Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.984 № 1018, 2012, с.41–61

# Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным

В. Н. Сыровацкий

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
*пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина*

Для коммутативной системы линейных ограниченных операторов $T_1, T_2$, которые действуют в гильбертовом пространстве $H$ и ни один из операторов $T_1, T_2$ не является сжатием, построена функциональная модель. Эта модель строится в пространстве Л. де Бранжа для круга.
Ключевые слова: Оператор, функциональная модель.

Сироватський В. Н., **Функціональні моделі комутативних систем операторів близьких до унітарних.** Для комутативної системи лінійних обмежених операторів $T_1, T_2$, які діють в Гільбертовому просторі $H$, і не один з операторів $T_1, T_2$ не є стискуванням, побудована функціональна модель. Ця модель строєтся в просторі Л. де Бранжа для круга.
Ключові слова: Оператор, функціональна модель.

Sirovatsky V. N., **Functional models of commutative systems of operators close to unitary.** For commutative system of the linear limited operators $T_1, T_2$ which operate in Hilbert space $H$, and not one of operators $T_1, T_2$ is compression, the functional model is constructed. This model is build in space of Louis De Branges for a circle.
Keywords: Operator, functional model.

*2000 Mathematics Subject Classification* 47B32.

Функциональная модель оператора сжатия $T$, который действует в гильбертовом пространстве $H$ была впервые получена Б.С-Надем и Ч.Фояшем [5]. Данная модель позволяет реализовать оператор $T$ как оператор умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций [5,2]. Изучение спектральных характеристик этой модели привело к ряду нетривиальных задач как функционального анализа так и теории функции, среди которых: вопросы интерполяции, задачи базисности и полноты и др. [2].

Если использовать технику дилатаций Надя-Фояша [5], то построение аналогичных функциональных моделей для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$ заданных в гильбертовом пространстве $H$ наталкивалось на существенные трудности. На этом пути не удалось решить поставленную выше задачу даже в случае сжимаемости $T_1$ и $T_2$. Выход из этой ситуации был найден в работе [7], которая базируется на обобщении понятия узла для коммутативных систем операторов и по сути была высказана М. С. Лившицем.

В работе [8] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда один из них является сжатием. Эти построения основаны на технике преобразований Фурье. Если же ни один из операторов $\{T_1, T_2\}$ не является сжатием данный метод применим быть не может. В данной работе построены функциональные модели для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$ причём ни $T_1$ ни $T_2$ не является сжимающими. В этом случае функциональная модель строится в пространстве Л. де Бранжа для единичного круга, которое было получено в работе [6].

## §1. Предварительные сведения.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $H$. Совокупность

$$\triangle = \left(J; H \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; H \oplus \tilde{E}; \tilde{J}\right) \tag{1.1}$$

называется унитарным узлом [1-4, 9-10], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \tag{1.2}$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \qquad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

где $J$ и $\tilde{J}$ являются инволюциями в гильбертовых пространствах $E$ и $\tilde{E}$ соответственно, $J = J^* = J^{-1}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$. Любой ограниченный линейный оператор $T$ в $H$ всегда может быть включён в унитарный узел $\triangle$ (1.1). Для этого необходимо положить [2] $-E = \overline{D_{T^*}H}$, $\tilde{E} = \overline{D_T H}$, $\Psi = \sqrt{|D_T|}$, $\Phi = \sqrt{|D_{T^*}|}$, $J = signD_{T^*}$, $\tilde{J} = signD_T$, $K = -\tilde{J}T^*$, где, как обычно, $D_T = I - T^*T-$ дефектные операторы, отвечающие $T$, а $\sqrt{|A|}$ и $signA$ для самосопряжённого оператора $A$ следует понимать в смысле соответствующих спектральных разложений.

Узел $\triangle$ (1.1) называется простым [9], если $H = H_1$, где

$$H_1 = span\{T^n \Phi f + T^{*m} \Psi^* g; \;\; f \in E; \;\; g \in \tilde{E}; \;\; n, m \in \mathbb{Z}_+\} \tag{1.4}$$

Подпространства $H_1$ и $H_0 = H_1^\perp = H \ominus H_1$ приводят оператор $T$, причём, сужение $T$ на $H_0$ является унитарным оператором [2].

Основным инвариантом узла $\triangle$ (1), описывающим простые узлы, является, введенная ещё в 1946 году [1] М.С. Лившицем, характеристическая оператор-функция

$$S_{\triangle} = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi, \tag{1.5}$$

которая играет основную роль в теории треугольных [2] и функциональных моделей [4,5,9,10] для операторов близких к унитарным (в смысле определения (1.1)).

Предположим, что $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$ и $J = \tilde{J}$. Выберем в $E$ и $\tilde{E}$ ортонормированные базисы $\{e_\alpha\}_1^r$ и $\{e'_\alpha\}_1^r$. Тогда из результатов В.П. Потапова [2] следует, что матрица-функция $S_{\triangle}(z) = \| < S_{\triangle}(z)e_\alpha, e_\beta^{'} > \|$, в случае, когда спектр $\sigma(T)$ оператора $T$ принадлежит единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, имеет следующую мультипликативную структуру

$$S_{\triangle}(z) = \int_0^{\overleftarrow{l}} \exp\left\{\frac{e^{\imath\varphi_t} + z}{e^{\imath\varphi_t} - z} J\, dF_t\right\}, \tag{1.6}$$

где $\varphi_t$ – неотрицательная неубывающая на [0,l] функция $0 \le \varphi_t \le 2\pi$; а $F_t$ – неубывающая эрмитовая $(r \times r)$ матрица-функция на [0,l], для которой $trF_t \equiv t$.

