

Автомодельные решения задачи о перераспределении
суффозионных частиц в грунте фильтрационным
потоком жидкости

А. Ю. Кузнецов

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
майдан Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
anton.kuznietsov@gmail.com*

В рамках кинематической модели процесса механической суффозии рассмотрены задачи о вымывании и оседании мелких частиц грунта под воздействием фильтрационного потока жидкости. Изучены движения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. Получены автомодельные решения, содержащие поверхности сильных и слабых разрывов.

Ключевые слова: фильтрация жидкости, суффозия, сильный разрыв, автомодельные решения.

Кузнецов А. Ю., **Автомодельні розв'язки задачі про перерозподіл суфозійних частинок в ґрунті фільтраційним потоком рідини.** У рамках кінематичної моделі процесу механічної суфозії розглянуто одномірні задачі про вимивання та осідання дрібних частинок ґрунту під впливом фільтраційного потоку рідини. Досліджені рухи з плоскими, циліндричними та сферичними волнами. Отримані автомодельні розв'язки, які containть поверхні сильних та слабких розривів.

Ключові слова: фільтрація рідини, суфозія, сильний розрив, автомодельні розв'язки.

A. Yu. Kuznietsov, **Self-similar solutions of the problem of suffosion particles redistribution in soil by filtrational flow of fluid.** In terms of a kinematic model of mechanical suffosion the problems of leaching and settling of small soil particles under the influence of filtrational fluid flow are considered. Motions with plane, cylindric and spheric waves are studied. Self-similar solutions of these problems are obtained, which contain surfaces of strong and weak discontinuities.

Keywords: fluid filtration, suffosion, strong discontinuity, self-similar solutions.

2000 Mathematics Subject Classification 76S05.

Введение

Вымывание и перенос потоком воды мелких частиц грунта может существенно повлиять на пористость, проницаемость и прочностные свойства грунта. Суффозия, эрозия и обратная эрозия (ripping) являются существенными проблемами для функционирования гидротехнических сооружений. Также вымывание частиц грунта может приводить к проседанию ландшафта, дорог, заасфальтированных площадок. Для предотвращения этих явлений используются дренажные системы, служащие для отвода лишней влаги из почвы и для искусственного понижения уровня грунтовых вод (чтобы защитить цокольные этажи зданий от затопления, например). Практика применения дренажных систем показывает, что суффозия мелких частиц грунта может приводить к засорению систем дренажа и, вследствие этого, к ухудшению их функционирования. Поэтому задача детального математического описания и моделирования процесса суффозии представляет интерес. Результаты исследований могут быть применены для прогнозирования деформаций и разрушений почвы, а также для совершенствования дренажных систем.

В работах [1-5] рассмотрены математические модели процесса суффозии. В этих моделях делаются некоторые предположения о характере взаимодействия жидкости с мелкими частицами грунта и решаются одномерные задачи, искомыми функциями которых являются скорость жидкости в порах грунта и объёмная концентрация суффозионных частиц в грунте. Данная статья посвящена автомодельным решениям одномерных задач на базе модели, описанной в [2]. Приведены автомодельные решения для различных случаев симметрии одномерных задач. Работа проводилась в рамках совместного украинско-немецкого проекта "Качество воды на урбанизированных территориях: математические модели для интегрированного менеджмента речных систем в Харьковском регионе (Украина) и области Боде (Германия)" М/423-2011.

1. Описание математической модели

При движении жидкости по порам грунта могут прийти в движение мелкие частицы грунта, называемые суффозионными. В противоположность суффозионным частицам, частицы твёрдого скелета всегда остаются неподвижными. В основном будем придерживаться системы обозначений, принятой в работе [3]. Основное предположение модели состоит в том, что скорость суффозионных частиц \vec{u}_c зависит от скорости жидкости \vec{u} следующим образом:

$$\vec{u}_c = \begin{cases} 0, & u \leq u_k \\ \alpha \frac{\vec{u}}{u} (u - u_k), & u > u_k \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\alpha > 0$ – постоянный коэффициент, u_k – критическое значение скорости жидкости.

Законы сохранения массы для жидкости и частиц в порах выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_c}{\partial t} + \operatorname{div} n_c \vec{u}_c = 0 \\ \frac{\partial n_w}{\partial t} + \operatorname{div} n_w \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь n_c и n_w – объёмные доли частиц и жидкости соответственно. Величины n_c , n_w , \vec{u} , \vec{u}_c являются функциями времени и координат.

Далее будут рассмотрены течения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами.

2. Автомоделное решение в случае течения с плоскими волнами

В случае движений с плоскими волнами уравнения (2) в области, занятой движущимися частицами, переписываются в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_w u) = 0 \\ \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_c \alpha (u - u_k)) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Для определённости будем считать ось z направленной вертикально вниз. Предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ вода в порах отсутствует, и с течением времени происходит движение фронта промачивания, выше которого грунт промочен. Фронт промачивания имеет вертикальную координату $z_a(t)$. Функция $z_a(t)$ легко выражается через функцию $I(t)$ – удельный объёмный расход жидкости, поступающей через поверхность грунта.

