Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 1030, 2012, с.38–53

Автономная периодическая задача для уравнения типа Хилла

Е. В. Чуйко, О. Е. Любимая, Ан. С. Чуйко

Донбаский государственный педагогический университет,
ул. Г.Батюка, 19, 84116, г.Славянск, Украина
chujko-slav@inbox.ru,
olya.pirus@rambler.ru

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла в частном критическом случае, а также итерационная схема, построенная по методу наименьших квадратов.
Ключевые слова: автономная периодическая задача, уравнение типа Хилла, метод наименьших квадратов.

Чуйко О. В., Любима О. Є., Чуйко Ан. С., **Автономна періодична задача для рівняння типу Хілла.** Знайдено необхідні і достатні умови існування розв'язків нелінійної автономної періодичної задачі для рівняння типу Хілла в частинному критичному випадку, а також ітераційна схема, побудована по методу найменших квадратів.
Ключові слова: автономна періодична задача, рівняння типу Хілла, метод найменших квадратів.

E. V. Chujko, O. E. Liubyma, An. S. Chujko, **An autonomous periodical problem for a Hill type equation.** We find necessary and sufficient conditions for existence of solution to a nonlinear autonomous periodic problem for a Hill type equation in a particular critical case, and also constructed a scheme according the least square technique.
Keywords: autonomous periodic problem, a Hill type equation, the least square technique.

2000 Mathematics Subject Classification 34B15.

Постановка задачи

Исследована задача о построении решения [1, 2, 3]

$$y(t,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,\mathfrak{T}_1(\varepsilon)], \ \mathfrak{T}_1(0)=2\pi, \ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

автономной периодической задачи для уравнения типа Хилла [4], [5, с. 315]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \varepsilon \cdot Y(y, \varepsilon). \tag{1}$$

Периодическое решение уравнения (1) ищем в малой окрестности нетривиального $2\pi-$периодического решения $y_0(t) \in C^2[0, 2\pi]$ порождающего уравнения

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0.$$

Здесь $Y(y, \varepsilon)-$ нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Существенным отличием задачи о нахождении периодического решения автономного уравнения (1) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое решение $z(t, \varepsilon)$ уравнения (1) существует наряду с целой серией решений $z(t + h, \varepsilon)$, отличающихся от исходного сдвигом по независимой переменной. Этот факт позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметричным, например $y_0(t) = c_0 \cdot \cos t$, $c_0 \in \mathbb{R}^1$, при этом периодические решения задачи (1), соответствующие синусам в порождающем решении могут быть получены простым смещением начального момента времени [1, с. 148]. Согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) является критической [1]. Для произвольной правой части $2\pi-$ периодическая задача

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = f(t), \quad f(t) \in C[0, 2\pi]$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} f(s)\, ds = 0$$

и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее решение вида

$$y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t + g\Big[f(s)\Big](t), \quad g\Big[f(s)\Big](t) := \int_0^t \sin(t-s) f(s)\, ds \quad c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Представим период

$$\mathfrak{T}(\varepsilon) = 2\pi\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big), \quad \beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta_0$$

искомого решения периодической задачи для уравнения (1) через новую неизвестную $\beta(\varepsilon)$.

Условия существования решения

Совершая в $\mathfrak{T}(\varepsilon)-$ периодической задаче для уравнения (1) замену независимой переменной [1]

$$t=\tau\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big),$$

приходим к задаче об отыскании $2\pi-$ периодического решения уравнения

$$\frac{d^2y(\tau,\varepsilon)}{d\tau^2}+y(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)-\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot y(\tau,\varepsilon). \quad (2)$$

Условие разрешимости $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (2)

$$\int_0^{2\pi}\left[\begin{array}{c}\cos s\\ \sin s\end{array}\right]\left\{\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon)-\beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot y(s,\varepsilon)\right\}ds=0$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд

$$F(\check c_0):=\int_0^{2\pi}\left[\begin{array}{c}\cos s\\ \sin s\end{array}\right]\left\{Y(y_0(s,c_0)-2\cdot\beta_0\cdot y_0(s,c_0)\right\}ds=0. \quad (3)$$

Лемма 1. *Если $2\pi-$ периодическая задача для уравнения (1) имеет решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее $y_0(t,c_0)=c_0\cdot\cos t$, то вектор*

$$\check c_0:=\mathrm{col}\Big(c_0,\ \beta_0\Big)\in\mathbb{R}^2$$

удовлетворяет уравнению (3).

