Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977 № 1018, 2012, с.4–20

Отображение линейных систем второго порядка с двумерным управлением

Т.И. Сморцова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
E-mail: tivanova@univer.kharkov.ua

В статье рассмотрены линейные управляемые системы с двумерным управлением. Основная цель статьи – получить явный вид решения для задачи быстродействия для произвольной линейной управляемой системы с постоянными коэффициентами, используя аналитическое решение этой задачи для более простой системы. Для этого строится некоторое негладкое отображение множеств 0-управляемости данных систем. Другими словами, исследуется эквивалентность систем с одинаковым качественным поведением в окрестности точки покоя.
Ключевые слова: Линейная управляемая система, двумерное управление.

Сморцова Т.I., **Відображення лінійних систем другого порядку з двовимірним керуванням.** В статті розглянуто лінійні керовані системи з двовимірним керуванням. Основна мета статі – одержати явний вигляд розв'язку для задачі швидкодії для довільної лінійної керованої системи зі сталими коефіцієнтами, використовуючи аналітичний розв'язок цієї задачі для простішої системи. Для цього побудовано деяке негладке відображення множин 0-керованості даних систем. Іншими словами, досліджується еквівалентність систем з однаковою якісною поведінкою в околі точки спокою.
Ключові слова: Лінійна керована система, двовимірне керування.

Smortsova T.I., **Mapping of the linear systems of the second order with two-dimensional control.** This paper deals with linear control systems with two-dimensional control. The main goal of the paper is to find the exact analytic solution of the time-optimal control problem for an arbitrary linear control system with constant coefficients using the analytic solution of this problem for the simplest system. For this aim, we construct a certain nonsmooth mapping between the 0-controllability sets of the given systems. In other words, by means of this mapping, we investigate the equivalence of the systems with the same qualitative behavior in a neighborhood of the stationary point.
Keywords: Linear control system, two-dimensional control.

2000 Mathematics Subject Classification 42A45.

1. Введение

Теория линейных управляемых систем развивается с 50-х годов прошлого столетия. На данный момент эта теория хорошо развита. Однако, в рамках этой теории существуют и нерешенные задачи. Одной из них является получение точного аналитического решения задачи быстродействия.

В 1987 В.И. Коробов и Г.М. Скляр [1] получили аналитическое решение задачи быстродействия для канонической управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u \ , & |u| \le 1 \ , \\ \dot{x_k} = x_{k-1}, & 2 \le k \le n \ . \end{cases}$$

Предложенный в [1] подход существенно использует технику проблемы моментов. Метод состоит в построении алгебраических полиномов, имеющих в качестве корней оптимальное время и точки переключения оптимального управления $u(t)$. На основании этих результатов была построена поверхность переключения оптимального по быстродействию управления $u(x)$.

С другой стороны, на основе этих результатов были разработаны приближенные методы решения задачи быстродействия для произвольных линейных управляемых систем [1], [2].

Метод решения задачи быстродействия для произвольных линейных управляемых систем с одномерным управлением, основанный на отображении траекторий систем, был предложен в [3].

В данной статье этот метод решения задачи быстродействия распространяется на системы с двумерным управлением.

Так, известно, что система

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= & u_1 \ , \\ \dot{x_2} &= & x_1 + u_2 \ , \end{cases} \quad |u_1| \le 1 \ , |u_2| \le 1 \ , \tag{1}$$

является глобально 0-управляемой (т.е. множество 0-управляемости для нее – все пространство $\mathbb{R}^2$), и оптимальные по быстродействию управления – кусочно-постоянные функции, которые принимают значения ± 1 и имеют не более 1 точки разрыва. Картина синтеза для задачи быстродействия для системы (1) показана на рис. 1.

Здесь по траектории l_1 можно попасть в начало координат в силу системы (1) под действием управления $u_1(t) \equiv 1$, $u_1(t) \equiv 1$, по траектории l_2 – под действием управления $u_1(t) \equiv 1$, $u_1(t) \equiv -1$, по траектории l_3 – под действием управления $u_1(t) \equiv -1$, $u_1(t) \equiv -1$, по траектории l_4 – под действием управления $u_1(t) \equiv -1$, $u_1(t) \equiv 1$.

Отметим также, что во множествах S^{+-} и S^{-+} оптимальное по быстродействию управление может быть выбрано не единственным способом [4]. Для определенности выберем в S^{+-} управление $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = -1$, а в S^{-+} – управление $u_1(t) = -1$, $u_2(t) = 1$.

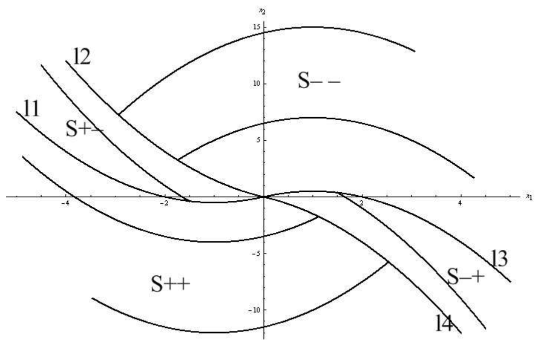

Рис. 1: Картина синтеза для системы (1).

Заметим теперь, что любая полностью управляемая линейная система второго порядка с постоянными коэффициентами и двумерным управлением может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= ay_1 + by_2 + u_1 \ , \\ \dot{y_2} &= y_1 + \alpha u_1 + u_2 \ , \end{cases} \quad |u_1| \le 1 \ , |u_2| \le 1 \ , \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}^1$, $b \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, с помощью линейной замены переменных. Поэтому будем рассматривать систему (2) как общий случай линейных управляемых систем второго порядка с постоянными коэффициентами и двумерным управлением.

Множество 0-управляемости для системы (2) с управлениями, которые принимают значения ± 1 и имеют не более 1 точки разрыва, может не совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^2$. Однако, это множество является выпуклым и содержит начало координат в качестве внутренней точки. Кроме того, если матрица системы (2) имеет комплексные собственные значения, то оптимальное по быстродействию управление для системы (2) имеет специальный вид [4], [5]. А именно, время движения по траектории системы (2) до переключения управления не превосходит $\pi/|\nu|$, где ν – мнимая часть собственных значений матрицы данной системы.

