Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 1018, 2012, с.62–75

Решение нелинейных уравнений специального вида

Е. В. Олейник
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
oleynike@yandex.ru

В работе исследованы и описаны решения системы нелинейных уравнений, лежащей в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов.
Ключевые слова: Треугольные модели, коммутативные системы, линейные несамосопряженные операторы.

Олійник О. В., **Розв'язок нелінійних рівнянь спеціального виду.** В роботі досліджено і описано розв'язки системи нелінійних рівнянь, яка лежить в основі побудови трикутних моделей комутативних систем лінійних несамоспряжених операторів.
Ключові слова: Трикутні моделі, комутативні системи, лінійні несамоспряжені оператори.

Oliynyk E. V., **The solution of non-linear equations of a special kind.** The solutions of the system of non-linear equations, basis for the construction of triangular models used for the commutative systems of non-self-conjugate operators were studied and described in this work.
Keywords: Triangular, commutative systems of linear nonselfadjoint operators.
2000 Mathematics Subject Classification 47B15, 47A45, 47A48.

Введение

Построение треугольной модели для несамосопряженного ограниченного оператора основано на мультипликативном представлении его характеристической функции, которая содержит как спектральную меру $a(x)$, так и спектральную функцию $\alpha(x)$ [1].

Для коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов характеристическая функция обладает дополнительным свойством, а именно, свойством сплетаемости [2]. Как показано в [2], построение треугольных моделей для коммутативных систем операторов основано на продолжении этого свойства сплетаемости вдоль общей цепочки инвариантных подпространств. Отсюда вытекает, что параметры коммутативной системы операторов, спектральная мера $a(x)$ и спектральная функция $\alpha(x)$ удовлетворяют нелинейной системе уравнений.

Данная работа посвящена изучению этой системы нелинейных уравнений в случае двумерности мнимых компонент коммутативной системы линейных несамосопряженных операторов $\{A_1, A_2\}$. В работе полностью исследована данная система в этом случае и предъявлены ее решения.

Предварительные сведения

I. Пусть задана $\{A_1, A_2\}$ – коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, а также линейный ограниченный оператор φ: $H \to E$.

Совокупность

$$\Delta = \left(\{A_1, A_2\}; H; \varphi; E; \{\sigma_1, \sigma_2\}; \{\gamma^-\}; \{\gamma^+\}\right), \tag{1}$$

где $\{\sigma_k\}_1^2$, $\{\gamma^\pm\}$ – самосопряженные операторы в E, называется коммутативным узлом [3], если:

$$\begin{array}{ll} 1. & [A_1, A_2] = 0; \\ 2. & A_k - A_k^* = i\varphi^*\sigma_k\varphi; \quad \sigma_k = \sigma_k^*; \quad k = 1,\, 2; \\ 3. & \sigma_1\varphi A_2^* - \sigma_2\varphi A_1^* = \gamma^-\varphi; \\ 4. & \gamma^+ = \gamma^- + (\sigma_1\varphi\varphi^*\sigma_2 - \sigma_2\varphi\varphi^*\sigma_1). \end{array} \tag{2}$$

Нетрудно показать [3], что любая коммутативная система ограниченных линейных операторов $\{A_k\}_1^2$ может быть включена в узел.

Открытая система [3], ассоциированная с коммутативным узлом Δ (1), имеет вид

$$R: \left\{ \begin{array}{c} i\partial_k h(t) + A_k h(t) = \varphi^*\sigma_k u(t); \\ 1 \le k \le 2; \quad h(0) = h_0; \end{array} \right. \tag{3}$$

$$S: \quad v(t) = u(t) + i\varphi h(t); \tag{4}$$

где дифференциальные операторы $\{\partial_k\}_1^2$ имеют вид $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial t_k}$, $0 = (0,0)$, а $h(t)$ и $u(t)$, $v(t)$ – вектор-функции из H и E соответственно, $t = (t_1, t_2)$.