Используя представление В.П.Потапова (1.6) для $S_{\triangle}(z)$ (5) нетрудно построить [2] треугольную модель оператора T. Обозначим через $L^2_{r,l}(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций

$$L^2_{r,l}(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x)); \int_0^l f(x)\, dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \tag{1.7}$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.7) линейные операторы $T_1$ и $T_2$

$$Tf(x) = f(x)e^{\imath\varphi_x} - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{\imath\varphi_x}, \tag{1.8}$$

где матрица $\Phi_x$ является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t\, dF_t J = I, \qquad x \in [0, l]. \tag{1.9}$$

Рассмотрим также матрицу-функцию $\Psi_x$

$$\Psi_x + \int_x^l \Psi_t\, dF_t J = J, \qquad x \in [0, l]. \tag{1.10}$$

Определим теперь операторы $\Phi_c : E \mapsto L^2_{r,l}(F_x)$ и $\Psi_c : L^2_{r,l}(F_x) \mapsto E$ (здесь $E = \mathbb{C}^n$) следующим образом,

$$\Phi_c f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{\imath\varphi_x}, \qquad \Psi_c f(x) = \sqrt{2}\int\limits_0^l f(x)\, dF_x \Phi_x^*, \tag{1.11}$$

где $f \in E$. И пусть $K_c = S_\triangle(\infty)$ (1.6). Совокупность

$$\triangle_c = (J; L^2_{r,l}(F_x) \oplus E; V_c = \begin{bmatrix} T_c & \Phi_c \\ \Psi_c & K_c \end{bmatrix}; L^2_{r,l}(F_x) \oplus E; J) \tag{1.12}$$

является унитарным узлом (1.1)-(1.3) и называется треугольной моделью простого узла $\triangle$ (1.1), где $L^2_{r,l}(F_x)$, $T_c$, $\Phi_c$, $\Psi_c$ - имеют вид (1.7), (1.8), (1.11). Последнее означает, что простые компоненты (1.4) у узлов $\triangle$ (1.1) и $\triangle_c$ (1.12), в случае, когда спектр оператора $T$ лежит на единичной окружности $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$, унитарно-эквивалентны [2], конечно при условии $J = \tilde{J}$ и $dim E = dim \tilde{E} = r < \infty$.
Предположим, что $dim E = 2$, а $J = J_N$, где

$$J_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Следуя работе [6], введём вектор-функции:

$$L_x(z) = (1 - zT)^{-1}\Phi(1,1), \tag{1.14}$$

$$\widetilde{L}_x(z) = (1 - zT^*)^{-1}\Psi^*(1,-1). \tag{1.15}$$

**Определение 1.** Гильбертовым пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E,G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, где $F_k(z)$, $(k = 1,2)$ имеют вид

$$F_1(z) = \int\limits_0^l f(t)\, dF_t L_t^*(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int\limits_0^l f(t)\, dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}). \tag{1.16}$$

И пусть $\mathcal{B}_\phi$ – отображение Л. де Бранжа

$$\mathcal{B}_\phi f = [F_1(z), F_2(z)]. \tag{1.17}$$

Скалярное произведение в $\mathcal{B}(E,G)$ индуцируется прообразом отображения $\mathcal{B}_\varphi$ (1.17):

$$< F(z), \hat{F}(z) >_{\mathcal{B}_\varphi(E,G)} = < f(t), \hat{f}(t) >_{L^2_{2,l}(F_t)}, \tag{1.18}$$

причём $F(z) = \mathcal{B}_\varphi f(t)$, $\hat{F}(z) = \mathcal{B}_\varphi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.

Пусть $T_1, T_2$ – коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве $H$. Совокупность гильбертовых пространств $E, \tilde{E}$ и операторов $\Phi \in [E,H]$, $\Psi \in [H,\tilde{E}]$, $K \in [E,\tilde{E}]$, $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma \in [E,E]$, $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma} \in [\tilde{E},\tilde{E}]$ $(s=1,2)$ назовём коммутативным унитарным метрическим узлом $\triangle$

$$\triangle = (\Gamma, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, \overset{+}{V}_s, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}), \qquad (1.19)$$

если для расширений

$$V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}, \qquad \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$$

справедливы следующие соотношения:

1) $V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}$, $\qquad \overset{+}{V}{}_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix}$,

2) $T_2 \Phi N_1 - T_1 \Phi N_2 = \Phi \Gamma$, $\tilde{N}_1 \Psi T_2 - \tilde{N}_2 \Psi T_1 = \tilde{\Gamma} \Psi$,

3) $\tilde{N}_2 \Psi \Phi N_1 - \tilde{N}_1 \Psi \Phi N_2 = K\Gamma - \tilde{\Gamma} K$, $KN_s = \tilde{N}_s K$ $(s=1,2)$,

где $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самосопряжены в $E(\tilde{E})$.
Операторы, действующие в пространствах $E$ и $\tilde{E}$ узла $\triangle$ (1.19), – зависимы. Произвольная коммутативная система линейных ограниченных операторов $T_1, T_2$ всегда может быть включена в узел $\triangle$ (1.19). В случае обратимости "дефектных" операторов $\sigma_1$ и $\tilde{\sigma}_1$ в $E$ и $\tilde{E}$ всегда можно считать, что $N_1$ и $\tilde{N}_1$ обратимы.

## §2. Действие операторов $T_1$ и $T_1^*$ на векторы $L_x$ и $\widetilde{L}_x$.

Пусть задан узел $\triangle$ (1.19), отвечающий коммутативной системе операторов $\{T_1, T_2\}$. Предположим, что $E = \tilde{E}$, $dim E = dim \tilde{E} = 2$, а $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$ (1.13). Обозначим также через $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$ вектор-функции (1.14),(1.15), которые отвечают оператору $T_1 (T = T_1)$.