Целью данной статьи является построение явного вида отображения оптимальных траекторий системы (1) на траектории системы (2). Такое отображение траекторий, в частности, даёт возможность решения задачи быстродействия для системы (2) с использованием аналитического решения этой задачи для системы (1).

2. Построение отображения траекторий систем

В этой части построим отображение области 0-управляемости системы (1) на область 0-управляемости системы (2).

Будем предполагать, что управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ принимают значения ± 1, имеют не более 1 точки разрыва, а в случае комплексных собственных значений матрицы системы (2) ($\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$), длина отрезка, на котором управления непрерывны, не превосходит $\pi/|\nu|$.

Для нахождения отображения сделаем в системе (2) замену переменных $y = \Phi(x)$, где $\Phi(x) \in C(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(x) \in C^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4\})$, $\Phi(0) = 0$. Точнее,

$$\begin{cases} y_1 &= \Phi_1(x_1, x_2) \ , \\ y_2 &= \Phi_2(x_1, x_2) \ , \end{cases}$$

где

$$\Phi_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \Phi_{1,2}^{++}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{++}, \\ \Phi_{1,2}^{+-}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{+-}, \\ \Phi_{1,2}^{--}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{--}, \\ \Phi_{1,2}^{-+}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{-+}. \end{cases}$$

Отметим, что негладкость полученного отображения является существенным отличием данной работы от других аналогичных исследований. В [3] такое отображение названо S-диффеоморфизмом.

Используя (1)-(2), получим системы уравнений в частных производных первого порядка для определения функций $\Phi_{1,2}(x_1, x_2)$:

$$\begin{cases} \Phi_{1x_1} u_1 + \Phi_{1x_2}(x_1 + u_2) &= a\Phi_1 + b\Phi_2 + u_1 \ , \\ \Phi_{2x_1} u_1 + \Phi_{2x_2}(x_1 + u_2) &= \Phi_1 + \alpha u_1 + u_2 \ . \end{cases} \quad (3)$$

Эти системы будем решать отдельно для значений управлений $u_1 = \pm 1$, $u_2 = \pm 1$, но для сокращения записи будем писать $u_{1,2}$ вместо "$\pm$". Как показано в [6], эти системы эквивалентны однородным уравнениям в частных производных

$$Z_{x_1} u_1 + Z_{x_2}(x_1 + u_2) + Z_{x_3}(ax_3 + bx_4 + u_1) + Z_{x_4}(x_3 + \alpha u_1 + u_2) = 0, \quad (4)$$

где $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – новая неизвестная функция, а $x_3 = \Phi_1$, $x_4 = \Phi_2$ – новые независимые переменные. Для нахождения характеристик полученных уравнений (4) имеем следующие системы:

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{x_1 + u_2} = \frac{dx_3}{ax_3 + bx_4 + u_1} = \frac{dx_4}{x_3 + \alpha u_1 + u_2} \ ,$$

которые эквивалентны нормальным системам (поскольку $u_1 \neq 0$):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 + u_2}{u_1} \ , \quad (5)$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{ax_3 + bx_4 + u_1}{u_1} \ , \quad (6)$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3 + \alpha u_1 + u_2}{u_1} \ . \quad (7)$$

Эти системы распадаются на две подсистемы и мы можем интегрировать (5) и (6)-(7) раздельно. Очевидно, что первый интеграл (5) имеет вид

$$p_3 = x_2 - {x_1}^2/2u \ .$$

Рассмотрим систему (6)-(7). Обозначим через $'$ производную по x_1. Тогда из уравнения (7) найдем, что

$$x_3 = u_1 x_4' - \alpha u_1 - u_2 \ . \tag{8}$$

Подставив x_3 в (6), получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x_4'' - a u_1 x_4' - b x_4 = u_1 - a\alpha u_1 - a u_2 \ . \tag{9}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$x_4'' - a u_1 x_4' - b x_4 = 0 \ . \tag{10}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (10) имеет вид

$$\lambda^2 - a u_1 \lambda - b = 0 \ . \tag{11}$$

Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от значений коэффициентов a и b.

Вариант 1. $b \neq 0$. Матрица системы (2) невырождена.

Вариант 1a. Матрица системы (2) имеет равные действительные собственные значения.

Вариант 1b. Матрица системы (2) имеет различные действительные собственные значения.

Вариант 1c. Матрица (2) имеет различные комплексные собственные значения.

Вариант 2. $b = 0$. Матрица системы (2) вырождена.

Рассмотрим Вариант 1. Поскольку $b \neq 0$, уравнение (11) не имеет нулевых корней, и частное решение уравнения (9) имеет вид $v(x_1) = q_0$, $q_0 \in \mathbb{R}^1$. В этом случае находим, что $q_0 = \dfrac{(a\alpha - 1)u_1 + a u_2}{b}$. Тогда, общее решение (9) имеет вид

$$x_4 = p_1 F_1^{u_1}(x_1) + p_2 F_2^{u_1}(x_1) + q_0 \ , \tag{12}$$

где

$$F_1^{u_1}(x_1) = \begin{cases} F_1^+(x_1), \\ F_1^-(x_1), \end{cases} \qquad F_2^{u_1}(x_1) = \begin{cases} F_2^+(x_1), \\ F_2^-(x_1), \end{cases} -$$

фундаментальные системы решений уравнений (10) при $u_1 = 1$ и $u_1 = -1$ соответственно. Тогда из (8) и (12) получаем, что

$$x_3 = u_1(p_1 (F_1^{u_1})'(x_1) + p_2 (F_2^{u_1})'(x_1)) - \alpha u_1 - u_2 \ . \tag{13}$$

Из (12), (13), находим первые интегралы системы (6)-(7), а именно, $p_1(x_1, x_3, x_4)$ и $p_2(x_1, x_3, x_4)$.