Из уравнений (3) и граничного условия на поверхности грунта следует зависимость между n_c и u :

$$n_c(z, t) = \frac{(1 - m_s)u(z, t) - I(t)}{\alpha u_k + (1 - \alpha)u(z, t)}, \quad (4)$$

где m_s – это объёмная доля твёрдого скелета (она постоянна во всем пространстве, занимаемом грунтом). Через m_c обозначим начальную объёмную долю суффозионных частиц.

Для величин m_s , $n_c(z, t)$ и $n_w(z, t)$ верно равенство:

$$m_s + n_c(z, t) + n_w(z, t) = 1. \quad (5)$$

Введём безразмерные переменные следующим образом:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_k}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{Z}, \quad \tilde{t} = \frac{u_k t}{Z}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{u_k(1 - m_s)}, \quad (6)$$

где Z – некоторый характерный линейный размер. Далее знаки ' \sim ' опустим, и будем проводить дальнейшие выкладки в безразмерных переменных.

После подстановки выражения (4) в одно из уравнений системы (3) получаем следующее квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции u :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha(2u - 1 + lu^2) - I}{1 + lI} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1 + lu}{1 + lI} \frac{dI}{dt}, \quad (7)$$

где $l = (1 - \alpha)/\alpha$.

Уравнение (7) дополняется граничным условием на фронте промачивания, которое представляет собой закон сохранения массы частиц при переходе через фронт промачивания.

Задача имеет автомодельное решение в случае, когда объёмный расход жидкости $I(t)$ есть постоянная функция:

$$I(t) = I = const. \quad (8)$$

Введём автомодельную переменную $\xi = z/t$. Выполним замену переменных

$$v = \frac{u - I}{1 + lI}; \quad (9)$$

$$v = f\left(\frac{z}{t}\right) = f(\xi). \quad (10)$$

При подстановке функции $f(\xi)$ в уравнение (7) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\xi \frac{dv}{d\xi} + \alpha [(2v + lv^2)(1 + lI) + I - 1] \frac{dv}{d\xi} = 0. \quad (11)$$

У этого уравнения существует тривиальное решение

$$f(\xi) = const. \quad (12)$$

Если $\alpha = 1$, то $l = 0$, и нетривиальное решение уравнения (11) имеет вид:

$$f(\xi) = \frac{1 - I}{2} + \frac{\xi}{2}. \quad (13)$$

В случае $\alpha < 1$ нетривиальное решение выглядит следующим образом:

$$f(\xi) = \frac{1}{l} \left(-1 + \sqrt{\frac{1 + l + \xi}{1 + lI}} \right). \quad (14)$$

Тривиальное решение соответствует однородному потоку жидкости и частиц, а другое решение – центрированной волне разрежения. Зоны однородного потока и центрированной волны разделены поверхностью слабого разрыва. На рис. 1 приведены графики функции $n_c(\xi)$ для различных значений объёмного расхода I (в безразмерных переменных).