Совместность системы уравнений (3) приводит к уравнению [2]:

$$\left\{\sigma_1 i\partial_2 - \sigma_2 i\partial_1 + \gamma^-\right\} u(x) = 0. \tag{5}$$

Легко показать, что если имеет место (5), а $h(t)$ является решением системы (3), то $v(t)$ (4) удовлетворяет уравнению:

$$\left\{\sigma_1 i\partial_2 - \sigma_2 i\partial_1 + \gamma^+\right\} v(x) = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим коммутативный узел (1) когда $\dim E = r < \infty$, причем σ_1 обратим.

Характеристическая матрица-функция $S(\lambda_1)$ [2] оператора A_1 в ортонормированном базисе $\{e_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1,r}$ из E в случае вещественного спектра оператора A_1 и $\sigma_1 = J$ $(J = J^* = J^{-1})$ имеет вид:

$$S(\lambda_1) = S_l(\lambda_1); \quad S_x(\lambda) = \int\limits_0^{\overset{\frown}{x}} \exp\left\{\frac{iJa_t dt}{\lambda - \alpha_t}\right\}, \tag{7}$$

где α_t - вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0,l]$ $(0 < l < \infty)$, а матрица $a_t \geq 0$ размера $[r \times r]$ такая, что $\operatorname{tr} a_t \equiv 1$.

Из коммутативности $[A_1, A_2] = 0$ следует, что характеристическая функция $S(\lambda_1)$ удовлетворяет условию сплетаемости [2]:

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-\right) JS(\lambda_1) = S(\lambda_1)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J. \tag{8}$$

Задача продолжения условия сплетаемости (8) вдоль цепочки инвариантных подпространств оператора A_1, которой отвечает мультипликативное представление $S_x(\lambda)$ (7), приводит к соотношению:

$$\left(\sigma_2\lambda + \gamma^-(x)\right) JS_x(\lambda) = S_x(\lambda)\left(\sigma_2\lambda + \gamma^+\right) J \quad (\forall x \in [0,l]). \tag{9}$$

В работе [2] показано, что для того, чтобы выполнялось условие сплетаемости (9), необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{d}{dx}\gamma(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_k J\right]; \quad \gamma(0) = \gamma^+; \\ 2. & \left[Ja(x), \left(\sigma_k\alpha_x + \gamma(x)\right) J\right] = 0. \end{array} \tag{10}$$

Решение этой системы $\gamma(x)$ используется при построении треугольных моделей коммутативных систем операторов [3]. Целью данной работы является исследование и описание решений системы уравнений (10).

§1. Решение системы уравнений (10), когда $r = 2$, $J = I$

II. Изучим вопрос о разрешимости системы уравнений (10) в случае, когда

$$\dim E = 2, \text{ а } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha_x = 0$, причем σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и γ^+ имеют вид

$$\begin{array}{c} \sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} b(x) & c(x) \\ \overline{c}(x) & 1 - b(x) \end{pmatrix}, \\ \gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x) & \gamma_{12}(x) \\ \overline{\gamma_{12}}(x) & \gamma_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \gamma^+ = \begin{pmatrix} \overline{\gamma_{11}^+} & \gamma_{12}^+ \\ \gamma_{12}^+ & \gamma_{22}^+ \end{pmatrix}, \end{array} \tag{11}$$

где ξ, $\eta \in \mathbb{R}$; $b(x) \in \mathbb{R}$ $(0 \le b(x) \le 1)$, $c(x) \in \mathbb{C}$, $\gamma_{11}(x)$, $\gamma_{22}(x) \in \mathbb{R}$, $\gamma_{12}(x) \in \mathbb{C}$ для всех $x \in [0,l]$; тогда система уравнений (10) будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma'(x) = i\,[a(x), \sigma_2]\,; \\ {[a(x), \gamma(x)]} = 0, \quad \gamma(x) = \gamma^+. \end{array} \right. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть σ_2, $a(x) \ge 0$, $\gamma(x)$ и γ^+ имеют вид (11). Тогда при $b(x) \neq \dfrac{1}{2}$, для $\forall x \in [0,l]$ и $\left|\dfrac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+}\right|^2 \le \dfrac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2}$ всегда существует единственное решение системы (12), причем*

$$\gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+, \quad \gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^+ e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+} \int\limits_0^x (1-2b(t))dt},$$

а

$$c(x) = (1-2b(x))\frac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+} e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+} \int\limits_0^x (1-2b(t))dt};$$

если $b(x) = \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in [0,l]$, то $c(x) = 0$, $\gamma(x) = \gamma^+$.