Как известно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$Z = \Psi(p_1(x_1, x_3, x_4), p_2(x_1, x_3, x_4), p_3(x_1, x_2)) \equiv \tilde{\Psi}(x_1, x_2, x_3, x_4) \ . \qquad (14)$$

Следуя [6], общее решение системы (3) найдём из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1(x_1, x_2, \Phi_1, \Phi_2) &= 0 \ , \\ \tilde{\Psi}_2(x_1, x_2, \Phi_1, \Phi_2) &= 0 \ , \end{cases}$$

где $\tilde{\Psi}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\tilde{\Psi}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – произвольные решения уравнения (4) такие, что $\partial(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)/\partial(x_3, x_4) \neq 0$. Используя (14), перепишем эти системы в виде

$$\begin{cases} \Psi_1(p_1, p_2, p_3) = 0 \ , \\ \Psi_2(p_1, p_2, p_3) = 0 \ . \end{cases}$$

Несложно показать, что из (14), в силу условия $\partial(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)/\partial(x_3, x_4) \neq 0$, следует, что $\partial(\Psi_1, \Psi_2)/\partial(p_1, p_2) \neq 0$. Тогда, $p_1 = \varphi(p_3)$, $p_2 = \psi(p_3)$, где $\varphi(p_3)$ и $\psi(p_3)$ – произвольные гладкие функции. Из (12)-(13) и обозначений $x_3 = \Phi_1$, $x_4 = \Phi_2$, получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi_1^{u_1u_2}(x_1, x_2) &= u_1\varphi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)(F_1^{u_1})'(x_1) + \\ &\quad + u_1\psi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)(F_2^{u_1})'(x_1) - \alpha u_1 - u_2 \ , \\ \Phi_2^{u_1u_2}(x_1, x_2) &= \varphi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)F_1^{u_1}(x_1) + \\ &\quad + \psi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)F_2^{u_1}(x_1) + \frac{(a\alpha - 1)u_1 + au_2}{b} \ . \end{aligned} \qquad (15)$$

Найдём теперь явные выражения для функций $\varphi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)$ и $\psi^{u_1u_2}\left(x_2 - \frac{1}{2u_1}(x_1 + u_2)^2\right)$. Заметим, что эти функции так же, как и функции $\Phi_{1,2}(x_1, x_2)$, имеют вид

$$\varphi^{u_1u_2}(x) = \begin{cases} \varphi^{++}(x_1, x_2), \\ \varphi^{+-}(x_1, x_2), \\ \varphi^{--}(x_1, x_2), \\ \varphi^{-+}(x_1, x_2), \end{cases} ; \ \psi^{u_1u_2}(x) = \begin{cases} \psi^{++}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{++}, \\ \psi^{+-}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{+-}, \\ \psi^{--}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{--}, \\ \psi^{-+}(x_1, x_2), \text{ при } (x_1, x_2) \in S^{-+}. \end{cases}$$

Поскольку $\Phi_1(0,0) = \Phi_2(0,0) = 0$, то из неоднородных систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi^{u_1u_2}\left(-\dfrac{1}{2u_1}\right)(F_1^{u_1})'(0)+\psi^{u_1u_2}\left(-\dfrac{1}{2u_1}\right)(F_2^{u_1})'(0)=\alpha+u_1u_2\ , \\ \varphi^{u_1u_2}\left(-\dfrac{1}{2u_1}\right)F_1^{u_1}(0)+\psi^{u_1u_2}\left(-\dfrac{1}{2u_1}\right)F_2^{u_1}(0) \quad =-\dfrac{(a\alpha-1)u_1+au_2}{b}\ , \end{cases} \tag{16}$$

найдем значения $\varphi^{u_1u_2}\left(-\frac{1}{2u_1}\right)$ и $\psi^{u_1u_2}\left(-\frac{1}{2u_1}\right)$.

Поскольку определители систем отличны от 0, то системы (16) имеют единственные решения.

Для того, чтобы найти явный вид функций $\varphi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)$ и $\psi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)$, используем непрерывность отображения на линиях переключения для оптимального по быстродействию управления для системы (1).

Так, при $x_2=\frac{1}{2}(x_1+1)^2-\frac{1}{2},\ x_1\le 0$, (кривая l_1) получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)(F_1^{+})'(x_1)+\psi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)(F_2^{+})'(x_1)-\alpha+1= \\ \qquad =\varphi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)(F_1^{+})'(x_1)+\psi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)(F_2^{+})'(x_1)-\alpha-1\ , \\ \varphi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)F_1^{+}(x_1)+\psi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)F_2^{+}(x_1)+\dfrac{a\alpha-1-a}{b}= \\ \qquad =\varphi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)F_1^{+}(x_1)+\psi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)F_2^{+}(x_1)+\dfrac{a\alpha-1+a}{b}\ , \end{cases} \tag{17}$$

из которой определим вид функций $\varphi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)$ и $\psi^{+-}\left(2x_1-\frac{1}{2}\right)$. Эта система также имеет единственное решение.

Обозначим $z=2x_1-\frac{1}{2}$. Тогда $x_1=\frac{2z+1}{4}$, и получаем вид функций $\varphi^{+-}(z)$ и $\psi^{+-}(z)$. Подставляя в эти выражения $x_2-\frac{1}{2}(x_1-1)^2$ вместо z, находим явный вид функций $\varphi^{+-}\left(x_2-\frac{1}{2}(x_1-1)^2\right)$ и $\psi^{+-}\left(x_2-\frac{1}{2}(x_1-1)^2\right)$. Тогда, используя (15), находим функции $\Phi_1^{+-}(x_1,x_2)$, $\Phi_2^{+-}(x_1,x_2)$.

Аналогично, при $x_2=\frac{1}{2}(x_1-1)^2-\frac{1}{2},\ x_1\le 0$, (кривая l_2) получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} -\varphi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)(F_1^{-})'(x_1)-\psi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)(F_2^{-})'(x_1)+\alpha+1= \\ \qquad =\varphi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)(F_1^{+})'(x_1)+\psi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)(F_2^{+})'(x_1)-\alpha+1\ , \\ \varphi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)F_1^{-}(x_1)+\psi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)F_2^{-}(x_1)-\dfrac{a\alpha-1+a}{b}= \\ \qquad =\varphi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)F_1^{+}(x_1)+\psi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)F_2^{+}(x_1)+\dfrac{a\alpha-1-a}{b}\ , \end{cases} \tag{18}$$

из которой определим вид функций $\varphi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)$ и $\psi^{--}\left((x_1-1)^2-\frac{1}{2}\right)$. Эта система также имеет единственное решение.

