \equiv 0$$

аналогічно [2], приходимо до задачі

$$x' = A^+(t)B(t)x + \varepsilon\, A^+(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \quad \ell x(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

У випадку $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ задача (13) розв'язна для довільної нелінійності. Загальний розв'язок диференціально-алгебраїчної крайової задачі (13) для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ має вигляд

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + \varepsilon\, G\Big[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); 0\Big](t).$$

Розв'язки крайової задачі (9) при цьому визначає операторна система [2]

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), \quad x(t,\varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[A^+(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \psi(s); 0\Big](t).$$

Для побудови розв'язків цієї операторної системи використовуємо [2, 7] метод простих ітерацій; таким чином отримуємо ітераційну схему

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t,\varepsilon) &= z_0(t,c_r) + x_{k+1}(t,\varepsilon), \; k = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots, \\ x_{k+1}(t,\varepsilon) &= X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon), \\ x^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) &= \varepsilon\, G\Big[A^+(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \psi(s); 0\Big](t). \end{aligned} \tag{14}$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема. *Припустимо, що диференціально-алгебраїчне рівняння (10) невироджене. У випадку $P_{\mathcal{D}^*} = 0$ породжуюча задача (10) розв'язна при довільних неоднорідностях диференціально-алгебраїчної системи і крайової умови (10) і має r лінійно незалежних розв'язків*

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \psi(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При додатковій умові

$$A^+(\cdot)Z(z,\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}[a;b], \; A^+(t)Z(\cdot,t,\varepsilon) \in \mathbb{C}[||z - z_0|| < q] \tag{15}$$

для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) використовуємо збіжну при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_*]$ ітераційну схему (14).

Для визначення величини ε_* може бути використано метод мажоруючих рівнянь Ляпунова [2, 8, 9]; крім того, конструктивна оцінка величини ε_* знайдена у статті [7].

Приклад 3. *Вимогам теореми задовольняє нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача*

$$A(t)\, z'(t,\varepsilon) = B(t)z(t,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = 0, \tag{16}$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$z(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t,\varepsilon) \\ z_b(t,\varepsilon) \\ z_c(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_b^2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) := \Upsilon\,(z(0,\varepsilon) - z(2\pi,\varepsilon)).$$

Для однорідної частини породжуючої задачі матриця $Q = 0$, отже, відповідно до традиційної класифікації нетерових крайових задач для диференціальних систем для задачі (16) має місце критичний випадок. У випадку рівняння (16) породжуючий розв'язок залежить від довільної неперервної функції. Покладемо

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & \sin t \end{pmatrix},$$

при цьому

$$\mathcal{D} = -2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{D}^*} = 0.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то у випадку рівняння (16) породжуюча задача представляє умовно некритичний випадок, і, відповідно, породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння (16) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ і α. Фіксуючи константу

$$c_r := \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

знаходимо

$$z_0(t,c_r) = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 5\sin 2t - 7\sin t \\ -2\,(7\cos t + 5\cos 2t - 15) \\ 5\sin 2t - 7\sin t \end{pmatrix}.$$

Для побудови розв'язків нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (16) використовуємо ітераційну схему (14), при цьому, покладаючи $c(\varepsilon) := 0$, маємо:

$$x_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t,\varepsilon) \\ x_{1b}(t,\varepsilon) \\ x_{1c}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad x_{1c}(t,\varepsilon) = x_{1a}(t,\varepsilon),$$

де

$$x_{1a}(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{86\ 400}\Big(- 4\ 200 + 7\ 125\cos t - 2\ 240\cos 2t -$$

$$-903\cos 3t + 168\cos 4t + 50\cos 5t - 3\ 012\, t\sin t\Big),$$

$$x_{1b}(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{43\ 200}\Big(- 3\ 012\, t\cos t + 5\ 451\sin t -$$

$$-560\sin 2t - 603\sin 3t + 168\sin 4t + 50\sin 5t\Big).$$

Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (16) визначимо нев'язки $\Delta_k(\varepsilon)$ нульового і першого наближень до розв'язку крайової задачі (16). Поклавши $\varepsilon := 0,1$ та $k = 0,\ 1$, маємо

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,0500\ 556, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,00\ 281\ 729.$$

Відмітимо також, що перше наближення до розв'язку крайової задачі (16) в точності задовольняє крайовій умові.

Запропонована в статті схема дослідження нелінійних диференціально-алгебраїчних крайових задач аналогічно [2, 10] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі. З іншої сторони, запропонована в статті схема дослідження слабконелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі (9) в критичному випадку може бути перенесена на автономні слабконелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [2, 11, 12].

Подяка. Дослідження виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р.н. 0118U003390.

ORCID ID

S. M. Chuiko https://orcid.org/0000-0001-7186-0129

O. V. Nesmelova https://orcid.org/0000-0003-2542-5980

REFERENCES

1. S.L. Campbell. Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne. — Pitman Advanced Publishing Program, 1980. — 178 p.