1). **Лемма 1.** Оператор $T_1$ действует на вектор $L_x(z)$ (1.14) следующим образом

$$T_1 L_x(z) = \frac{L_x(z) - L_x(0)}{z}. \qquad (2.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (1) $z = 0$, получаем $\Phi(1,1) = L_x(0)$, тогда имеем:

$$(1 - zT_1) L_x(z) = L_x(0),$$

$$L_x(z) - L_x(0) = z T_1 L_x(z),$$

$$T_1 L_x(z) = \frac{L_x(z) - L_x(0)}{z}.$$

2). **Лемма 2.** Оператор $T_1$ действует на вектор $\widetilde{L}_x(z)$ (1.15) следующим образом

$$T_1\widetilde{L}_x(z) = z\widetilde{L}_x(z) + \frac{\widetilde{G}_l(z) - G_l(z)}{2}L_x(0) - \frac{\widetilde{G}_l(z) + G_l(z)}{2}\Phi(1,-1). \qquad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим:

$$T_1\widetilde{L}_x = T_1(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) = T_1\{zT_1^*(1-zT_1^*)^{-1} + I\}\Psi^*(1,-1) =$$

$$= z(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) - z(1 - T_1T_1^*)(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) + T_1\Psi^*(1,-1) =$$

$$= z(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) - z\Phi J\Phi^*(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) - \Phi JK^*(1,-1) =$$

$$= z(1 - zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) - \Phi JS^*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)(1,-1)$$

в силу узловых соотношений. Тогда

$$T_1\widetilde{L}_x(z) = z\widetilde{L}_x(z) - \Phi JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1). \qquad (2.3)$$

Введём ортопроекторы $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ на подпространство в $E^2$, порождаемое вектором $(1,1)$, и $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ на соответствующее подпространство $E^2$, отвечающее $(1,-1)$.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.3)

$$\Phi JS^*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)(1,-1) = \Phi(P+Q)JS^*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)(1,-1) =$$

$$= \Phi\{< JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),(1,1) > \frac{1}{2}(1,1) + < JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),(1,-1) > \frac{1}{2}(1,-1)\}$$

Так как $\Phi(1,1) = L_x(0)$ и $(1,-1)S^*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = (G_l(z), \widetilde{G}_l(z))$, то

$$\frac{1}{2}\left\{< JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),(1,1) >\right\}\Phi(1,1) = \frac{1}{2}\left\{< JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),(1,1) >\right\}L_x(0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,-1)S^*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}L_x(0) = \frac{1}{2}(G_l(z), \widetilde{G}_l(z))\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}L_x(0) =$$

$$= \frac{\widetilde{G}_l(z) - G_l(z)}{2}L_x(0)$$

и

$$\frac{1}{2}\{< JS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),(1,-1) >\}\Phi(1,-1) = \frac{1}{2}(1,-1)S^*(\frac{1}{\overline{z}})J\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Phi(1,-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(G_l(z), \widetilde{G}_l(z))\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\Phi(1,-1) =$$

$$= -\frac{\widetilde{G}_l(z) + G_l(z)}{2}\Phi(1,-1)$$

Тогда мы приходим к следующему выражению

$$T_1\widetilde{L}_x(z) = z\widetilde{L}_x(z) + \frac{\widetilde{G}_l(z) - G_l(z)}{2}L_x(0) - \frac{\widetilde{G}_l(z) + G_l(z)}{2}\Phi(1,-1)$$

3) **Лемма 3.** Оператор $T_1^*$ действует на вектор $\widetilde{L}_x(z)$ следующим образом

$$T_1^*\widetilde{L}_x(z) = \frac{\widetilde{L}_x(z) - \widetilde{L}_x(0)}{z}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (2) $z = 0$, получаем $\Psi(1,1) = \widetilde{L}_x(0)$. Тогда имеем

$$(1 - zT_1^*)\widetilde{L}_x(z) = \widetilde{L}_x(0),$$
$$\widetilde{L}_x(z) - \widetilde{L}_x(0) = zT_1^*\widetilde{L}_x(z),$$
$$T_1^*\widetilde{L}_x(z) = \frac{\widetilde{L}_x(z) - \widetilde{L}_x(0)}{z}.$$

4) **Лемма 4.** Оператор $T_1^*$ действует на вектор-функцию $L_x(z)$ следующим образом

$$T_1^*L_x(z) = zL_x(z) + \frac{E_0(z) - \widetilde{E}_0(z)}{2}\widetilde{L}_x(0) + \frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2}\Psi^*(1,1) \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя соотношение $T^*\Phi - \Psi^*JK = 0$, получим

$$T_1^*L_x = T_1^*(1 - zT_1)^{-1}\Phi(1,1) = T_1^*(zT_1(1 - zT_1)^{-1}\Phi + \Phi)(1,1) =$$

$$= (zT_1^*T_1(1 - zT_1)^{-1}\Phi + T_1^*\Phi)(1,1) = (z(1 - \Psi^*J\Psi)(1 - zT_1)^{-1}\Phi + T_1^*\Phi)(1,1) =$$

$$= (z(1 - zT_1)^{-1}\Phi - \Psi^*J(\Psi(1 - zT_1)^{-1}\Phi + K))(1,1) = zL_x(z) - \Psi^*JS(z)(1,1)\,.$$

Рассмотрим выражение $\Psi^*JS(z)(1,1)$

$$\Psi^*JS(z)(1,1) =$$
$$= \Psi^*(< JS(z)(1,1),(1,1) > \tfrac{1}{2}(1,1) + < JS(z)(1,1),(1,-1) > \tfrac{1}{2}(1,-1))\,.$$

Так как $\Psi^*(1,-1) = \widetilde{L}_x(0)$, то второе слагаемое имеет вид

$$\frac{1}{2} < JS(z)(1,1),(1,-1) > \Psi^*(1,-1) = \frac{1}{2} < JS(z)(1,1),(1,-1) > \widetilde{L}_x(0)$$

и так как $(1,1)S(z)J = (E_0(z), \widetilde{E}_0(z))$, то

$$< JS(z)(1,1),(1,-1) >= (1,1)S(z)J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= (E_0(z), \widetilde{E}_0(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = E_0(z) - \widetilde{E}_0(z),$$

то есть второе слагаемое имеет вид

$$\frac{E_x(z) - \widetilde{E}_x(z)}{2} \widetilde{L}_x(0).$$

Рассмотрим первое слагаемое $\frac{1}{2} < JS(z)(1,1),(1,1) > \Psi^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Аналогично

$$< JS(z)(1,1),(1,1) >= (1,1)S(z)J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_0(z) + \widetilde{E}_0(z).$$

Тогда первое слагаемое имеет вид

$$\frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2} \Psi^*(1,1).$$

То приходим к следующему виду для $T_1^*$

$$T_1^* L_x(z) = zL_x(z) + \frac{E_0(z) - \widetilde{E}_0(z)}{2} \widetilde{L}_x(0) + \frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2} \Psi^*(1,1)$$