Обозначим $z=(x_1-1)^2-\frac{1}{2}$. Так как $x_1\le 0$, то $x_1=-\left(z+\frac{1}{2}\right)^{1/2}+1$. Тогда получаем вид функций $\varphi^{--}(z)$ и $\psi^{--}(z)$. Подставляя в эти выражения $x_2+\frac{1}{2}(x_1-1)^2$ вместо z, находим явный вид функций $\varphi^{--}\left(x_2+\frac{1}{2}(x_1-1)^2\right)$ и $\psi^{--}\left(x_2+\frac{1}{2}(x_1-1)^2\right)$. Далее, подставляя их в (15), находим функции $\Phi_1^{--}(x_1,x_2)$, $\Phi_2^{--}(x_1,x_2)$.

Аналогично, используя непрерывность отображения на кривой l_3 ($x_2==-\frac{1}{2}(x_1-1)^2+\frac{1}{2}$, $x_1\ge 0$), получим явный вид функций $\varphi^{-+}(x_2+\frac{1}{2}(x_1+1)^2)$, и $\psi^{-+}(x_2+\frac{1}{2}(x_1+1)^2)$. Используя (15), явно определим функции $\Phi_1{}^{-+}(x_1,x_2)$ и $\Phi_2{}^{-+}(x_1,x_2)$.

Непрерывность отображения на кривой l_4 ($x_2=-\frac{1}{2}(x_1+1)^2+\frac{1}{2}$, $x_1\ge 0$,) позволит найти функции $\varphi^{++}(x_2-\frac{1}{2}(x_1+1)^2)$ и $\psi^{++}(x_2-\frac{1}{2}(x_1+1)^2)$, а затем, подставив их в (15), и явный вид функций $\Phi_1{}^{++}(x_1,x_2)$ и $\Phi_2{}^{++}(x_1,x_2)$.

Рассмотрим теперь подробнее Вариант 1а. В этом случае $D=a^2+4b=0$, следовательно, двукратными корнями характеристического уравнения (11) являются числа $\lambda^+=\frac{a}{2}\ne 0$ (при $u_1=1$) и $\lambda^-=-\frac{a}{2}=-\lambda^+$ (при $u_1=-1$). Кроме того, в этом случае $b=-\frac{a^2}{4}\ne 0$. Тогда частные решения уравнений (9) имеют вид $q_0=-\dfrac{4(a\alpha u_1+au_2-u_1)}{a^2}$.

Так как $a\ne 0$, то фундаментальные системы решений уравнений (10) при $u_1=1$ и $u_1=-1$ соответственно, образуют функции

$$F_1^{\pm}(x_1)=e^{\pm\frac{a}{2}x_1},\ F_2^{\pm}(x_1)=x_1e^{\pm\frac{a}{2}x_1}.$$

Тогда из (15) получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1,x_2)&=u_1e^{\frac{au_1}{2}x_1}\left[\frac{au_1}{2}\varphi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)+\right.\\&\left.+\left(1+\frac{au_1}{2}x_1\right)\psi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)\right]-\alpha u_1-u_2\ ,\\\Phi_2(x_1,x_2)&=e^{\frac{au_1}{2}x_1}\left[\varphi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)+\right.\\&\left.+x_1\psi^{u_1u_2}\left(x_2-\frac{1}{2u_1}(x_1+u_2)^2\right)\right]-\frac{4(a\alpha u_1+au_2-u_1)}{a^2}\ .\end{aligned}\tag{19}$$

Из систем (16) находим значения

$$\varphi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2}\ ,\quad \psi^{++}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a\alpha+a-2}{a}\ ,$$

$$\varphi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}\ ,\quad \psi^{+-}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a\alpha-a-2}{a}\ ,$$

$$\varphi^{--}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2}\ ,\quad \psi^{--}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a\alpha+a-2}{a}\ ,$$

$$\varphi^{-+}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}\ ,\quad \psi^{-+}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a\alpha-a-2}{a}\ .$$

Из систем (17) находим функции

$$\begin{aligned}
&\varphi^{+-}(z) = -e^{-\frac{a}{2}\frac{2z+1}{4}}\left(\frac{2z+1}{2}+\frac{8}{a}\right)+\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2}\ , \\
&\psi^{+-}(z) = 2e^{-\frac{a}{2}\frac{2z+1}{4}} - \frac{a\alpha+a-2}{a}\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Подставив (20) при $z = x_2 - \frac{1}{2}(x_1-1)^2$ в (15), получим явный вид функций $\Phi_1^{+-}(x_1,x_2)$ и $\Phi_2^{+-}(x_1,x_2)$ в рассматриваемом случае.

Далее, из систем (18) находим функции

$$\begin{aligned}
&\varphi^{--}(z) = e^{\frac{a}{2}\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)}\left(2\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha-\frac{2}{a}\right)-\frac{8(a\alpha-1)}{a^2}\right)+ \\
&+e^{a\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)}\left(-2\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)+\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}\right), \\
&\psi^{--}(z) = e^{\frac{a}{2}\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)}\left(-2\alpha+\frac{4}{a}\right)+e^{a\left(-\sqrt{z+\frac{1}{2}}+1\right)}\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)\ .
\end{aligned} \tag{21}$$

Подставив (21) при $z = x_2 + \frac{1}{2}(x_1-1)^2$ в (15), получим явный вид функций $\Phi_1^{--}(x_1,x_2)$ и $\Phi_2^{--}(x_1,x_2)$ в рассматриваемом случае.

Аналогично находим и явный вид функций $\Phi_1^{-+}(x_1,x_2)$, $\Phi_2^{-+}(x_1,x_2)$, $\Phi_1^{++}(x_1,x_2)$ и $\Phi_2^{++}(x_1,x_2)$ для Варианта 1a.