Доказательство.

Из первого соотношения системы (12) получим

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}'(x) & \gamma_{12}'(x) \\ \overline{\gamma_{12}'}(x) & \gamma_{22}'(x) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & (\eta-\xi)c(x) \\ (\xi-\eta)\overline{c}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приходим к тому, что

$$\begin{array}{l} 1.\, \gamma_{11}'(x) = \gamma_{22}'(x) = 0, \ \text{значит}, \gamma_{11}, \gamma_{22} \text{ — константы}, \\ \ \text{а именно}, \gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+, \ \ \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+; \\ 2.\, \gamma_{12}'(x) = i(\eta-\xi)c(x)\,(\gamma_{21}'(x) = i(\xi-\eta)\overline{c}(x)). \end{array} \tag{13}$$

Аналогично, из второго уравнения системы (12) вытекает:

$$\begin{pmatrix} c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) & \begin{array}{r} c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) + 2\gamma_{12}(x)b(x) - \\ -\gamma_{12}(x) \end{array} \\ \begin{array}{r} \overline{c}(x)\left(\gamma_{11}^+ - \gamma_{22}^+\right) - 2b(x)\overline{\gamma_{12}}(x) + \\ +\overline{\gamma_{12}}(x) \end{array} & \overline{c}(x)\gamma_{12}(x) - \overline{\gamma_{12}}(x)c(x) \end{pmatrix} = 0.$$

То есть:

$$\begin{array}{l} 1. \quad c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}\overline{c}(x) = 0; \\ 2. \quad c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) + (2b(x)-1)\gamma_{12}(x) = 0. \end{array} \tag{14}$$

Первое условие в (14) означает, что $c(x)\overline{\gamma_{12}}(x)$ – вещественная функция для $\forall x \in [0,l]$. Итак, приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{12}' = i(\eta-\xi)c(x); \\ c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) + (2b(x)-1)\gamma_{12}(x) = 0. \end{array} \right. \tag{15}$$

Предположим, что $b_x \neq \dfrac{1}{2}$. Если $\gamma_{22}^{+} = \gamma_{11}^{+}$, то $\gamma_{12}(x) = 0$. Исключая этот тривиальный случай, выразим $\gamma_{12}(x)$ из второго соотношения (15)

$$\gamma_{12}(x) = \frac{c(x)\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)}{1 - 2b(x)} \tag{16}$$

и, подставив в первое, получим:

$$\left(\frac{c(x)\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)}{1 - 2b(x)}\right)' = i(\eta - \xi)c(x).$$

Введем обозначение:

$$y(x) = \frac{c(x)}{1 - 2b(x)},$$

тогда, используя первое условие (13), будем иметь

$$y'(x)\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right) = i(\eta - \xi)y(x)(1 - 2b(x)).$$

Решение имеет вид:

$$y(x) = Ae^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt}, \tag{17}$$

где A - $const$. Так как (16), то

$$\gamma_{12}(x) = \left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right) y(x),$$

учитывая начальное условие $\gamma(0) = \gamma^{+}$, находим, что

$$A = \frac{\gamma_{12}^{+}}{\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}}.$$

Следовательно,

$$y(x) = \frac{\gamma_{12}^{+}}{\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}} e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt};$$

$$\gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^{+} \cdot e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt};$$

$$\frac{c(x)}{1 - 2b(x)} = \frac{\gamma_{12}^{+}}{\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}} e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt};$$

$$c(x) = (1 - 2b(x))\frac{\gamma_{12}^{+}}{\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}} e^{\frac{i(\eta-\xi)}{\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}}\int\limits_0^x (1-2b(t))dt}.$$

Первое условие в (14) выполняется автоматически. Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x) \geq 0$) следует, что

$$b(x)(1 - b(x)) - |c(x)|^2 \geq 0. \tag{18}$$

Тогда

$$b(x)(1-b(x)) - \left|\frac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+}\right|^2 (1-2b(x))^2 \geq 0,$$

значит,

$$\left|\frac{\gamma_{12}^+}{\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+}\right|^2 \leq \frac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2}. \tag{19}$$

Таким образом, условие неотрицательности (18) матрицы $a(x)$ имеет вид (19).