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (3) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check c_0\in\mathbb{R}^2$ уравнения (3), приходим к задаче об отыскании решения $2\pi-$ периодической задачи для уравнения (1)

$$y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$. В случае простых

$$\det B_0\neq 0,\quad B_0=:\left.\frac{\partial F(\check c)}{\partial \check c}\right|_{\check c\ =\check c_0}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

корней уравнения для порождающих амплитуд (3) $2\pi-$ периодическая задача для уравнения (1) имеет единственное решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее $y_0(\tau,c_0)$. Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [1, 3, 6, 7, 8]. Менее изученным является случай кратных корней ($\det B_0=0$) уравнения (3); при условии [9, 10]

$$\left.\frac{\partial F_\rho(\check c)}{\partial c}\right|_{\check c\ =\check c_0,}\equiv 0,\quad \left.\frac{\partial F_\rho(\check c)}{\partial \beta}\right|_{\check c\ =\check c_0,}\neq 0$$

согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [2], а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд не обращается в тождество [11], при этом общее решение зависит от функции $\beta(\varepsilon)$, которая однозначно определяется в процессе построения решения. Назовем этот случай частным критическим случаем.

Оставляя только одну линейно-независимую строку уравнения (3), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи (1) в частном критическом случае

$$F_\rho(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s)\Big\{Y(y_0(s,c_0) - 2\cdot\beta_0\cdot y_0(s,c_0)\Big\}\,ds = 0; \tag{4}$$

здесь $H_\rho(t) = \cos t$, либо $H_\rho(t) = \sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y,\varepsilon)$ задачи (1). В статье [9] для нахождения периодического решения уравнения (1) в частном критическом случае были предложены итерационные техники, построенные по схеме, эквивалентной методу простых итераций. Целью данной статьи является построение итерационной техники для нахождения решения этой задачи на основе метода Ньютона-Канторовича с использованием метода наименьших квадратов [14]. Периодическое решение уравнения (1) в частном критическом случае имеет вид

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon), \quad x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon g\Big[y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big](\tau),$$

где

$$g\Big[y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big](\tau) := \varepsilon g\bigg[\Big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)^2\cdot Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon) - \beta(\varepsilon)\Big(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\cdot y(s,\varepsilon)\bigg](\tau).$$

Условие разрешимости периодической задачи для уравнения (1) в частном критическом случае приводит к уравнению

$$\Phi\Big(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big) := \mathcal{B}_0\Big(y(\cdot,\varepsilon)\Big)\cdot\beta(\varepsilon) +$$

$$+\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\bigg[\Big(1+\varepsilon^2\beta^2(\varepsilon)\Big)\cdot Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon) - \varepsilon\beta^2(\varepsilon)\cdot y(s,\varepsilon)\bigg]\,ds = 0.$$

Таким образом, в частном критическом случае периодическая задача для уравнения (1) равносильна операторной системе

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon), \quad x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon g\Big[y(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big](\tau),$$

$$\Phi\Big(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big) = 0. \tag{5}$$

Предположим, что для произвольной функции

$y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi],\ \ y(\tau,\cdot)\in C[0,\varepsilon^*],\ \ y(\tau,0)\equiv y_0(\tau,c_0),\ \ ||x(t,\varepsilon)||\le q,\ \ \varepsilon^*\le\varepsilon_0$

имеют место неравенства

$$\left|\left|\Phi\Big(y(\cdot,\varepsilon),\beta_0\Big)\right|\right|_{C[0;\varepsilon^*]}\le\mu_1(\varepsilon^*),\ \left|\left|\Big[\Phi'_\beta\Big(y(\cdot,\varepsilon),\beta_0\Big)\Big]^{-1}\right|\right|_{C[0;\varepsilon^*]}\le\mu_2(\varepsilon^*),$$

$$\left|\left|\Phi''_{\beta^2}\Big(y(\cdot,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big)\right|\right|_{C[0;\varepsilon^*]}\le\mu_3(\varepsilon^*).$$

Для нахождения решения операторной системы (5) при условии

$$\mathcal{B}_0\Big(y(\cdot,\varepsilon)\Big):=\int_0^{2\pi}2H_\rho(s)\Big[\varepsilon Y(y(s,\varepsilon),\varepsilon)-y(s,\varepsilon)\Big]\,ds\neq 0$$