Таким образом, отображение в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

$\Phi_1(x_1,x_2) =$

$$= \begin{cases}
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_1(x)}\Big[-a\left(f_1(x)+x_1\right)\left(\alpha-\frac{2}{a}\right)+2\alpha\Big]+e^{af_1(x)}\Big[a\left(f_1(x)+\frac{x_1}{2}\right)\times \\
\qquad\times\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)-\alpha+1\Big]\Big\}-\alpha-1\ , \qquad (x_1,x_2)\in S^{++}\ ; \\
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_2(x)}\Big[a\left(f_2(x)+x_1\right)-2\Big]-\frac{a}{2}x_1\left(\alpha+1-\frac{2}{a}\right)+\alpha+1\Big\}- \\
\qquad-\alpha+1\ , \qquad (x_1,x_2)\in S^{+-}\ ; \\
e^{-\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_3(x)}\Big[a\left(f_3(x)-x_1\right)\left(\alpha-\frac{2}{a}\right)-2\alpha\Big]+e^{af_3(x)}\Big[-a\left(f_3(x)-\frac{x_1}{2}\right)\times \\
\qquad\times\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)+\alpha-1\Big]\Big\}+\alpha+1\ , \qquad (x_1,x_2)\in S^{--}\ ; \\
e^{-\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_4(x)}\Big[-a\left(f_4(x)-x_1\right)+2\Big]-\frac{a}{2}x_1\left(\alpha+1-\frac{2}{a}\right)-\alpha-1\Big\}+ \\
\qquad+\alpha-1\ , \qquad (x_1,x_2)\in S^{-+}\ ;
\end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1,x_2)=$$

$$=\begin{cases} e^{\frac{a}{2}x_1}\Bigg\{e^{\frac{a}{2}f_1(x)}\Bigg[-2\left(f_1(x)+x_1\right)\left(\alpha-\frac{2}{a}\right)+\frac{8(a\alpha-1)}{a^2}\Bigg]+e^{af_1(x)}\times \\ \quad\times\Bigg[2\left(f_1(x)+\frac{x_1}{2}\right)\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)-\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}\Bigg]\Bigg\}-\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2},\ (x_1,x_2)\in S^{++}; \\ e^{\frac{a}{2}x_1}\Bigg\{e^{\frac{a}{2}f_2(x)}\Bigg[2\left(f_2(x)+x_1\right)-\frac{8}{a}\Bigg]-x_1\left(\alpha+1-\frac{2}{a}\right)+\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2}\Bigg\}- \\ \qquad-\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}, \qquad (x_1,x_2)\in S^{+-}; \\ e^{-\frac{a}{2}x_1}\Bigg\{e^{\frac{a}{2}f_3(x)}\Bigg[2\left(f_3(x)-x_1\right)\left(\alpha-\frac{2}{a}\right)-\frac{8(a\alpha-1)}{a^2}\Bigg]+e^{af_3(x)}\times \\ \quad\times\Bigg[-2\left(f_3(x)-\frac{x_1}{2}\right)\left(\alpha-1-\frac{2}{a}\right)+\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}\Bigg]\Bigg\}+\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2},\ (x_1,x_2)\in S^{--}; \\ e^{-\frac{a}{2}x_1}\Bigg\{e^{\frac{a}{2}f_4(x)}\Bigg[-2\left(f_4(x)-x_1\right)+\frac{8}{a}\Bigg]-x_1\left(\alpha+1-\frac{2}{a}\right)-\frac{4(a\alpha+a-1)}{a^2}\Bigg\}+ \\ \qquad+\frac{4(a\alpha-a-1)}{a^2}, \qquad (x_1,x_2)\in S^{-+}; \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x)&=-\sqrt{-x_2+\tfrac{1}{2}(x_1+1)^2+\tfrac{1}{2}}+1, \quad f_2(x)=-\tfrac{2x_2-(x_1-1)^2+1}{4}, \\ f_3(x)&=-\sqrt{x_2+\tfrac{1}{2}(x_1-1)^2+\tfrac{1}{2}}+1, \quad f_4(x)=\tfrac{2x_2+(x_1+1)^2-1}{4}. \end{aligned} \tag{22}$$

Аналогично строим отображение и в остальных случаях. Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательные результаты.

Так, в случае Варианта 1b корнями уравнения (11) являются следующие числа

$$\text{при } u_1=1 \quad \lambda_1^+=\frac{a+\sqrt{D}}{2}\neq 0\ , \qquad \lambda_2^+=\frac{a-\sqrt{D}}{2}\neq 0\ ,$$
$$\text{при } u_1=-1 \quad \lambda_1^-=\frac{-a+\sqrt{D}}{2}=-\lambda_2^+\ , \quad \lambda_2^-=\frac{-a-\sqrt{D}}{2}=-\lambda_1^+\ ,$$

где $D=a^2+4b\neq 0$. Фундаментальные системы решений уравнений (10), при $u_1=1$ и $u_1=-1$ соответственно, образуют функции

$$F_1^{\pm}(x_1)=e^{\pm\lambda_1^+x_1},\ F_2^{\pm}(x_1)=x_1e^{\pm\lambda_2^+x_1}.$$

Отображение в данном случае имеет вид

$$\Phi_1(x_1,x_2)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[e^{\lambda_1^+x_1}g_1(x)+e^{\lambda_2^+x_1}g_2(x)\Big]-\alpha-1\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{++}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[e^{\lambda_1^+x_1}g_3(x)+e^{\lambda_2^+x_1}g_4(x)\Big]-\alpha+1\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{+-}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[e^{-\lambda_1^+x_1}g_5(x)+e^{-\lambda_2^+x_1}g_6(x)\Big]+\alpha+1\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{--}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[e^{-\lambda_1^+x_1}g_7(x)+e^{-\lambda_2^+x_1}g_8(x)\Big]+\alpha-1\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{-+}; \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1,x_2)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[\frac{1}{\lambda_1^+}e^{\lambda_1^+x_1}g_1(x)+\frac{1}{\lambda_2^+}e^{\lambda_2^+x_1}g_2(x)\Big]+\frac{a\alpha-1+a}{b}\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{++}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[\frac{1}{\lambda_1^+}e^{\lambda_1^+x_1}g_3(x)+\frac{1}{\lambda_2^+}e^{\lambda_2^+x_1}g_4(x)\Big]+\frac{a\alpha-1-a}{b}\ ,\ (x_1,x_2)\in S^{+-}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[\frac{1}{\lambda_1^+}e^{-\lambda_1^+x_1}g_5(x)+\frac{1}{\lambda_2^+}e^{-\lambda_2^+x_1}g_6(x)\Big]+\frac{-a\alpha+1-a}{b},(x_1,x_2)\in S^{--}; \\ \frac{1}{\sqrt{D}}\Big[\frac{1}{\lambda_1^+}e^{-\lambda_1^+x_1}g_7(x)+\frac{1}{\lambda_2^+}e^{-\lambda_2^+x_1}g_8(x)\Big]+\frac{-a\alpha+1+a}{b},(x_1,x_2)\in S^{-+}; \end{cases}$$