5). **Лемма 5.** Оператор $T_1^*$ действует на вектор-функцию $L_x(z)$ следующим образом

$$T_1^* L_x(z) = (z + \mu(z)) L_x(z) + \nu(z) \widetilde{L}_x(z) + \frac{E_0(z) - \widetilde{E}_0(z)}{2} \widetilde{L}_x(0), \tag{2.6}$$

где

$$\nu(z) = \frac{c_2(z)c_3(z) - c_1(z)c_4(z)}{c_2(z) - c_4(z)}, \tag{2.7}$$

$$\mu(z) = \frac{c_1(z) - c_3(z)}{c_2(z) - c_4(z)}, \tag{2.8}$$

$$c_1(z) = \frac{(E_0(z) + \widetilde{E}_0(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})} \int_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t L_t^*(\overline{z}), \tag{2.9}$$

$$c_2(z) = \frac{(G_l'(z) + \widetilde{G}_l'(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})}, \tag{2.10}$$

$$c_3(z) = \frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z)} \int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}), \tag{2.11}$$

$$c_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})} - \widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})})}{(E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z))(1 - z^2)}. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу Леммы 4

$$T_1^* L_x(z) = z L_x(z) + \frac{E_0(z) - \widetilde{E}_0(z)}{2} \widetilde{L}_x(0) + \frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2} \Psi^*(1,1).$$

Покажем, что векторы $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$ линейно независимы при каждом фиксированном $x \in [0,l]$ и любом $z \in C$. Полагая противное, предположим, что $\delta(z) L_x(z) = \widetilde{L}_x(z)$, тогда

$$\delta(z)(1 - zT)^{-1}\Phi(1,1) = (1 - zT^*)^{-1}\Psi^*(1,-1).$$

Применим оператор $_1$ к обеим частям равенства

$$\delta(z)\frac{(1 - zT)^{-1}\Phi(1,1) - \Phi(1,1)}{z} = z(1 - zT^*)^{-1}\Psi^*(1,-1) - \Phi J S^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1),$$

$$(1 - zT)^{-1}\Phi(1,1)(\delta(z) - z^2) = \Phi(1,1)\delta(z) + z\Phi J S^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1).$$

Рассмотрим вначале случай $\delta(z) = z^2$, тогда из последнего равенства следует, что $(1,-1)S^*(\frac{1}{\overline{z}}) = -z(1,-1)$, что невозможно, так как $S^*(\frac{1}{\overline{z}}) = K^* + z\Psi^*(1 - -zT_1^*)^{-1}\Phi^*$ и $S^*(\frac{1}{\overline{z}}) \neq 0$ при $z = 0$.
Если $\delta(z) \neq z^2$, то

$$(1 - zT)^{-1}\Phi(1,1) = \Phi(\frac{(1,1)\delta(z) + zJS^*(\frac{1}{\overline{z}})(1,-1)}{\delta(z) - z^2})$$

и тогда $(1 - zT)^{-1}\Phi(1,1) \in \Phi E$ для $\forall z$, но $L_x(z) \notin \Phi E$ для $\forall z$.
Итак, функции $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$ линейно-независимы и образуют базис в $E^2$ при каждом фиксированном $x$ для $\forall z$. Поэтому представим последнее слагаемое в виде

$$\frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2}\Psi^*(1,1) = \mu(z) L_x(z) + \nu(z)\widetilde{L}_x(z). \tag{2.13}$$

Умножим выражение (2.13) на $\widetilde{L}_x^*(z)$

$$\frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{2} \int\limits_0^l \Psi^*(1,1) dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}) = \mu(z) \int\limits_0^l L_t(z) dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}) + \nu(z) \int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z) dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}).$$

Вычислим чему равны интегралы в этом выражении. Имеем следующее выражение:

$$N_0(z)-\widetilde{N}_l^*(\omega)=2(\overline{\omega}-z)\int\limits_0^l M_t(z)dF_t\widetilde{M}_t^*(\omega), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{N}_l(z)-N_0^*(\omega)=2(z-\overline{\omega})\int\limits_0^l \widetilde{M}_t(z)dF_tM_t^*(\omega). \tag{2.15}$$

Умножим выражение (2.15) слева на $(-1,1)$ и справа на $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Так как $(-1,1)\widetilde{N}_l(z)=(G_l(z),\widetilde{G}_l(z))$ и $(1,1)N_0(\omega)=(E_0(\omega),\widetilde{E}_0(\omega))$, то

$$G_l(z)+\widetilde{G}_l(z)+\overline{E_0(\omega)}-\overline{\widetilde{E}_0(\omega)}=2(z-\overline{\omega})\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_tL_t^*(\omega).$$

Запишем выражение в следующем виде:

$$(z-\omega)\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_tL_t^*(\overline{\omega})=\frac{G_l(z)+\widetilde{G}_l(z)}{2}+\frac{\overline{\widetilde{E}_0(\overline{\omega})}-\overline{E_0(\overline{\omega})}}{2}.$$

Обозначим $f(z)=\frac{G_l(z)+\widetilde{G}_l(z)}{2}$ и $g(\omega)=\frac{\overline{\widetilde{E}_0(\overline{\omega})}-\overline{E_0(\overline{\omega})}}{2}$ и так как $f(z)=-g(z)$, то

$$\frac{f(z)-g(\omega)}{z-\omega}\to f'(z)\quad(\omega\mapsto z),$$

$$\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_tL_t^*(\overline{z})=\frac{1}{2}(\frac{dG_l(z)}{dz}+\frac{d\widetilde{G}_l(z)}{dz}). \tag{2.16}$$

Теперь выражение (2.14) умножим слева на $(1,1)$ и справа на $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, тогда

$$(E_0(z),\widetilde{E}_0(z))\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-(1,1)\begin{pmatrix}\overline{G_l(\omega)}\\\overline{\widetilde{G}_l(\omega)}\end{pmatrix}=2(\overline{\omega}-z)\int\limits_0^l L_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\omega),$$

$$E_0(z)-\widetilde{E}_0(z)+\overline{G_l(\omega)}+\overline{\widetilde{G}_l(\omega)}=2(z-\overline{\omega})\int\limits_0^l L_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\omega),$$