2. A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. 2016. De Gruyter, Berlin; Boston, 298 p.

3. S.M. Chuiko. On a Reduction of the Order in a Differential-Algebraic System, Journal of Mathematical Sciences., — 2018. — 235. V. **1**. — P. 2-14.

4. O.V. Nesmelova. Nonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system, Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, — 2018. — V. **32**. — P. 78-91.

5. O.V. Nesmelova. Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system, Vysnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”, — 2019. — V. **89**. — P. 10-20.

6. S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, I.A. Boichuk. On the reduction of a Noetherian boundary-value problem to a first-order critical case, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), — 2015.— 208. V. **5**, — P. 607-619.

7. A.S. Chuiko. The convergence region of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem, Nonlinear oscillation, — 2005. — 8. V. **2**. — P. 278-288.

8. D.K. Lika, Yu.A. Ryabov. Iteration methods and majorizing Lyapunov equations in the theory of nonlinear oscillations. 1974. Chisinau: Shtynica, 292 p.

9. O.B. Lykova, A.A. Boichuk. Construction of periodic solutions of nonlinear systems in critical cases, Ukrainian Mathematical Journal, — 1988. — 40. V.**1**. — P. 62-69.

10. S. Chuiko. Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation, Miskolc Mathematical Notes, — 2016. — 17. V. **1**. — P. 139-150.

11. I.G. Malkin. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. 1956. Gostekhizdat, Moscow, 491 p.

12. A. Boichuk, S. Chuiko. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases, Differential Equations, — 1992. — V. **10**. — P. 1353-1358.

Чуйко С.М., Нєсмєлова О.В. **Про перетворення нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі до некритичного випадку.** Дослідження диференційно-алгебраїчних крайові задачі засновані в роботах К. Вейєрштрасса, М.М. Лузін і Ф.Р. Гантмахер. Систематичне вивчення диференційно-алгебраїчний крайові задачі присвячені роботи С. Кемпбелл, Ю.Є. Бояринцев, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, В.П. Яковця, А.А. Бойчука, А. Ілчманна і Т. рейсу. У той же час дослідження диференційно-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням нелінійних кращі задачі для звичайно різних диференціальних завдань, початкових в роботі А. Пуа нкаре, А.М. Ляпунова, Н.М. Крилова, Н.Н. Боголюбова, І.Г. Малкина, А.Д. Мышкиса, Є.А. Гребеников, Ю.Ю Мітропольського, І.Т. Кігурадзе, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюка і А.А. Бойчука.

Вивчення нелінійної диференційно-алгебраїчна крайова завдання пов'язане з численними додатками відповідна математичними моделей в теорії нелінійних коливань, механіка, біологія, радіотехніка, теорія стійкості рух. Такому чином, актуальна проблема є перенесення результати, отримані в статтях і монографії С. Кемпбелла, А.Й . Самойленко і А.А. Бойчука на нелінійні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних і достатніх умов існування позовом х рішень нелінійних диференційно-алгебраїчних крайових задач.

У статті знайдені умови існування і побудовано итерационную схему для знаходження рішень слабонелінейной нетерових диференційно-алгебраїчних крайової задачі. Запропонована в статті схема дослідження нелінійних діфференціально-алгебраїчних крайових задач може бути перенесена на нелінійні матричні диференційно-алгебраїчних крайові задачі. З іншого боку, запропонована в статті схема дослідження нелінійних нетерових диференційно-алгебраїчних крайових задач у критичному випадку може бути перенесена на авт ономні слабонелінейні диффренціально-алгебраїчні краєві задачі.
Ключові слова: крайові задачі; диференціально-алгебраїчна система; некритичний випадок; псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova. **About the reduction of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem to the noncritical case.** The study of the differential-algebraic boundary value problems was established in the papers of K. Weierstrass, M.M. Lusin and F.R. Gantmacher. Works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis are devoted to the systematic study of differential-algebraic boundary value problems. At the same time, the study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the study of nonlinear boundary-value problems for ordinary differential equations, initiated in the works of A. Poincare, A.M. Lyapunov, M.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, I.G. Malkin, A.D. Myshkis, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, Yu.A. Mitropolsky, I.T. Kiguradze, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A. Boichuk.

The study of the nonlinear differential-algebraic boundary value problems is connected with numerous applications of corresponding mathematical models in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, the theory of the motion stability. Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk on the nonlinear boundary value problems for the differential algebraic equations, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the nonlinear differential algebraic boundary value problems.

In this article we found the conditions of the existence and constructed the iterative scheme for finding the solutions of the weakly nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. The proposed scheme of the research of the nonlinear differential-algebraic boundary value problems in the article can be transferred to the nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problems. On the other hand, the proposed scheme of the research of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problems in the critical case in this article can be transferred to the autonomous seminonlinear differential-algebraic boundary value problems.

Keywords: the nonlinear differential-algebraic equations; the nonlinear boundary value problems; the generalized Green's operator; Moore-Penrose pseudo-inverse matrix.

Article history: Received: 30 August 2019; Final form: 21 November 2019;
Accepted: 21 November 2019.