где функции $g_i(x)$, $i=1,...,8$, имеют вид:

$$g_1(x)=e^{2\lambda_1^+f_1(x)}\Big(\lambda_2^+\alpha-\lambda_2^+-1\Big)+2e^{\lambda_1^+f_1(x)}\Big(-\lambda_2^+\alpha+1\Big),$$
$$g_2(x)=e^{2\lambda_2^+f_1(x)}\Big(-\lambda_1^+\alpha+\lambda_1^++1\Big)+2e^{\lambda_2^+f_1(x)}\Big(\lambda_1^+\alpha-1\Big),$$
$$g_3(x)=2\lambda_2^+e^{\lambda_1^+f_2(x)}-\lambda_2^+\alpha-\lambda_2^++1,\quad g_4(x)=-2\lambda_1^+e^{\lambda_2^+f_2(x)}+\lambda_1^+\alpha+\lambda_1^+-1,$$
$$g_5(x)=e^{2\lambda_1^+f_3(x)}\Big(-\lambda_2^+\alpha+\lambda_2^++1\Big)+2e^{\lambda_1^+f_3(x)}\Big(-\lambda_2^+\alpha-1\Big),$$
$$g_6(x)=e^{2\lambda_2^+f_3(x)}\Big(\lambda_1^+\alpha-\lambda_1^+-1\Big)+2e^{\lambda_2^+f_3(x)}\Big(-\lambda_1^+\alpha+1\Big),$$
$$g_7(x)=-2\lambda_2^+e^{\lambda_1^+f_4(x)}+\lambda_2^+\alpha+\lambda_2^+-1,\quad g_8(x)=2\lambda_1^+e^{\lambda_2^+f_4(x)}-\lambda_1^+\alpha-\lambda_1^++1,$$

а функции $f_i(x)$, $i=1,2,3,4$, определены в (22).

В случае Варианта 1c вычисления являются наиболее сложными, поскольку фундаментальные системы решений уравнений (10), при $u_1=1$ и $u_1=-1$ соответственно, образуют функции

$$F_1^{\pm}(x_1)=e^{\pm\frac{a}{2}x_1}\cos{(\gamma x_1)},\ F_2^{\pm}(x_1)=e^{\pm\frac{a}{2}x_1}\sin{(\gamma x_1)},$$

где $\gamma=\frac{\sqrt{-(a^2+4b)}}{2}\neq 0$.

Проведя вычисления, аналогичные приведенным выше, получим вид отображения в данном случае:

$$
\Phi_1(x_1,x_2)=
$$

$$
=\begin{cases}
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_1(x)}\Big[2\alpha\cos\gamma(f_1(x)+x_1)-\frac{a\alpha-2}{\gamma}\sin\gamma(f_1(x)+x_1)\Big]+e^{af_1(x)}\Big[(1-\alpha)\times \\
\times\cos\gamma(2f_1(x)+x_1)+\frac{a\alpha-a-2}{2\gamma}\sin\gamma(2f_1(x)+x_1)\Big]\Big\}-\alpha-1,\ x\in S^{++}; \\
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_2(x)}\Big[-2\cos\gamma(f_2(x)+x_1)+\frac{a}{\gamma}\sin\gamma(f_2(x)+x_1)\Big]+ \\
+(\alpha+1)\cos\gamma x_1-\frac{a\alpha+a-2}{2\gamma}\sin\gamma x_1\Big\}-\alpha+1,\ x\in S^{+-}; \\
e^{-\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_3(x)}\Big[-2\alpha\cos\gamma(f_3(x)-x_1)+\frac{a\alpha-2}{\gamma}\sin\gamma(f_3(x)-x_1)\Big]+e^{af_3(x)}\times \\
\times\Big[(\alpha-1)\cos\gamma(2f_3(x)-x_1)-\frac{a\alpha-a-2}{2\gamma}\sin\gamma(f_3(x)-x_1)\Big]\Big\}+\alpha+1,\ x\in S^{--}; \\
e^{-\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_4(x)}\Big[2\cos\gamma(f_4(x)-x_1)-\frac{a}{\gamma}\sin\gamma(f_4(x)-x_1)\Big]- \\
-(\alpha+1)\cos\gamma x_1-\frac{a\alpha+a-2}{2\gamma}\sin\gamma x_1\Big\}+\alpha-1,\ x\in S^{-+};
\end{cases}
$$

$$
\Phi_2(x_1,x_2)=
$$

$$
=\begin{cases}
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_1(x)}\Big[\frac{-2a\alpha+2}{b}\cos\gamma(f_1(x)+x_1)+\frac{(a^2+2b)\alpha-a}{b\gamma}\sin\gamma(f_1(x)+x_1)\Big]+ \\
+e^{af_1(x)}\Big[\frac{a\alpha-a-1}{b}\cos\gamma(2f_1(x)+x_1)-\frac{(a^2+2b)(\alpha-1)-a}{2b\gamma}\sin\gamma(2f_1(x)+x_1)\Big]\Big\}+ \\
+\frac{a\alpha+a-1}{b},\ x\in S^{++}; \\
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_2(x)}\Big[\frac{2a}{b}\cos\gamma(f_2(x)+x_1)-\frac{a^2+2b}{b\gamma}\sin\gamma(f_2(x)+x_1)\Big]- \\
-\frac{a\alpha+a-1}{b}\cos\gamma x_1+\frac{(a^2+2b)(\alpha+1)-a}{2b\gamma}\sin\gamma x_1\Big\}+\frac{a\alpha-a-1}{b},\ x\in S^{+-}; \\
e^{-\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_3(x)}\Big[\frac{2a\alpha-2}{b}\cos\gamma(f_3(x)-x_1)-\frac{(a^2+2b)\alpha-a}{b\gamma}\sin\gamma(f_3(x)-x_1)\Big]+ \\
+e^{af_3(x)}\Big[-\frac{a\alpha-a-1}{b}\cos\gamma(2f_3(x)-x_1)+\frac{(a^2+2b)(\alpha-1)-a}{2b\gamma}\sin\gamma(2f_3(x)-x_1)\Big]\Big\}- \\
-\frac{a\alpha+a-1}{b},\ x\in S^{--}; \\
e^{\frac{a}{2}x_1}\Big\{e^{\frac{a}{2}f_4(x)}\Big[-\frac{2a}{b}\cos\gamma(f_4(x)-x_1)+\frac{a^2+2b}{b\gamma}\sin\gamma(f_4(x)-x_1)\Big]+ \\
+\frac{a\alpha+a-1}{b}\cos\gamma x_1+\frac{(a^2+2b)(\alpha+1)-a}{2b\gamma}\sin\gamma x_1\Big\}-\frac{a\alpha-a-1}{b},\ x\in S^{-+};
\end{cases},
$$

где функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, определены в (22).