и аналогично

$$\int\limits_0^l L_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z})=\frac{1}{2}(\frac{dE_l(z)}{dz}-\frac{d\widetilde{E}_l(z)}{dz}). \tag{2.17}$$

И так же имеем вид для двух интегралов

$$\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{\omega}) = \frac{G_x(z)\overline{G_x(\overline{\omega})} - \widetilde{G}_x(z)\overline{\widetilde{G}_x(\overline{\omega})}}{1-z\overline{\omega}} \tag{2.18}$$

и

$$\int\limits_0^l L_t(z)dF_tL_t^*(\overline{\omega}) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{\omega})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{\omega})}}{1-z\overline{\omega}}. \tag{2.19}$$

Тогда, используя выражения (2.16) - (2.19), получим

$$\begin{gathered}\tfrac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{2}\int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}) = \\ = \nu(z)(\tfrac{E_l'(z)-\widetilde{E}_l'(z)}{2}) + \mu(z)(\tfrac{G_x(z)\overline{G_x(\overline{z})}-\widetilde{G}_x(z)\overline{\widetilde{G}_x(\overline{z})}}{1-z^2}).\end{gathered}$$

Теперь выражение (2.13) умножим справа на $L_x^*(\overline{z})$

$$\begin{gathered}\tfrac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{2}\int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}) = \\ = \nu(z)\int\limits_0^l L_t(z)dF_tL_t^*(\overline{z}) + \mu(z)\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_tL_t^*(\overline{z}).\end{gathered}$$

И аналогично, используя выражения (2.16) - (2.19), получим

$$\begin{gathered}\tfrac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{2}\int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}) = \\ = \nu(z)(\tfrac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-z^2}) + \mu(z)(\tfrac{G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z)}{2}).\end{gathered}$$

Теперь вычислим $\nu(z)$ и $\mu(z)$, обозначив коэффициенты

$$c_1(z) = \frac{(E_0(z)+\widetilde{E}_0(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})}\int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}),$$

$$c_2(z) = \frac{(G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})},$$

$$c_3(z) = \frac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}\int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}),$$

$$c_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})} - \widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})})}{(E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z))(1-z^2)}.$$

То $\nu(z)$ и $\mu(z)$

$$\nu(z)=\frac{c_2(z)c_3(z)-c_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)},$$

$$\mu(z)=\frac{c_1(z)-c_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)}.$$

При этом выражение $c_2(z)-c_4(z)$ не равно тождественно нулю.
Тогда имеем

$$T^*L_x(z)=zL_x(z)+\frac{E_0(z)-\widetilde{E}_0(z)}{2}\widetilde{L}_x(0)+\mu(z)L_x(z)+\nu(z)\widetilde{L}_x(z).$$

**Лемма 6.** Оператор $T_1$ действует на вектор-функцию $\widetilde{L}_x(z)$ следующим образом

$$T_1\widetilde{L}_x(z)=(z-\widetilde{\nu}(z))\widetilde{L}_x(z)+\frac{\widetilde{G}_l(z)-G_l(z)}{2}L_x(0)-\widetilde{\mu}(z)L_x(z), \tag{2.20}$$

где

$$\widetilde{\nu}(z)=\frac{c_2(z)\widetilde{c}_3(z)-\widetilde{c}_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)}, \tag{2.21}$$

$$\widetilde{\mu}(z)=\frac{\widetilde{c}_1(z)-\widetilde{c}_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)}, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{c}_1(z)=\frac{(E_0(z)+\widetilde{E}_0(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})}\int\limits_0^l\Phi_t(1,-1)dF_tL_t^*(\overline{z}), \tag{2.23}$$

$$\widetilde{c}_3(z)=\frac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}\int\limits_0^l\Phi_t(1,-1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}), \tag{2.24}$$

а $c_2(z)$ и $c_4(z)$ имеют вид (2.10) и (2.12) соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2:

$$T_1\widetilde{L}_x(z)=z\widetilde{L}_x(z)+\frac{\widetilde{G}_l(z)-G_l(z)}{2}L_x(0)-\frac{\widetilde{G}_l(z)+G_l(z)}{2}\Phi_x(1,-1).$$

Тогда проведём вычисления аналогичные лемме 5:
Так как функции $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$ линейно-независимы и образуют базис в $L_2$, представим последнее слагаемое в виде

$$\frac{\widetilde{G}_l(z)+G_l(z)}{2}\Phi_x(1,-1)=\widetilde{\mu}(z)L_x(z)+\widetilde{\nu}(z)\widetilde{L}_x(z)$$

Аналогично, умножая на $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$ и используя выражения для интегралов (2.16) - (2.19), получим

$$\frac{\widetilde{G}_l(z)+G_l(z)}{2}\int\limits_0^l \Phi_t(1,-1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}) =$$
$$= \widetilde{\nu}(z)(\frac{E_l'(z)-\widetilde{E}_l'(z)}{2}) + \widetilde{\mu}(z)(\frac{G_x(z)\overline{G_x(\overline{z})}-\widetilde{G}_x(z)\overline{\widetilde{G}_x(\overline{z})}}{1-z^2}),$$

$$\frac{\widetilde{G}_l(z)+G_l(z)}{2}\int\limits_0^l \Phi_t(1,-1)dF_tL_t^*(\overline{z}) =$$
$$= \widetilde{\nu}(z)(\frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-z^2}) + \widetilde{\mu}(z)(\frac{G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z)}{2}).$$

И вводя аналогичные коэффициенты

$$\widetilde{c}_1(z) = \frac{(E_0(z)+\widetilde{E}_0(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})}\int\limits_0^l \Phi_t(1,-1)dF_tL_t^*(\overline{z}), \tag{2.25}$$

$$\widetilde{c}_2(z) = \frac{(G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})} = c_2(z),$$

$$\widetilde{c}_3(z) = \frac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}\int\limits_0^l \Phi_t(1,-1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}), \tag{2.26}$$

$$\widetilde{c}_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})})}{(E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z))(1-z^2)} = c_4(z),$$