применима итерационная схема, построенная на основе метода Ньютона-Канторовича

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \ x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon g\Big[y_k(s,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon)\Big](\tau),$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_k(\varepsilon)-\Big[\Phi'_\beta\Big(y_k(\cdot,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\Phi\Big(y_k(\cdot,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon)\Big),$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{6}$$

Согласно теореме Ньютона-Канторовича [13, с. 680, 682] условие сходимости итерационной схемы (6) имеет вид $2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)<1$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого корня* $\check{c}_0\in\mathbb{R}^2$ *уравнения для порождающих амплитуд (3) при условии* $\mathcal{B}_0\Big(y(\cdot,\varepsilon)\Big)\neq 0$ *периодическая задача для уравнения (1) имеет единственное решение, при* $\varepsilon=0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(\tau,c_0)$. *В случае*

$$2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)<1$$

это решение можно определить при помощи итерационного процесса (6).

Продемонстрируем способ построения модифицированной итерационной техники для нахождения приближенных решений периодической задачи для уравнения (1) с использованием метода наименьших квадратов [14], обеспечивающих большую точность при меньшем числе итераций. Решение периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$. Используя непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функции $Y(y,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_0(\tau,c_0),0)+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)x(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)+\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_0(\tau,c_0),\\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_0(\tau,c_0),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

Первое приближение

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon)$$

к решению 2π-периодической задачи для уравнения (2) ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$x_1''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2\cdot x_1(\tau,\varepsilon)= \tag{7}$$

$$=\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2\cdot\Big\{Y(y_0(\tau,c_0),0)+\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)x_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)\Big\}.$$

Пусть $\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \dots,\ \varphi_\mu(\tau),\ \dots$ – система линейно-независимых дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных функций. Приближение к периодическому решению уравнения (7) ищем в виде

$$x_1(\tau,\varepsilon)\approx\xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon);$$

здесь

$$\varphi_1(\tau):=\Big[\varphi_1^{(1)}(\tau)\ \ \varphi_1^{(2)}(\tau)\ \ \dots\ \ \varphi_1^{(\mu_1)}(\tau)\Big]$$

— $(1\times\mu_1)$– матрица. Потребуем

$$\Bigg\|\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2\cdot\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)-1\Big]\xi_1(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2\cdot\Big[Y(y_0(\tau,c_0),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)\Big] - \xi_1''(\tau,\varepsilon) - y_0''(\tau,c_0) - \Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot y_0(\tau,c_0)\Big\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min$$

при фиксированной матрице $\varphi_1(t)$. Обозначим $(1\times\mu_1)-$ матрицу

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) = \Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot \Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(\tau,c_0)\Big) - 1\Big]\varphi_1(\tau) - \varphi_1''(\tau).$$

При условии

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big] \neq 0, \quad \Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\, d\tau$$

находим вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Big\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot \Big[Y(y_0(\tau,c_0),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)\Big] - y_0''(\tau,c_0) - \Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot y_0(\tau,c_0)\Big\}d\tau.$$

В случае $\gamma_1(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon^*]$ и $\mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)\Big) \neq 0$ первое приближение $\beta_1(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ вычисляем по формуле Ньютона:

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta_0 - \left[\frac{\partial\Phi\Big(\beta_0, y_1(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta}\right]^{-1} \cdot \Phi\Big(\beta_0, y_1(\tau,\varepsilon)\Big);$$

здесь

$$\frac{\partial\Phi\Big(\beta_0, y_1(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta} = \mathcal{B}_0\Big(y_1(\cdot,\varepsilon)\Big)+$$

$$+\int_0^{2\pi} H_\rho(s)\Big[2\varepsilon^2\beta_0 \cdot Y(y_1(s,\varepsilon),\varepsilon) - 2\varepsilon\beta_0 \cdot y_1(s,\varepsilon)\Big]\, ds.$$

Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (2) ищем, как отклонение от первого

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_2(\tau,\varepsilon), \quad x_2(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \quad \xi_2(\tau,\varepsilon) = \varphi_2(\tau)\gamma_2(\varepsilon).$$

Предположим, что найденное первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon)$ принадлежит области определения функции $Y(y,\varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau,\varepsilon)$ функции $Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ в окрестности первого приближения $y_1(\tau,\varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_2(\tau,\varepsilon)=0$ и $\varepsilon=0$:

$$Y(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)+\mathcal{R}(y_1(\tau,\varepsilon)+\xi_2(\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{l} y\ =\ y_1(\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon\ =\ 0, \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\begin{array}{l} y\ =\ y_1(\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon\ =\ 0. \end{array}}$$

Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (2) ищем как 2π-периодическое решение уравнения

$$y_2''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_2(\tau,\varepsilon)= \tag{8}$$

$$\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Big\{Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\xi_2(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\Big\}.$$

Обозначим $(1\times\mu)-$ матрицу

$$\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)=\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)-1\Big]\varphi_2(\tau)-\varphi_2''(\tau);$$

здесь

$$\varphi_2(\tau):=\Big[\varphi_2^{(1)}(\tau)\ \ \varphi_2^{(2)}(\tau)\ \ \ldots\ \ \varphi_2^{(\mu_2)}(\tau)\Big]$$

— $(1\times\mu_2)-$ матрица. При условии

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0,\quad \Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big):=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$\gamma_2(\varepsilon)=-\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\cdot\Big\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Big[Y(y_1(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_1(\tau,\varepsilon)\Big)\Big]-\Big(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_1(\tau,\varepsilon)-y_1''(\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau.$$

При условии $\gamma_2(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon^*]$ и $\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot, \varepsilon)\Big) \neq 0$ второе приближение $\beta_2(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ вычисляем по формуле Ньютона:

$$\beta_2(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) - \left[\frac{\partial \Phi\Big(\beta_1(\varepsilon), y_1(\tau, \varepsilon)\Big)}{\partial \beta}\right]^{-1} \cdot \Phi\Big(\beta_1(\varepsilon), y_1(\tau, \varepsilon)\Big);$$

здесь

$$\frac{\partial \Phi\Big(\beta_1(\varepsilon), y_1(\tau, \varepsilon)\Big)}{\partial \beta} = \mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot, \varepsilon)\Big) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} H_\rho(s) \Big[2\varepsilon^2 \beta_1(\varepsilon) \cdot Y(y_2(s, \varepsilon), \varepsilon) - 2\varepsilon \beta_1(\varepsilon) \cdot y_2(s, \varepsilon)\Big]\, ds.$$

Продолжая рассуждения, предположим, что найдено наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$y_k(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), \quad x_k(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ \dots\ + \xi_k(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi_k(\tau, \varepsilon) = \varphi_k(\tau)\gamma_k(\varepsilon), \quad \gamma_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_k}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots$$

к решению 2π-периодической задачи для уравнения (2) и приближение $\beta_k(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее приближение ищем в виде

$$y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau, \varepsilon) + \ \dots\ + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon),$$

$$\xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau)\gamma_{k+1}(\varepsilon), \quad \gamma_{k+1}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_{k+1}}.$$

Предположим, что найденное приближение

$$y_k(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon)$$

принадлежит области определения функции $Y(y, \varepsilon)$. Используя непрерывную дифференцируемость по $y(\tau, \varepsilon)$ функции $Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ в окрестности приближения $y_k(\tau, \varepsilon)$ и непрерывную дифференцируемость по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $\xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$Y(y_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = Y(y_k(\tau, \varepsilon), 0) +$$

$$+ \mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau, \varepsilon)\Big)\xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon \mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau, \varepsilon)\Big) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon), \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_k(\tau, \varepsilon)\Big) = \left.\frac{\partial Y(y(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y\ =\ y_k(\tau, \varepsilon), \\ \varepsilon\ =\ 0,}}$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)=\frac{\partial Y(y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{y\ =\ y_k(\tau,\varepsilon),\\ \varepsilon\ =\ 0.}}$$

При условии

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0,\quad \Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon)=-\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\Big\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot\Big[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\Big]-\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_k(\tau,\varepsilon)-y_k''(\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau.$$

В случае $\gamma_{k+1}(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon^*]$ и $\mathcal{B}_0\Big(y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\neq 0$ следующее приближение $\beta_{k+1}(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$ вычисляем по формуле Ньютона:

$$\beta_{k+1}(\varepsilon)=\beta_k(\varepsilon)-\left[\frac{\partial\Phi\Big(\beta_k(\varepsilon),y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta}\right]^{-1}\cdot\Phi\Big(\beta_k(\varepsilon),y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big);$$