Наконец, рассмотрим Вариант 2. В этом случае корнями уравнения (11) являются числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = u_1 a$.

При $a \neq 0$ частное решение уравнения (9) имеет вид $v(x_1) = qx_1$. Несложно найти, что $q = \alpha + u_1 u_2 - \frac{1}{a}$. Фундаментальные системы решений уравнений (10) при $u_1 = 1$ и $u_1 = -1$ соответственно, образуют функции

$$F_1^{\pm}(x_1) \equiv 1, \; F_2^{\pm}(x_1) = e^{\pm a x_1} \; .$$

Так же, как и при рассмотрении Варианта 1, получаем вид отображения в этом случае:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{a x_1} \Big(- e^{2a f_1(x)} + 2 e^{a f_1(x)} \Big) - \frac{1}{a} \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{++} \;; \\ \frac{1}{a} \Big(e^{a x_1} - 1 \Big) \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{+-} \;; \\ \frac{1}{a} e^{-a x_1} \Big(e^{2a f_3(x)} - 2 e^{a f_3(x)} \Big) + \frac{1}{a} \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{--} \;; \\ \frac{1}{a} \Big(- e^{a x_1} + 1 \Big) \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{-+} \;; \end{cases} \tag{23}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} e^{a x_1} \Big(- e^{2a f_1(x)} + 2 e^{a f_1(x)} \Big) + \big(\alpha + 1 - \frac{1}{a} \big) x_1 + \\ \quad + 2 f_1(x) - \frac{1}{a^2} \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{++} \;; \\ \frac{1}{a^2} \Big(e^{a x_1} - 1 \Big) + \big(\alpha - 1 - \frac{1}{a} \big) x_1 - 2 f_2(x), \; (x_1, x_2) \in S^{+-}; \\ \frac{1}{a^2} e^{-a x_1} \Big(e^{2a f_3(x)} - 2 e^{a f_3(x)} \Big) + \big(\alpha + 1 - \frac{1}{a} \big) x_1 - \\ \quad - 2 f_3(x) + \frac{1}{a^2} \;, \quad (x_1, x_2) \in S^{--} \;; \\ \frac{1}{a^2} \Big(- e^{-a x_1} + 1 \Big) + \big(\alpha - 1 - \frac{1}{a} \big) x_1 + 2 f_4(x), \; (x_1, x_2) \in S^{-+}; \end{cases} \tag{24}$$

где функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$, определены в (22).

Если же $a = b = 0$, то, получим отображение траекторий системы (1) на траектории системы

$$\begin{cases} \dot{y_1} = u_1 \;, \\ \dot{y_2} = y_1 + \alpha u_1 + u_2 \;. \end{cases}$$

Проделав все те же выкладки, получим, что это отображение имеет вид

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2) = x_1 \;, \quad (x_1, x_2) \in R^2 \;, \\ \Phi_2(x_1, x_2) = \alpha x_1 + x_2 \;, \quad (x_1, x_2) \in R^2 \;. \end{cases}$$

3. Исследование области значений отображения

В этом разделе исследуем область значений $R(\Phi)$ полученного отображения. Заметим, что $R(\Phi)$ совпадает со множеством 0-управляемости системы (2).

Подход к исследованию $R(\Phi)$ продемонстрируем на примере случая, когда матрица системы имеет одно нулевое собственное значение, т.е. $a \neq 0$, $b = 0$ и значении $\alpha = 1$.

Пусть $x \in S^{++}$. Обозначим

$$\tau = x_1 - \sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}} + 1, \quad s = -\sqrt{-x_2 + \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}} + 1.$$

Так как $x \in S^{++}$, то $\tau \leq 0$, $s \leq 0$. Тогда отображение (23), (24) принимает вид

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{a}e^{a\tau}\left(-e^{as}+2\right) - \frac{1}{a} , \\ y_2 = \frac{1}{a^2}e^{a\tau}\left(-e^{as}+2\right) + \left(2-\frac{1}{a}\right)(\tau - s) + 2s - \frac{1}{a^2} . \end{cases} \tag{25}$$

Исследуем полученное двухпараметрическое семейство кривых. При $s = 0$, получаем, что

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{a}e^{a\tau} - \frac{1}{a} , \\ y_2 = \frac{1}{a^2}e^{a\tau} + \left(2-\frac{1}{a}\right)\tau - \frac{1}{a^2} . \end{cases}$$

Эта кривая является заданной в параметрическом виде траекторией системы (2), ведущей в начало координат с управлением $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. Для $-\infty < s < 0$ при $\tau = 0$ получаем множество начал кривых из семейства (26):

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{a}e^{as} + \frac{1}{a} , \\ y_2 = -\frac{1}{a^2}e^{a\tau} + \frac{s}{a} + \frac{1}{a^2} . \end{cases}$$

Полученная кривая является заданной в параметрическом виде траекторией системы (2), ведущей в начало координат с управлением $u_1 = -1$, $u_2 = 1$.

Пусть $x \in S^{+-}$. Обозначим

$$\tau = x_1, \quad s = x_2 - \frac{1}{2}(x_1-1)^2 + \frac{1}{2}.$$

Так как $x \in S^{+-}$, то $\tau \leq 0$, $2p \leq s \leq 0$. Тогда отображение (23), (24) принимает вид

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{a}e^{a\tau} - \frac{1}{a} , \\ y_2 = \frac{1}{a^2}e^{a\tau} - \frac{p}{a} + s - \frac{1}{a^2} . \end{cases} \tag{26}$$

Исследуем полученное двухпараметрическое семейство кривых. При $s = 0$, получаем, что

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{a}e^{a\tau} - \frac{1}{a} , \\ y_2 = \frac{1}{a^2}e^{a\tau} - \frac{p}{a} - \frac{1}{a^2} . \end{cases}$$

Эта кривая является заданной в параметрическом виде траекторией системы (2), ведущей в начало координат с управлением $u_1 = 1$, $u_2 = -1$. При $s = 2p$ получаем заданную в параметрическом виде траекторию системы (2), ведущую в начало координат с управлением $u_1 = 1$, $u_2 = 1$.