имеем $\widetilde{\nu}(z)$ и $\widetilde{\mu}(z)$

$$\widetilde{\nu}(z) = \frac{c_2(z)\widetilde{c}_3(z)-\widetilde{c}_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)}, \tag{2.27}$$

$$\widetilde{\mu}(z) = \frac{\widetilde{c}_1(z)-\widetilde{c}_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)}. \tag{2.28}$$

И получим выражение

$$T_1\widetilde{L}_x(z) = z\widetilde{L}_x(z) + \frac{\widetilde{G}_l(z)-G_l(z)}{2}L_x(0) - \widetilde{\mu}(z)L_x(z) - \widetilde{\nu}(z)\widetilde{L}_x(z).$$

## §3. Преобразование Л. де Бранжа.

1) **Лемма 7.** Преобразование Л. де Бранжа $B_L$ (определение 1) действует на $T_1f$ следующим образом:

$$B_L(T_1f) = (z+\overline{\mu(\overline{z})})F_1(z) + \nu(\overline{z})F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2}F_2(0), \tag{3.1}$$

где $F_1$ и $F_2$ имеют вид (1.16).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$B_L(T_1f)=\int\limits_0^l T_1fdF_tL_t^*(\overline{z})=<T_1f,L>=<f,T^*L>=\int\limits_0^l fdF_t(T_1^*L(\overline{z}))^*=$$

$$=\int\limits_0^l fdF_t((z+\overline{\mu(\overline{z})})L_x^*(\overline{z})+\overline{\mu(\overline{z})}\widetilde{L}_x^*(\overline{z})+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2}\widetilde{L}_x^*(0))=$$

$$=(z+\overline{\mu(\overline{z})})\int\limits_0^l fdF_tL_x^*(\overline{z})+\overline{\nu(\overline{z})}\int\limits_0^l fdF_t\widetilde{L}_x^*(\overline{z})+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2}\int\limits_0^l fdF_t\widetilde{L}_x^*(0)=$$

$$=(z+\overline{\mu(\overline{z})})F_1(z)+\nu(\overline{z})F_2(z)+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2}F_2(0).$$

2). **Лемма 8.** Преобразование Л. де Бранжа $B_{\widetilde{L}}$ действует на $T_1f$ следующим образом:

$$B_{\widetilde{L}}(T_1f)=\frac{F_2(z)-F_2(0)}{z}, \tag{3.2}$$

где $F_1$ и $F_2$ имеют вид (1.16).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$B_{\widetilde{L}}(T_1f)=\int\limits_0^l T_1fdF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z})=<T_1f,\widetilde{L}>=<f,T_1^*\widetilde{L}>=\int\limits_0^l fdF_t(T_1^*\widetilde{L}(\overline{z}))^*=$$

$$=\int\limits_0^l fdF_t(\frac{\widetilde{L}_x(\overline{z})-\widetilde{L}_x(0)}{\overline{z}})^*=\frac{F_2(z)-F_2(0)}{z}.$$

3). **Лемма 9.** Если вектор (1,-1) является собственным для $\widetilde{N}^*+z\widetilde{\Gamma}^*$, то преобразование де-Бранжа $B_{\widetilde{L}}$ действует на $T_2f$, где $T_2f$ из узла $\triangle$(1.19), следующим образом:

$$B_{\widetilde{L}}(T_2f(z))=\frac{F_2(z)n(z)-F(0)n(0)}{z}, \tag{3.3}$$

где $F_1$ и $F_2$ имеют вид (1.16), а функция $n(z)$ такова, что

$$(\widetilde{N}^*+z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1)=n(z)(1,-1). \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя вид вектора $\widetilde{L}_x(z)$ из (1.15), запишем

$$<T_2f,\widetilde{L}>=<f,T_x^*\widetilde{L}_x(z)>=<f,T_2^*(1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*(1,-1)>.$$

Так как $T_2^*\Psi^* - T_1^*\Psi^*\widetilde{N}^* = \Psi^*\widetilde{\Gamma}^*$, то запишем

$$T_2^*(1-zT_1^*)^{-1}\Psi^* = (1-zT_1^*)^{-1}T_2^*\Psi^* = (1-zT_1^*)^{-1}(T_1^*\Psi^*\widetilde{N}^* + \Psi^*\widetilde{\Gamma}^*) =$$

$$= (1-zT_1^*)^{-1}T_1^*\Psi^*\widetilde{N}^* + (1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*\widetilde{\Gamma}^* =$$

$$= \frac{(1-zT_1^*)^{-1}-1}{z}\Psi^*\widetilde{N}^* + (1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*\widetilde{\Gamma}^* =$$

$$= \frac{1}{z}((1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*\widetilde{N}^* - \Psi^*\widetilde{N}^* + z(1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*\widetilde{\Gamma}^*) =$$

$$= \frac{1}{z}((1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*) - \Psi^*\widetilde{N}^*).$$

Тогда получаем:

$$< T_2 f, \widetilde{L} >=< f, \frac{1}{z}((1-zT_1^*)^{-1}\Psi^*(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1) - \Psi^*\widetilde{N}^*(1,-1)) > .$$

Введём функцию $n(z)$, удовлетворяющую следующему уравнению

$$(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1) = n(z)(1,-1),$$

то есть предположим, что (1,-1) – это собственный вектор $(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)$.
Тогда

$$< T_2 f, \widetilde{L} >=< f, \frac{1}{z}(1-zT_1^*)^{-1}\Psi^* n(z)(1,-1) - \Psi^* n(0)(1,-1)) >=$$

$$=< f, \frac{\widetilde{L}_x^*(z)n(z) - \widetilde{L}_x(0)n(0)}{z} >= \frac{F_2(z)n(z) - F_2(0)n(0)}{z}.$$

То есть

$$B_{\widetilde{L}}(T_2 f) = \frac{F_2(z)n(z) - F_2(0)n(0)}{z}.$$

4). **Лемма 10.** Если вектор (1,1) является собственным для $(N + z\Gamma)$, то преобразование де-Бранжа $B_L$ действует на $T_2 f$, где $T_2 f$ из узла $\triangle(1.19)$, следующим образом

$$B_L(T_2 f(z)) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)}F_1(z) + \frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)}F_2(z), \tag{3.5}$$