Рассмотрим случай $b(x) = \dfrac{1}{2}$. Получим, что $c(x) = 0$, γ_{12} — *const*, и поэтому $\gamma(x) = \gamma^+(11)$.

Замечание 1. Выбор $\sigma_2(11)$ в диагональной форме не ограничивает общности, так как $J = I$.

III. Пусть $\alpha_x \neq 0$, α_x — вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0,l]$, $0 < l < \infty$, $J = I$, причем σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$, γ^+ заданы формулами (11). В этом случае система (10) имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma'(x) = i\,[a(x), \sigma_2]\,; \\ [a(x), (\sigma_2\alpha_x + \gamma(x))] = 0, \quad \gamma(x) = \gamma^+. \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и γ^+ имеют вид (11), тогда при $b(x) \neq \dfrac{1}{2}$, для $\forall x \in [0,l]$ и $\left|\dfrac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}\right|^2 \leq \dfrac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2}$ всегда существует единственное решение системы (20), причем*

$$\gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+, \quad \gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^+ e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha_t(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt},$$

а

$$c(x) = (1-2b(x))\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)} e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha_t(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt};$$

если $b(x) = \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in [0,l]$, то $c(x) = 0$, $\gamma(x) = \gamma^+$.

Доказательство.

Соотношения (13), полученные из первого условия системы (20), не изменятся, а именно, $\gamma_{11}(x) = \gamma_{11}^+$, $\gamma_{22}(x) = \gamma_{22}^+$ и $\gamma_{12}'(x) = i(\eta-\xi)c(x)$. Перейдем ко второму соотношению (20), которое примет вид:

$$\begin{pmatrix} c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) & \begin{gathered}(2b(x)-1)\gamma_{12}(x) + (\eta-\xi)\times \\ \times\alpha_x c(x) + c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)\end{gathered} \\ \begin{gathered}(1-2b(x))\overline{\gamma_{12}}(x) + (\xi-\eta)\alpha_x\overline{c}(x) + \\ +\overline{c}(x)\left(\gamma_{11}^+ - \gamma_{22}^+\right)\end{gathered} & \overline{c}(x)\gamma_{12}(x) - \overline{\gamma_{12}}(x)c(x) \end{pmatrix} = 0.$$

То есть:

$$\begin{array}{ll} 1. & c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) = 0; \\ 2. & (2b(x)-1)\gamma_{12}(x) + (\eta-\xi)\alpha_x c(x) + c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) = 0. \end{array} \tag{21}$$

Из первого уравнения в (21) следует, что $c(x)\overline{\gamma_{12}}$ — вещественная функция $\forall x \in [0,l]$. Предположим, что $b_x \neq \frac{1}{2}$. Если $\gamma_{22}^+ = \gamma_{11}^+$, то $\gamma_{12}(x) = 0$. Исключая этот тривиальный случай, выразим $\gamma_{12}(x)$ из второго уравнения (21)

$$(2b(x)-1)\gamma_{12}(x) + (\eta-\xi)\alpha_x c(x) + c(x)\left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) = 0,$$

тогда

$$\gamma_{12}(x) = \frac{c(x)\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}{(1-2b(x))}, \tag{22}$$

$$c(x) = \frac{\gamma_{12}(x)(1-2b(x))}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}. \tag{23}$$

Пусть

$$y(x) = \frac{(1-2b(x))}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}(\eta-\xi). \tag{24}$$

Тогда второе уравнение в (13) примет вид:

$$\gamma_{12}'(x) = iy(x)\gamma_{12}(x),$$

значит

$$\gamma_{12}(x) = Ae^{i\int\limits_0^x y(t)dt},$$

где A — $const$, то есть

$$\gamma_{12}(x) = Ae^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha_t(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt}, \tag{25}$$

где A — $const$. Учитывая начальные условия $\gamma(0) = \gamma^+$, находим, что

$$A = \gamma_{12}^+;$$

$$\gamma_{12}(x) = \gamma_{12}^+ e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha_t(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt}. \tag{26}$$