При $x \in S^{--}$ и $x \in S^{-+}$ действуем аналогично.

При $a < 0$ кривые из четырех семейств заполняют всю плоскость. Таким образом, область значений отображения (23), (24) в данном случае - все пространство R^2. Эти результаты представлены на рисунке 2.

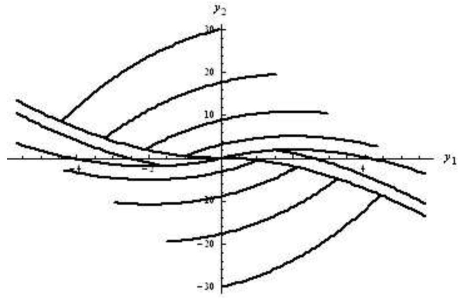

Рис. 2: Область значений отображения в случае, когда матрица системы (2) имеет нулевое и отрицательное собственные значения.

При $a > 0$ все кривые из получаемых семейств имеют вертикальные асимптоты при $\tau \to -\infty$: $y_1 = \frac{1}{a}$ и $y_1 = -\frac{1}{a}$. Кроме того, если $a \geq \frac{1}{2}$, то все кривые являются монотонными. Если же $0 < a < \frac{1}{2}$, то кривые имеют точки экстремумов. Таким образом, область значений отображения (23), (24) в данном случае – полоса $-\frac{1}{a} < y_1 < \frac{1}{a}$. Эти результаты представлены на рисунках 3 и 4.

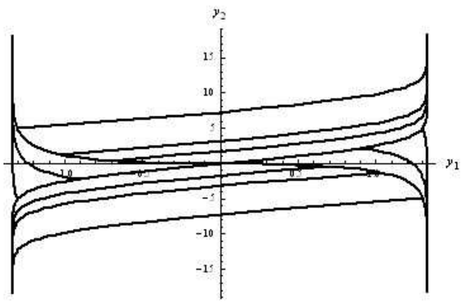

Рис. 3: $R(\Phi)$ в случае, когда $b = 0$, $a \geq \frac{1}{2}$.

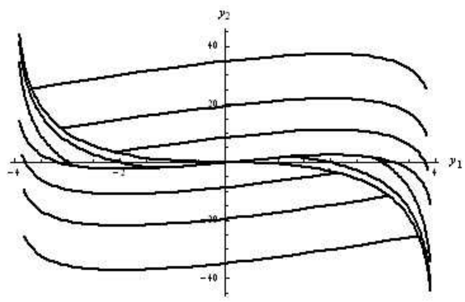

Рис. 4: $R(\Phi)$ в случае, когда $b = 0$, $0 < a < \frac{1}{2}$.

Аналогично получаем область значений отображения (23), (24) для случаев 1a и 1b. Заметим, что в случае, когда оба собственных значения матрицы системы (2) отрицательны, то $R(\Phi) = R^2$. Если же имеется положительное собственное значение, то вид $R(\Phi)$ представлен на рисунках 5 и 6.

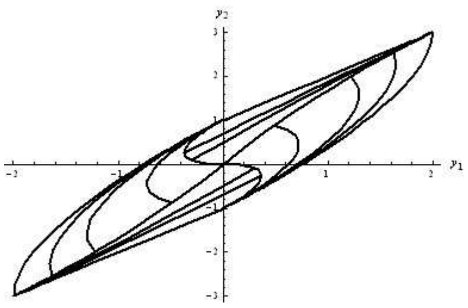

Рис. 5: $R(\Phi)$ в случае равных положительных собственных значений матрицы системы (2).

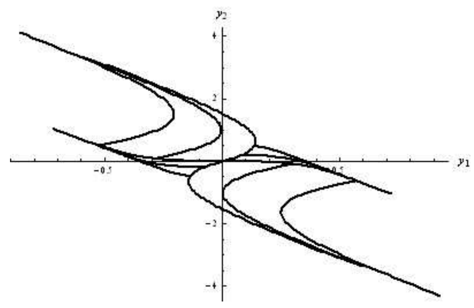

Рис. 6: $R(\Phi)$ в случае различных положительных собственных значений матрицы системы (2).

На рисунке 7 представлена специальная область 0-управляемости системы (1) в случае, когда матрица системы (2) имеет комплексно-сопряженные собственные значения.

На рисунке 8 – область значений отображения для случая 1с, когда собственные значения матрицы системы имеют неотрицательную вещественную часть.

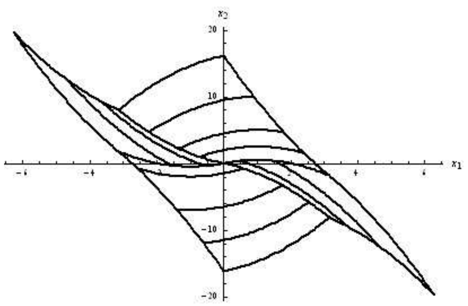

Рис. 7: Специальная область 0-управляемости системы (1) в случае, когда матрица системы (2) имеет комплексно-сопряженные собственные значения.

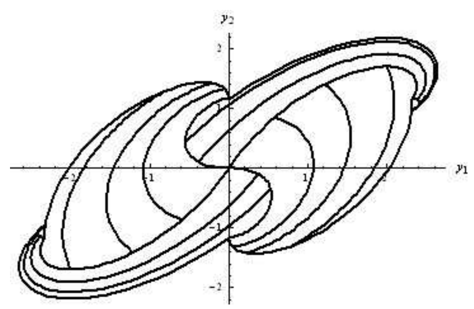

Рис. 8: Область значений отображения в случае, когда матрица системы (2) имеет комплексные собственные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134(176), № 2(10). – С. 186 – 206.

2. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. A Classification of Linear Time-Optimal Control Problems in a Neighborhood of the Origin // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1996. – Vol. 203. – P. 791-811.

3. Korobov V.I., Ivanova T.I. Nonsmooth Mapping of Linear Control Systems // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2001. – Vol. 108, No. 2. – P. 389 – 405.

4. В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. – М., Наука. – 1969. – 408 с.

5. Математическая теория оптимальних процессов. / Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г. Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. – М.: Наука, 1961. – 391 с.

6. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. – М.: Мир. – 1964. – 830 с.

Статья получена: 3.03.2012; принята: 18.04.2012.