здесь

$$\frac{\partial\Phi\Big(\beta_k(\varepsilon),y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta}=\mathcal{B}_0\Big(y_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)+$$

$$+\int_0^{2\pi}H_\rho(s)\Big[2\varepsilon^2\beta_k(\varepsilon)\cdot Y(y_{k+1}(s,\varepsilon),\varepsilon)-2\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\cdot y_{k+1}(s,\varepsilon)\Big]\,ds.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любого действительного корня $\check{c}_0\in\mathbb{R}^2$ уравнения для порождающих амплитуд (3) при условии $\gamma_k(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon^*]$ и $\mathcal{B}_0\Big(y(\cdot,\varepsilon)\Big)\neq 0$ периодическая задача для уравнения (1) имеет единственное решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее $y_0(\tau,c_0)$. В случае*

$$2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)<1,\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon^*],\quad \det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]\neq 0,\quad k\in\mathbb{N}$$

это решение можно определить при помощи итерационного процесса

$$y_1(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),\quad x_1(\tau,\varepsilon)=\xi_1(\tau,\varepsilon),\quad \xi_1(\tau,\varepsilon)=\varphi_1(\tau)\gamma_1(\varepsilon),$$

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\Bigg[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Bigg]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot \Bigg[Y(y_0(\tau,c_0),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_0(\tau,c_0)\Big)\Bigg] - y_0''(\tau,c_0) - \Big(1+\varepsilon\beta_0\Big)^2 \cdot y_0(\tau,c_0)\Bigg\}d\tau,$$

$$\beta_1(\varepsilon) = \beta_0 - \left[\frac{\partial\Phi\Big(\beta_0, y_1(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta}\right]^{-1} \cdot \Phi\Big(\beta_0, y_1(\tau,\varepsilon)\Big), \ \ldots ;$$

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon), \quad x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \xi_1(\tau,\varepsilon) + \ \ldots \ + \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon), \tag{9}$$

$$\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau)\gamma_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,$$

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon) = -\Bigg[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Bigg]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+1}^*(\tau,\varepsilon) \cdot \Bigg\{\varepsilon\Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2 \cdot \Bigg[Y(y_k(\tau,\varepsilon),0)+$$

$$+\varepsilon\mathcal{A}_2\Big(y_k(\tau,\varepsilon)\Big)\Bigg] - \Big(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon)\Big)^2 \cdot y_k(\tau,\varepsilon) - y_k''(\tau,\varepsilon)\Bigg\}d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_k(\varepsilon) - \left[\frac{\partial\Phi\Big(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big)}{\partial\beta}\right]^{-1} \cdot \Phi\Big(\beta_k(\varepsilon), y_{k+1}(\tau,\varepsilon)\Big), \ \ldots .$$

С учетом замены независимой переменной, итерационная схема (9) определяет приближенное решение $\mathfrak{T}(\varepsilon)-$периодической задачи для уравнения Хилла (1).

Периодическая задача для уравнения Дюффинга

Исследуем задачу о построении периодического решения уравнения Дюффинга [1]

$$y'' + y = \varepsilon \cdot y^3. \tag{10}$$

Уравнение для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (10) имеет серию корней

$$\beta_0 = \frac{3c_0^2}{8}, \quad c_0 \neq 0, \quad c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Положим для определенности $c_0 = 1,\ \varepsilon_0 = 0,3,\ q = 0,1$. Заметим, что в малой окрестности $2\pi-$периодического порождающего решения уравнения Дюффинга $y_0(t,c_0) = \cos t$ имеет место неравенство $\mathcal{B}_0(y(\cdot,\varepsilon)) \neq 0$; действительно: $\mathcal{B}_0(y(\cdot,\varepsilon)) \approx -2\pi \neq 0$. Для первого шага итерационной схемы (9) положим

$$\varphi_1(\tau) = \Big[\cos\tau \quad \cos 3\tau \quad \cos 5\tau \ \Big].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(t,c_0)=\cos t$

$$\det\left[\Gamma\left(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\right)\right]=82\ 944\cdot\pi^3\cdot\varepsilon^2+184\ 032\cdot\pi^3\cdot\varepsilon^3+\ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_1(\tau,\varepsilon)\approx-\frac{1}{64}\cdot\left(17\cos\tau+2\cos 3\tau\right)\cdot\varepsilon+\frac{1}{4096}\cdot\left(873\cos\tau+18\cos 3\tau+4\cos 5\tau\right)\cdot\varepsilon^2+$$

$$+\frac{1}{262\ 144}\cdot\left(-42\ 477\cos\tau-618\cos 3\tau+148\cos 5\tau\right)\cdot\varepsilon^3+$$

$$+\frac{3}{16\ 777\ 216}\cdot\left(674\ 847\cos\tau+22\ 870\cos 3\tau+276\cos 5\tau\right)\cdot\varepsilon^4+$$

$$+\frac{5}{1\ 073\ 741\ 824}\cdot\left(19\ 356\ 357\cos\tau+643\ 338\cos 3\tau+27\ 292\cos 5\tau\right)\cdot\varepsilon^5.$$