Функция $c(x)$ в (23) примет вид:

$$c(x) = (1-2b(x))\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}e^{i(\eta-\xi)\int\limits_0^x \frac{(1-2b(t))}{\left(\alpha_t(\eta-\xi)+\gamma_{22}^+-\gamma_{11}^+\right)}dt}.$$

Первое условие в (21) выполняется автоматически. Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x) \geq 0$) следует (18), тогда

$$\left|\frac{\gamma_{12}^+}{\left(\alpha_x(\eta-\xi) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)}\right|^2 \leq \frac{b(x)(1-b(x))}{(1-2b(x))^2}, \tag{27}$$

что и утверждается в теореме.
В случае $b(x) = \dfrac{1}{2}$ получим, что $c(x) = 0$, γ_{12} — $const$ и поэтому $\gamma(x) = \gamma^+(11)$.

§2. Решение системы уравнений (10), когда $r = 2$, $J \neq I$

IV. Исследуем систему уравнений (10) в случае, когда

$$\dim E = 2, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Пусть $\alpha_x = 0$, причем σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$, γ^+ имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma_2 = \begin{pmatrix} \xi & \zeta \\ \overline{\zeta} & \eta \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} b(x) & c(x) \\ \overline{c}(x) & 1 - b(x) \end{pmatrix}, \\ \gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x) & \gamma_{12}(x) \\ \overline{\gamma_{12}(x)} & \gamma_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \gamma^+ = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^+ & \gamma_{12}^+ \\ \overline{\gamma_{12}^+} & \gamma_{22}^+ \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{29}$$

где ξ, $\eta \in \mathbb{R}$; $b(x) \in \mathbb{R}$ $(0 \leq b(x) \leq 1)$, $c(x) \in \mathbb{C}$, $\gamma_{11}(x)$, $\gamma_{22}(x) \in \mathbb{R}$, $\gamma_{12}(x) \in \mathbb{C}$ для всех $x \in [0, l]$, тогда система (10) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \gamma'(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_2 J\right]; \\ \left[Ja(x), \gamma(x)J\right] = 0, \quad \gamma(0) = \gamma^+. \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 3. *Пусть σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и γ^+ имеют вид (29), а J, соответственно, — (28). Если для $\forall x \in [0, l]$ имеет место*

$$\frac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b_x\left(1 - b_x\right),$$

где $v(x)$ – произвольная вещественная функция, а

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^+ - \overline{\gamma_{12}^+}\zeta - 2i(\xi + \eta)\int\limits_0^x v(t)dt}{8i\int\limits_0^x v(t)dt + 2\left(\gamma_{22}^+ + \gamma_{11}^+\right)},$$

то всегда существует единственное решение системы (30),

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{22}^+,$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(4i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+ + \gamma_{22}^+\right),$$

при этом $c(x) = \dfrac{w(x)+iv(x)}{\overline{\zeta}}$.

Доказательство.

Из первого соотношения системы (30):

$$\gamma'(x)J = \begin{pmatrix} \gamma'_{11}(x) & -\gamma'_{12}(x) \\ \overline{\gamma'_{12}}(x) & -\gamma'_{22}(x) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} c(x)\overline{\zeta} - \zeta\overline{c}(x) & -c(x)(\eta+\xi) - \zeta \\ -\overline{c}(x)(\xi+\eta) - \overline{\zeta} & \overline{c}(x)\zeta - \overline{\zeta}c(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к уравнениям:

$$\gamma'_{11}(x) = \gamma'_{22}(x) = i\left(c(x)\overline{\zeta} - \zeta\overline{c}(x)\right); \tag{31}$$

$$\gamma'_{12}(x) = i(c(x)(\eta+\xi)+\zeta). \tag{32}$$

Из условия (31) следует, что $\gamma_{11}(x)$ и $\gamma_{22}(x)$ отличаются на константу, которую можно определить из начальных условий, а именно:

$$\gamma_{22}(x) = \gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}.$$

Второе условие в (30) дает:

$$[Ja(x), \gamma(x)J] =$$

$$= \begin{pmatrix} c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) & -c(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right) - \gamma_{12}(x) \\ -\overline{c}(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right) - \overline{\gamma_{12}}(x) & \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) - c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Получим соотношения:

$$c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) = 0, \text{ то есть } c(x)\overline{\gamma_{12}} \text{ — вещественная функция.} \tag{33}$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right). \tag{34}$$