где $F_1$ и $F_2$ имеют вид (1.16), функция $m(z)$ такова что

$$(N + z\Gamma)(1,1) = m(z)(1,1), \tag{3.6}$$

а коэффициенты $\widetilde{\mu}(z)$ и $\widetilde{\nu}(z)$ имеют следующий вид

$$\widetilde{\mu}(z) = \frac{I_1(z)d_3(z) - I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z) - d_1(z)d_4(z)}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\nu}(z) = \frac{I_1(z)d_4(z) - I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z) - d_2(z)d_3(z)}, \tag{3.8}$$

где

$$I_1(z) = \int\limits_0^l \Psi^* \widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t L_t^*(\overline{z}), \tag{3.9}$$

$$I_2(z) = \int\limits_0^l \Psi^* \widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}), \tag{3.10}$$

$$d_1(z) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-|z|^2}, \tag{3.11}$$

$$d_2(z) = \frac{G_l'(z) + \widetilde{G}_l'(z)}{2}, \tag{3.12}$$

$$d_3(z) = \frac{E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z)}{2}, \tag{3.13}$$

$$d_4(z) = \frac{G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})} - \widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})}}{1-|z|^2}. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя вид операторов $T_1$ (1.8) и $T_2$, запишем

$$T_2\Phi = T_1\Phi N + \Phi\Gamma,$$

$$zT_2\Phi = zT_1\Phi N + z\Phi\Gamma = (zT_1 - 1)\Phi N + \Phi(\Gamma z + N),$$

$$z(zT_1 - 1)^{-1}T_2\Phi = \Phi N + (zT_1 - 1)^{-1}\Phi(\Gamma z + N),$$

$$T_2^*T_2 z(zT_1 - 1)^{-1}\Phi = T_2^*\Phi N + T_2^*(zT_1 - 1)^{-1}\Phi(\Gamma z + N).$$

В силу узловых соотношений запишем выражение $T_2^*T_2 + \Psi^*\widetilde{\sigma}_2\Psi = I$, тогда

$$(I - \Psi^*\widetilde{\sigma}_2\Psi)z(zT_1 - 1)^{-1}\Phi = T_2^*\Phi N + T_2^*(zT_1 - 1)^{-1}\Phi(\Gamma z + N),$$

$$(\Psi^*\widetilde{\sigma}_2\Psi - I)z(1 - zT_1)^{-1}\Phi = T_2^*\Phi N + T_2^*(zT_1 - 1)^{-1}\Phi(\Gamma z + N),$$

$$z\Psi^*\widetilde{\sigma}_2\Psi z(1 - zT_1)^{-1}\Phi - z(1 - zT_1)^{-1}\Phi = T_2^*\Phi N - T_2^*(1 - zT_1)^{-1}\Phi(\Gamma z + N).$$

Так как характеристическая функция имеет вид $S(z) = K + \Psi(z - T_1)^{-1}\Phi$ (1.5), то, записав выражения

$$S(\frac{1}{z}) - K = \Psi(\frac{1}{z} - T_1)^{-1}\Phi = z\Psi(1 - zT_1)^{-1}\Phi$$

и

$$T_2\Phi N + \Psi\widetilde{\sigma}_2 K = 0,$$

получим следующие уравнения

$$\Psi^*\widetilde{\sigma}_2(S(\frac{1}{z})-K)-z(1-zT_1)^{-1}\Phi = T_2^*\Phi N - T_2^*(1-zT_1)^{-1}\Phi(N+\Gamma z),$$

$$\Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})-z(1-zT_1)^{-1}\Phi = -T_2^*(1-zT_1)^{-1}\Phi(N+\Gamma z),$$

$$T_2^*(1-zT_1)^{-1}\Phi = z(1-zT_1)^{-1}\Phi(N+z\Gamma)^{-1} - \Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(N+z\Gamma)^{-1},$$

$$T_2^*(1-zT_1)^{-1}\Phi(1,1) = z(1-zT_1)^{-1}\Phi(N+z\Gamma)^{-1}(1,1) - \Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(N+z\Gamma)^{-1}(1,1).$$

Введём функцию $m(z)$, удовлетворяющую следующему уравнению

$$(N+z\Gamma)(1,1) = m(z)(1,1)$$

то есть предположим, что (1,1) – это собственный вектор $(N+z\Gamma)$.
Тогда выражение

$$T_2^* L_x(z) = \frac{L_x(z)}{m(z)} + \frac{\Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)}{m(z)}$$

представим в следующем виде

$$\Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1) = \widetilde{\mu} L_x(z) + \widetilde{\nu}\widetilde{L}_x(z). \tag{3.15}$$

Домножим выражение (3.15) на $L_x(z)$ и $\widetilde{L}_x(z)$, получим два уравнения

$$\int_0^l \Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t L_t^*(\overline{z}) = \widetilde{\mu}(z)\int_0^l L_t(z)dF_t L_t^*(\overline{z}) + \widetilde{\nu}\int_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_t L_t^*(\overline{z}),$$

$$\int_0^l \Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}) = \widetilde{\mu}(z)\int_0^l L_t(z)dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}) + \widetilde{\nu}\int_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}).$$

Используя полученные ранее выражения для интегралов (2.16) - (2.19), введём следующие коэффициенты

$$d_1(z) = \int_0^l L_t(z)dF_t L_t^*(\overline{z}) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-|z|^2},$$

$$d_2(z) = \int_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_t L_t^*(\overline{z}) = \frac{G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z)}{2},$$

$$d_3(z)=\int\limits_0^l L_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z})=\frac{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}{2},$$

$$d_4(z)=\int\limits_0^l \widetilde{L}_t(z)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z})=\frac{G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})}}{1-|z|^2}.$$

И обозначим интегралы

$$I_1(z)=\int\limits_0^l \Psi^*\widetilde{\sigma}_2S(\frac{1}{z})(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}),$$

$$I_2(z)=\int\limits_0^l \Psi^*\widetilde{\sigma}_2S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}).$$