В этом случае величина

$$2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)\approx 0,0174\ 664\ll 1,\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon^*],\quad \varepsilon^*:=0,3,$$

где

$$\left\|\Phi\left(y_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0\right)\right\|\leq\mu_1(\varepsilon)\approx 0,0386\ 500,$$

$$\left\|\left[\Phi'_\beta\left(y_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0\right)\right]^{-1}\right\|\leq\mu_2(\varepsilon)\approx 0,159\ 155,$$

$$\left\|\Phi''_{\beta^2}\left(y_1(\cdot,\varepsilon),\beta_0\right)\right\|\leq\mu_3(\varepsilon)\approx 1,41\ 972.$$

На первом шаге итерационной схемы (9)

$$\mathcal{B}_0\left(y_1(\cdot,\varepsilon)\right)\approx-2\pi+\frac{65\ \pi\varepsilon}{32}-\frac{3\ 417\ \pi\varepsilon^2}{2\ 048}+\frac{214\ 317\ \pi\varepsilon^3}{131\ 072}-\frac{12\ 919\ 869\ \pi\varepsilon^4}{8\ 388\ 608}+$$

$$+\frac{760\ 140\ 585\ \pi\varepsilon^5}{536\ 870\ 912}+\ \dots\ ,\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon^*],\quad \varepsilon^*=\varepsilon_0=0,3\ .$$

Поскольку

$$-6,26\ 319\leq\mathcal{B}_0\left(y_1(\cdot,\varepsilon)\right)\leq-4,73\ 242\ll 0,$$

постольку

$$\beta_1(\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829\ \varepsilon^2}{32\ 768}-\frac{22\ 515\ \varepsilon^3}{1\ 048\ 576}+\frac{3\ 316\ 047\ \varepsilon^4}{134\ 217\ 728}-$$

$$-\frac{1\ 361\ 181\ \varepsilon^5}{268\ 435\ 456}-\frac{23\ 162\ 603\varepsilon^6}{481173858}-\frac{5\ 336\ 127\ \varepsilon^7}{1\ 488\ 292\ 910}+\ \dots\ .$$

Для второго шага итерационной схемы (9) положим

$$\varphi_2(\tau)=\begin{bmatrix}\cos\tau & \cos 3\tau & \cos 5\tau & \cos 7\tau & \cos 9\tau\end{bmatrix}.$$

Матрица Грама, соответствующая первому приближению $y_1(t,\varepsilon)$:

$$\det\left[\Gamma\left(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\right)\right]=1\ 223\ 059\ 046\ 400\ \pi^5\varepsilon^2+749\ 123\ 665\ 920\ \pi^5\varepsilon^3+\ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_2(\tau,\varepsilon)\approx\frac{104\ 370\ 415}{21\ 458\ 884\ 406}\cdot\varepsilon^3\cos\tau-\frac{37\ 791\ 292}{26\ 551\ 890\ 077}\cdot\varepsilon^4\cos\tau+$$
$$+\frac{5\ 441\ 420}{860\ 224\ 397}\cdot\varepsilon^5\cos\tau-\frac{1\ 275}{131\ 072}\cdot\varepsilon^3\cos 3\tau+\frac{2\ 260\ 379}{1\ 292\ 883\ 775}\cdot\varepsilon^4\cos 3\tau-$$
$$-\frac{11\ 436\ 364}{4\ 361\ 547\ 835}\cdot\varepsilon^5\cos 3\tau-\frac{9}{16\ 384}\cdot\varepsilon^3\cos 5\tau+\frac{1\ 087}{2\ 097\ 152}\cdot\varepsilon^4\cos 5\tau-$$
$$-\frac{730\ 419}{54\ 148\ 125\ 667}\cdot\varepsilon^5\cos 5\tau-\frac{1}{32\ 768}\cdot\varepsilon^3\cos 7\tau-\frac{11}{2\ 097\ 152}\cdot\varepsilon^4\cos 7\tau-$$
$$-\frac{1\ 639}{67\ 108\ 864}\cdot\varepsilon^5\cos 7\tau+\frac{1}{1\ 048\ 576}\cdot\varepsilon^4\cos 9\tau+\frac{21}{67\ 108\ 864}\cdot\varepsilon^5\cos 9\tau+\ \dots\ .$$