Соотношение (33) выполняется автоматически. Действительно, если $\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right)$, то $\overline{\gamma_{12}}(x) = -\overline{c}(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right)$, подставим в (33) и получим:

$$c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - \gamma_{12}(x)\overline{c}(x) = -c(x)\overline{c}(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right) -$$

$$-\left(c(x)\left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right)\right)\overline{c}(x) = \left(\gamma_{11}(x)+\gamma_{22}(x)\right)\left(-c(x)\overline{c}(x) + c(x)\overline{c}(x)\right) = 0.$$

Рассмотрим (32)

$$\gamma'_{12}(x) = i(c(x)(\xi+\eta)+\zeta),$$

запишем сопряженное ему уравнение

$$\overline{\gamma'_{12}}(x) = -i\left(\overline{c}(x)(\xi+\eta) + \overline{\zeta}\right). \tag{35}$$

Умножим (32) на $\overline{\zeta}$, а (35) на ζ и сложим полученные уравнения,

$$\overline{\zeta}\gamma'_{12}(x) + \overline{\gamma'_{12}}(x)\zeta = i(\xi+\eta)\left(c(x)\overline{\zeta} - \overline{c}(x)\zeta\right).$$

В соответствии с (31), получим, что

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}'(x) + \overline{\gamma_{12}'}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}'(x).$$

Проинтегрировав это равенство, приходим к сотношению

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1, \tag{36}$$

где A_1 — постоянная, причем

$$A_1 = \overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} + \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - (\xi+\eta)\gamma_{11}^{+}.$$

Воспользуемся (34), получим

$$\begin{gathered}-\overline{\zeta}c(x)\left(2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right) - \overline{c}(x)\left(2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)\zeta = \\ = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + +\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} + \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - (\xi+\eta)\gamma_{11}^{+};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\gamma_{11}(x)\left[(\xi+\eta) + 2\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right)\right] + \left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + \\ +\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} + \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - (\xi+\eta)\gamma_{11}^{+} = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Заметим, что $2\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right) = c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta$, а $2\operatorname{Im}\left(c(x)\overline{\zeta}\right) = c(x)\overline{\zeta} - \overline{c}(x)\zeta$, тогда

$$\begin{cases} \gamma_{11}'(x) = 2i\operatorname{Im}\left(c(x)\overline{\zeta}\right); \\ \gamma_{11}(x)\left[(\xi+\eta) + 4\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)\right] + 2\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right) + A_1 = 0. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$c(x)\overline{\zeta} = w(x) + iv(x), \tag{38}$$

полученная система примет вид:

$$\begin{cases} \gamma_{11}'(x) = 2iv(x); \\ \gamma_{11}(x)[\xi+\eta+4w(x)] + 2\left(\gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)w(x) + A_1 = 0. \end{cases} \tag{39}$$

Из первого уравнения системы (39) находим

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int_0^x v(t)dt + A_2,$$

где A_2 — постоянная, причем $A_2 = \gamma_{11}^{+}$, то есть

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^{+}. \tag{40}$$

Из второго уравнения системы (39) определим

$$w(x) = \frac{-A_1 - \gamma_{11}(x)(\xi+\eta)}{2\left(2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^{+} - \gamma_{11}^{+}\right)},$$

подставим (40), получим

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} - \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - 2i(\xi+\eta)\int\limits_{0}^{x} v(t)dt}{8i\int\limits_{0}^{x} v(t)dt + 2\left(\gamma_{22}^{+} + \gamma_{11}^{+}\right)}. \tag{41}$$

Согласно (38), имеем

$$c(x) = \frac{w(x) + iv(x)}{\overline{\zeta}}.$$

Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x) \geq 0$) следует (18), тогда

$$\left|\frac{w(x) + iv(x)}{\overline{\zeta}}\right|^2 \leq b_x\left(1 - b_x\right),$$

$$\frac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b_x\left(1 - b_x\right). \tag{42}$$

Таким образом, условие неотрицательности (18) матрицы $a(x)$ имеет вид (42).