Тогда

$$\frac{I_1(z)}{d_1(z)}=\widetilde{\mu}(z)+\widetilde{\nu}(z)\frac{d_2(z)}{d_1(z)},$$

$$\frac{I_2(z)}{d_3(z)}=\widetilde{\mu}(z)+\widetilde{\nu}(z)\frac{d_4(z)}{d_3(z)},$$

$$\frac{I_1(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_1(z)d_3(z)}=\nu(z)\frac{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)}{d_1(z)d_3(z)},$$

Получим

$$\nu(z)=\frac{I_1(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)},$$

$$\widetilde{\nu}(z)=\frac{I_1(z)d_4(z)-I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z)-d_2(z)d_3(z)}.$$

И приходим к выражению

$$B_L(T_2f(z))=\frac{F_1(z)}{m(z)}+\frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)}F_1(z)+\frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)}F_2(z).$$

Из лемм 7,8,9,10 вытекает следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть задан коммутативный узел $\triangle$ (1.19) такой, что $E=\tilde{E}$, $dimE=2$, а $\sigma_1=\tilde{\sigma}_1=J_N$ (1.13); спектр оператора $T_1$ сосредоточен в точке $\{1\}$ и вектор (1,1) является собственным для $(N+z\Gamma)^{-1}$, то есть существует функция $m(z)$ такая, что $(N+z\Gamma)^{-1}(1,1)=\frac{1}{m(z)}(1,1)$ и вектор (1,-1) является собственным для $\widetilde{N}^*+z\widetilde{\Gamma}^*$, то есть существует функция $n(z)$ такая, что $(\widetilde{N}^*+z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1)=n(z)(1,-1)$.

Тогда основная система коммутативных операторов $\{T_1,T_2\}$ узла $\triangle$ (1.19) унитарно эквивалентна системе операторов, которая действует в пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E,G)$ следующим образом

$$T_1F_1(z)=(z+\overline{\mu(\overline{z})})F_1(z)+\nu(\overline{z})F_2(z)+\frac{\overline{E_0(\overline{z})}-\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2}F_2(0),$$

$$T_1F_2(z)=\frac{F_2(z)-F_2(0)}{z},$$

$$T_2F_1(z)=\frac{F_1(z)}{m(z)}+\frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)}F_1(z)+\frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)}F_2(z),$$

$$T_2F_2(z)=\frac{F_2(z)n(z)-F(0)n(0)}{z},$$

где $(F_1(z),F_2(z))\in\mathcal{B}(E,G)$. А коэффициенты $\mu(z)$ и $\nu(z)$ имеют вид

$$\nu(z)=\frac{c_2(z)c_3(z)-c_1(z)c_4(z)}{c_2(z)-c_4(z)},$$

$$\mu(z)=\frac{c_1(z)-c_3(z)}{c_2(z)-c_4(z)},$$

$$c_1(z)=\frac{(E_0(z)+\widetilde{E}_0(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})}\int\limits_0^l\Psi_t^*(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}),$$

$$c_2(z)=\frac{(G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z))(1-z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})},$$

$$c_3(z)=\frac{E_0(z)+\widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}\int\limits_0^l\Psi_t^*(1,1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}),$$

$$c_4(z)=\frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})})}{(E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z))(1-z^2)},$$

а коэффициенты $\widetilde{\mu}(z)$ и $\widetilde{\nu}(z)$ равны

$$\widetilde{\mu}(z)=\frac{I_1(z)d_3(z)-I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z)-d_1(z)d_4(z)},$$

$$\widetilde{\nu}(z)=\frac{I_1(z)d_4(z)-I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z)-d_2(z)d_3(z)},$$

$$I_1(z)=\int\limits_0^l\Psi^*\widetilde{\sigma}_2S(\frac{1}{z})(1,1)dF_tL_t^*(\overline{z}),$$

$$I_2(z)=\int\limits_0^l \Psi^*\widetilde{\sigma}_2 S(\frac{1}{z})(1,1)dF_t\widetilde{L}_t^*(\overline{z}),$$

$$d_1(z)=\frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})}-\widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-|z|^2},$$

$$d_2(z)=\frac{G_l'(z)+\widetilde{G}_l'(z)}{2},$$

$$d_3(z)=\frac{E_0'(z)-\widetilde{E}_0'(z)}{2},$$

$$d_4(z)=\frac{G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})}-\widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})}}{1-|z|^2}.$$

Таким образом, для коммутативной системы операторов $T_1, T_2$, являющейся основной для коммутативного узла $\triangle(1.19)$, которая удовлетворяет предположениям теоремы, построена функциональная модель. При этом $T_1$ и $T_2$ на одну из компонент $[F_1(z), F_2(z)]$ действуют как сдвиг, а на вторую – как умножение на специальные голоморфные функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С., Янцевич А.А., Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков.: Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

2. Золотарёв В.А., Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. – Харьков.: ХНУ, 2003. – 342 с.

3. De Branges Н.И., Hilbert spaces of entire functions. – Prentice-Hall: London, 1968. – 326 с.

4. Лившиц М.С., Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. // Матем. сборник – 1946. – 19. 61:2 – 236-260 с.

5. Надь Б.С., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – Москва.: Мир, 1970. – 431 с.

6. Золотарёв В.А., Сыровацкий В.Н., Преобразование де Бранжа относительно круга. // Вестник ХНУ им. В.Н.Каразина, Серия "Математика и прикладная механика" №711. – 2005. – с. 80-92.

7. Золотарёв В.А., Модельные представления коммутативных систем линейных операторов. // Функциональный анализ и его приложения, 1988, т.22, вып. 1, 66-68.

8. Zolotarev V.A., Functional model of commutative operator systems // J. of Math.Physics, Analysis, Geometry, 2008. vol. 4, No 3, pp 420 - 440.

9. Dym H., Reproducing kernels and Riccati equations. // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol.11, No.1, 35-53 - 440.

10. Arov D.Z., Dym H., J-contractive matrix valued functions and related topic. // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116, Cambridge University Press, Cambridge 2008. - 440.

Статья получена: 21.10.2010; окончательный вариант: 6.12.2011; принята: 18.04.2012.