В этом случае величина

$$2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)\approx 0,0208\ 364\ll 1.$$

Поскольку

$$-6,26\ 319\le\mathcal{B}_0\left(y_2(\cdot,\varepsilon)\right)\le -4,73\ 309\ll 0,$$

постольку

$$\beta_2(\tau,\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829}{32\ 768}\cdot\varepsilon^2-\frac{31\ 489\ 782\ 921}{1\ 466\ 552\ 552\ 026}\cdot\varepsilon^3+$$
$$+\frac{5\ 945\ 428\ 205}{240\ 642\ 508\ 616}\cdot\varepsilon^4-\frac{11\ 597\ 633\ 572}{2\ 287\ 143\ 294\ 343}\cdot\varepsilon^5-\frac{13\ 539\ 110}{325\ 261\ 941}\cdot\varepsilon^6+\ \dots\ .$$

Для третьего шага итерационной схемы (9) положим $\varphi_2(\tau)=\varphi_3(\tau)$. Матрица Грама, соответствующая второму приближению $y_2(t,\varepsilon)$:

$$\det\left[\Gamma\left(\mathcal{F}_3(\cdot,\varepsilon)\right)\right]=1\ 223\ 059\ 046\ 400\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^2+749\ 123\ 665\ 920\cdot\pi^5\cdot\varepsilon^3+\ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом

$$\xi_3(\tau,\varepsilon)\approx\frac{\varepsilon^3\cos\tau}{428\ 514\ 300\ 968\ 836\ 855}-\frac{\varepsilon^4\cos\tau}{269\ 975\ 427\ 309\ 390\ 936}+$$

$$+\frac{\varepsilon^5\cos\tau}{831\ 438\ 530\ 412\ 169\ 969}-\frac{5\ 008\ 535}{3\ 236\ 505\ 422}\cdot\varepsilon^6\cos\tau-$$
$$-\frac{17\ 902\ 164}{11\ 854\ 004\ 941}\cdot\varepsilon^7\cos\tau+\frac{18\ 071\ 621}{534\ 357\ 753}\cdot\varepsilon^8\cos\tau+$$
$$+\frac{\varepsilon^4\cos 3\tau}{1\ 320\ 989\ 618\ 499\ 093\ 213}+\frac{\varepsilon^5\cos 3\tau}{558\ 452\ 132\ 729\ 249\ 763}+$$
$$+\frac{4\ 020\ 697}{1\ 299\ 083\ 229}\cdot\varepsilon^6\cos 3\tau+\frac{4\ 315\ 609}{1\ 278\ 506\ 176}\cdot\varepsilon^7\cos 3\tau+$$
$$+\frac{1\ 958\ 683}{2\ 380\ 522\ 493}\cdot\varepsilon^8\cos 3\tau-\frac{\varepsilon^5\cos 5\tau}{31\ 475\ 676\ 322\ 755\ 045\ 905}+$$
$$+\frac{1\ 630\ 908}{6\ 159\ 413\ 981}\cdot\varepsilon^6\cos 5\tau-\frac{3\ 057\ 167}{32\ 690\ 318\ 658}\cdot\varepsilon^7\cos 5\tau-$$
$$-\frac{1\ 692\ 679}{8\ 753\ 254\ 530}\cdot\varepsilon^8\cos 5\tau+\frac{26\ 423}{23\ 513\ 088\ 697}\cdot\varepsilon^6\cos 7\tau-$$
$$-\frac{227\ 108}{18\ 003\ 102\ 119}\cdot\varepsilon^7\cos 7\tau+\frac{222\ 989}{121\ 092\ 915\ 010}\cdot\varepsilon^8\cos 7\tau+$$
$$+\frac{267}{268\ 435\ 456}\cdot\varepsilon^6\cos 9\tau+\frac{19\ 881}{151\ 174\ 955\ 083}\cdot\varepsilon^7\cos 9\tau+$$
$$+\frac{53\ 825}{90\ 941\ 797\ 451}\cdot\varepsilon^8\cos 9\tau+\ \dots\ .$$