V. Пусть $\alpha_x \neq 0$, α_x — вещественная неубывающая ограниченная функция на $[0, l]$, $0 < l < \infty$, причем σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ имеют вид (29), а J — (28).

В этом случае система (30) имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{c} \gamma'(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_2 J\right]; \\ \left[Ja(x), \left(\sigma_2\alpha_x + \gamma(x)\right)J\right] = 0, \gamma(0) = \gamma^{+}. \end{array}\right. \tag{43}$$

Теорема 4. *Пусть σ_2, $a(x) \geq 0$, $\gamma(x)$ и γ^{+} имеют вид (29), а J, соответственно, — (28). Если для $\forall x \in [0, l]$ имеет место*

$$\frac{|w(x)|^2 + |v(x)|^2}{|\zeta|^2} \leq b_x\left(1 - b_x\right),$$

где $v(x)$ – произвольная вещественная функция, а

$$w(x) = \frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+} - \overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta - 2i(\xi+\eta)\int\limits_{0}^{x} v(t)dt - 2|\zeta|^2\alpha_x}{8i\int\limits_{0}^{x} v(t)dt + 2\left(\alpha_x(\xi+\eta) + \gamma_{22}^{+} + \gamma_{11}^{+}\right)},$$

то всегда существует единственное решение системы (43)

$$\gamma_{11}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+, \quad \gamma_{22}(x) = 2i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{22}^+,$$

$$\gamma_{12}(x) = -c(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + 4i\int\limits_0^x v(t)dt + \gamma_{11}^+ + \gamma_{22}^+\right) - \zeta\alpha_x,$$

при этом $c(x) = \dfrac{w(x)+iv(x)}{\overline{\zeta}}$.

Доказательство.

Соотношения (31), (32), полученные из первого условия (30), не изменятся. Из второго условия системы (43) имеем:

$$[Ja(x), (\sigma_2\alpha_x + \gamma(x))\, J] =$$

$$= \begin{pmatrix} c(x)\overline{\zeta}\alpha_x + c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) - & -c(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + \gamma_{11}(x) + \right. \\ -\gamma_{12}(x)\overline{c}(x) - \overline{c}(x)\zeta\alpha_x & \left. +\gamma_{22}(x)\right) - \zeta\alpha_x - \gamma_{12}(x) \\ -\overline{c}(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + \gamma_{11}(x) + \right. & -c(x)\overline{\zeta}\alpha_x - c(x)\overline{\gamma_{12}}(x) + \\ \left. +\gamma_{22}(x)\right) - \overline{\zeta}\alpha_x - \overline{\gamma_{12}}(x) & +\gamma_{12}(x)\overline{c}(x) + \overline{c}(x)\zeta\alpha_x \end{pmatrix} = 0.$$

Получим соотношения:

$$c(x)\left(\overline{\zeta}\alpha_x + \overline{\gamma_{12}}(x)\right) = \overline{c}(x)\left(\gamma_{12}(x) + \zeta\alpha_x\right), \tag{44}$$

то есть $c(x)\left(\overline{\zeta}\alpha_x + \overline{\gamma_{12}}(x)\right)$ — вещественная функция, что легко проверить;

$$\overline{\gamma_{12}}(x) = -\overline{c}(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \overline{\zeta}\alpha_x. \tag{45}$$

Воспользуемся равенствами (36) и (45):

$$\overline{\zeta}\gamma_{12}(x) + \overline{\gamma_{12}}(x)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1,$$

где A_1 — постоянная, причем

$$A_1 = \overline{\zeta}\gamma_{12}^+ + \overline{\gamma_{12}^+}\zeta - (\xi+\eta)\gamma_{11}^+,$$

получим

$$\begin{gathered} -\overline{\zeta}\left(c(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \zeta\alpha_x\right) + \\ + \left(-\overline{c}(x)\left(\alpha_x(\xi+\eta) + 2\gamma_{11}(x) + \gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right) - \overline{\zeta}\alpha_x(x)\right)\zeta = (\xi+\eta)\gamma_{11}(x) + A_1; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} A_1 + \alpha_x(\xi+\eta)\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + \gamma_{11}(x)\left(2\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + \xi + \eta\right) + \\ + \left(\gamma_{22}^+ - \gamma_{11}^+\right)\left(c(x)\overline{\zeta} + \overline{c}(x)\zeta\right) + 2|\zeta|^2\alpha_x = 0. \end{gathered}$$