В этом случае величина

$$2\cdot\mu_1(\varepsilon^*)\cdot\mu_2(\varepsilon^*)\cdot\mu_3(\varepsilon^*)\approx 0,0208\ 824\ll 1.$$

Поскольку

$$-6,26\ 319\le\mathcal{B}_0\Big(y_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\le -4,73\ 309\ll 0,$$

постольку

$$\beta_3(\tau,\varepsilon)\approx\frac{3}{8}+\frac{2\ 829}{32\ 768}\cdot\varepsilon^2-\frac{31\ 489\ 782\ 921}{1\ 466\ 552\ 552\ 026}\cdot\varepsilon^3+$$
$$+\frac{8\ 411\ 581\ 205}{340\ 460\ 591\ 366}\cdot\varepsilon^4-\frac{11\ 597\ 633\ 572}{2\ 287\ 143\ 294\ 343}\cdot\varepsilon^5-\frac{13\ 539\ 110}{325\ 261\ 941}\cdot\varepsilon^6+\ \dots\ .$$

Для оценки точности найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга определим невязки нулевого $y_0(\tau,\varepsilon)\ :=\ y_0(\tau,c_0)$ и первых трех приближений ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

$$\Delta_i(\varepsilon):=\left\|y_i''(\tau,\varepsilon)+\Big(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_i(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\cdot\Big(1+\varepsilon\beta_i(\varepsilon)\Big)^2\cdot y_i^3(\tau,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]}.$$

Положив $\varepsilon=0,1$, убеждаемся в уменьшении нулевой и первых трех невязок от итерации к итерации

$$\Delta_0(0,1)\approx 0,0312\ 344,\quad \Delta_1(0,1)\approx 9,12\ 525\cdot 10^{-5},\quad \Delta_2(0,1)\approx 3,41\ 105\cdot 10^{-8}\ ,$$

$$\Delta_3(0,1) \approx 7,28\ 797 \cdot 10^{-11}\ .$$

Найденные приближения к периодическому решению уравнения Дюффинга не выходят за пределы указанной выше окрестности порождающего решения

$$||x_1(\tau,\varepsilon)|| = ||\xi_1(\tau,\varepsilon)|| \le 0,073\ 036 < q < 0,1\ ,$$

$$||x_2(\tau,\varepsilon)|| = ||\xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon)|| \le 0,0731\ 673 < q < 0,1\ ,$$

$$||x_3(\tau,\varepsilon)|| = ||\xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon) + \xi_3(\tau,\varepsilon)|| \le 0,0731\ 633 < q < 0,1\ .$$

Заметим, что точность найденных приближений к периодическому решению уравнения Дюффинга значительно выше, чем в статье [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, — 1956. — 491 с.

2. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, — 2004.— XIV + 317 p.

3. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения, — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668 — 1674.

4. Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Изд.-во иностр. лит., — 1961. — 778 с.

5. Якубович В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, — 1972. — 720 с.

6. Чуйко С.М., Бойчук И.А. Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелинейные колебания, — 2009. — **12**, № 3. — С. 405—416.

7. Чуйко С.М., Чуйко Ан.С., Пирус О.Е. Приближенные решения автономных нетеровых краевых задач в критическом случае // Труды Инст. прикладной математики и механики НАН Украины, — 2011. — **22**. — С. 197 — 206.

8. Чуйко С.М., Бойчук И.А., Пирус О.Е. О приближенном решении автономной краевой задачи методом Ньютона // Нелінійні коливання, — 2012. — **15**, № 2. — С. 274 — 288.

9. Чуйко С.М., Старкова О.В. Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы, — 2009. — **27**. — С. 127 — 142.

10. Чуйко С.М., Пирус О.Е. О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом Ньютона // Нелінійні коливання, — 2012. — **15**, №3. — С. 407 — 421.

11. Чуйко С.М. Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн., — 2009. — **61**, № 4. — С. 548 — 562.

12. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, — 1965. — 408 с.

13. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, — 1977. — 744 с.

14. Чуйко С.М. О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелинейные колебания, — 2008. — **11**, № 4. — С. 554—573.

15. Чуйко С.М. Область сходимости итерационной процедуры автономной краевой задачи / С.М. Чуйко // Нелинейные колебания, — 2006. — **9**, № 3. — С. 416—432.

Статья получена: 01.11.2012; принята: 20.11.2012.