Заметим, что $2\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)=c(x)\overline{\zeta}+\overline{c}(x)\zeta$, а $2\operatorname{Im}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)=c(x)\overline{\zeta}-\overline{c}(x)\zeta$, тогда

$$\left\{\begin{array}{c}\gamma_{11}'(x)=2i\operatorname{Im}\left(c(x)\overline{\zeta}\right);\\ 2\alpha_x(\xi+\eta)\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)+\gamma_{11}(x)\left(4\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)+\xi+\eta\right)+\\ +2\left(\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}\right)\operatorname{Re}\left(c(x)\overline{\zeta}\right)+2|\zeta|^2\alpha_x+A_1=0.\end{array}\right.$$

Используя обозначения (38), получим

$$\left\{\begin{array}{c}\gamma_{11}'(x)=2iv(x);\\ 2\alpha_x(\xi+\eta)w(x)+\gamma_{11}(x)(4w(x)+\xi+\eta)+2\left(\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}\right)w(x)+\\ +2|\zeta|^2\alpha_x+A_1=0.\end{array}\right. \tag{46}$$

Из первого условия в (46) находим

$$\gamma_{11}(x)=2i\int\limits_0^x v(t)dt+A_2,$$

где A_2 — постоянная, причем $A_2=\gamma_{11}^{+}$, то есть

$$\gamma_{11}(x)=2i\int\limits_0^x v(t)dt+\gamma_{11}^{+}. \tag{47}$$

Из второго условия в (46) определим

$$w(x)=\frac{-A_1-\gamma_{11}(x)(\xi+\eta)-2|\zeta|^2\alpha_x}{2\left(2\gamma_{11}(x)+\alpha_x(\xi+\eta)+\gamma_{22}^{+}-\gamma_{11}^{+}\right)},$$

подставим (47), получим

$$w(x)=\frac{-\overline{\zeta}\gamma_{12}^{+}-\overline{\gamma_{12}^{+}}\zeta-2i(\xi+\eta)\int\limits_0^x v(t)dt-2|\zeta|^2\alpha_x}{8i\int\limits_0^x v(t)dt+2\left(\alpha_x(\xi+\eta)+\gamma_{22}^{+}+\gamma_{11}^{+}\right)}. \tag{48}$$

Согласно (38), имеем

$$c(x)=\frac{w(x)+iv(x)}{\overline{\zeta}}.$$

Из неотрицательности матрицы $a(x)$ ($a(x)\geq 0$) следует (18), тогда

$$\left|\frac{w(x)+iv(x)}{\overline{\zeta}}\right|^2\leq b_x\left(1-b_x\right),$$

$$\frac{|w(x)|^2+|v(x)|^2}{|\zeta|^2}\leq b_x\left(1-b_x\right). \tag{49}$$

Таким образом, условие неотрицательности (18) матрицы $a(x)$ имеет вид (42).

Итак, в случае $\dim E = 2$ описаны все решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma'(x)J = i\left[Ja(x), \sigma_2 J\right]; \\ \left[Ja(x), \left(\sigma_2\alpha_x + \gamma(x)\right)J\right] = 0; \end{array} \right. \qquad \gamma(0) = \gamma^+$$

и предъявлен их вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003. — 342 с.

2. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб., – 1990. Т. 181. – **7**. – С. 965-994.

3. Золотарев В. А. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций и функцион. анализ, и их прил. Харьков: Респ. сб., – 1983. – Вып. 40. – С. 68-71.

4. Золотарев В. А. Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов. — Рукопись депонирована в ВИНИТИ РЖ "Математика"1Б916 деп, 1981. – 66 с.

5. Золотарев В.А. Модельные представления систем самосопряженных операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям // Математический сборник, – 2010. Т. 201. – **10**. – С. 59-92.

6. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

Статья получена: 10.02.2012; окончательный вариант: 23.04.2012; принята: 13.09.2012.