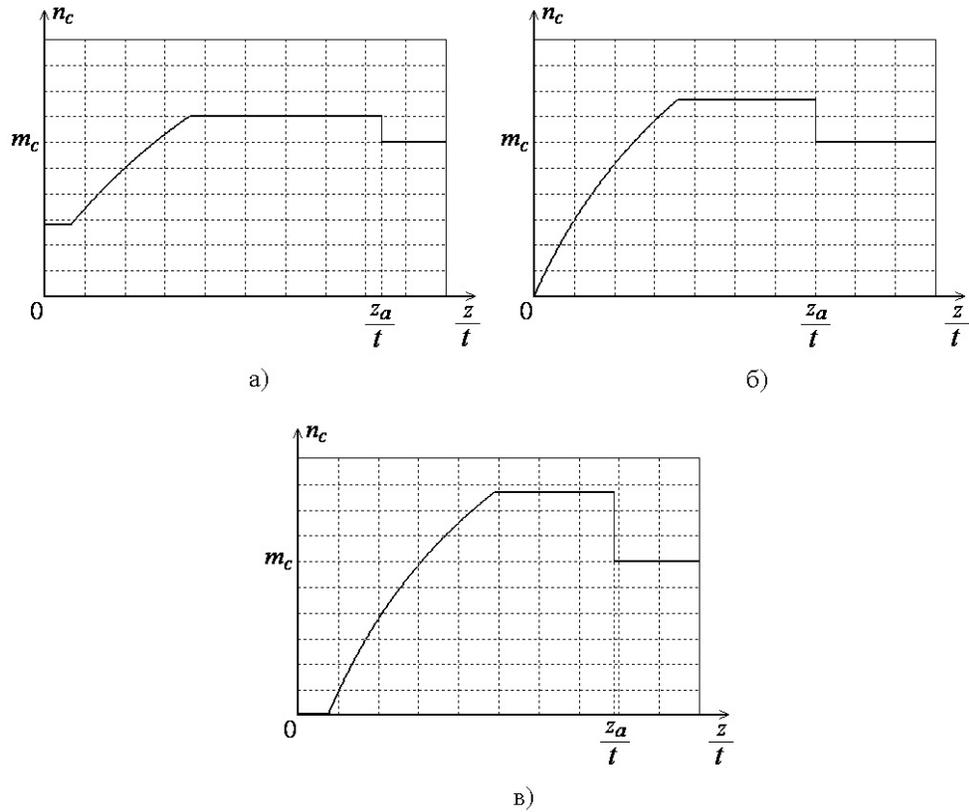


Рис. 1. Пространственное распределение суффозионных частиц в автомодельном решении

При небольших значениях I частицы вблизи поверхности грунта вымываются не полностью, что соответствует левой горизонтальной площадке на рис. 2а. При $I = 1$ поверхность грунта является одной из границ зоны центрированной волны (рис. 2б). При $I > 1$ возле поверхности грунта образуется зона, в которой суффозионных частиц нет (рис. 2в).

3. Автомодельное решение в случае цилиндрической симметрии задачи

Пусть в грунт поступает жидкость из источника, представляющего собой длинный вертикальный цилиндр радиуса r_0 . Считаем, что в начальный момент времени грунт уже полностью промочен, а объёмная доля частиц во всем грунте равна m_c . Рассмотрим задачу в одномерной постановке: все искомые величины являются функциями времени и цилиндрической координаты r .

Законы сохранения массы жидкости и суффозионных частиц (2) в данном случае преобразуются в следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_w u) = 0 \\ \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_c \alpha (u - u_k)) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Зависимость между объёмной долей частиц и скоростью жидкости будет иметь следующий вид:

$$n_c(r, t) = \frac{m_0 u(r, t) - \frac{I(t)}{2\pi r}}{\alpha u_k + (1 - \alpha) u(r, t)}. \quad (16)$$

Введём безразмерные переменные

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_k}, \quad \tilde{r} = r \frac{2\pi u_k (1 - m_s)}{I_0}, \quad \tilde{t} = t \frac{2\pi u_k^2 (1 - m_s)}{I_0}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{I_0}. \quad (17)$$

Здесь I_0 – некоторое характерное значение удельного объёмного расхода $I(t)$. Далее знаки ‘ \sim ’ писать не будем, и будем проводить выкладки с безразмерными величинами.

После обезразмеривания и подстановки выражения (16) в одно из уравнений системы (15) получим следующее уравнение относительно функции $u = u(r, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha \left[(2\alpha + (1 - \alpha)u) u - \alpha - \frac{I(t)}{r} \right]}{\alpha + (1 - \alpha) \frac{I(t)}{r}} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(\alpha + (1 - \alpha)u) \left(\frac{dI(t)}{dt} - u\alpha(u - 1) \right)}{r \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{I(t)}{r} \right)} \quad (18)$$

Для того чтобы задача имела автомодельное решение, необходимо наложить некоторые условия на параметры задачи. Необходимо принять радиус цилиндра $r_0=0$. Это оправдано в случае, когда радиус поперечного сечения источника много меньше характерного линейного размера задачи. Объёмный расход жидкости должен представлять собой степенную функцию от времени. Временно вернёмся к размерным переменным, чтобы провести анализ размерностей [6].

$$I(t) = At^\gamma. \quad (19)$$

В задаче имеется два размерных параметра: A и u_k (критическая скорость жидкости). Для обеспечения автомодельности решения нужно, чтобы параметры A и u_k могли сформировать безразмерную комбинацию, следовательно, параметр A имеет размерность скорости. Получаем, что

$$\gamma = 1, \quad I(t) = At. \quad (20)$$

Введём автомодельную переменную

$$\xi = \frac{r}{t}. \quad (21)$$

Тогда уравнение (18) сведётся к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $u(\xi)$ (уравнение записано в безразмерных переменных):

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{(\alpha + (1 - \alpha)u)(A - u\alpha(u - 1))}{(2\alpha + (1 - \alpha)u)\alpha\xi u - A(\alpha + (1 - \alpha)\xi) - \alpha\xi(\alpha + \xi)}. \quad (22)$$

Граничное условие на внутренней границе области подвижных частиц ставится исходя из соображений, что скорость движения этой границы совпадает со скоростью частиц, находящихся на этой границе:

$$\xi_L = u_c |_{\xi=\xi_L} \quad (23)$$

$$\xi_L = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha A} \right). \quad (24)$$

В случае, когда грунт изначально был сухой, имеется фронт промачивания, скорость которого вычисляется по формуле:

$$\xi_a = \sqrt{\frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c}} \quad (25)$$

Если $\xi_a \geq 1$, на фронте промачивания имеется сильный разрыв. Если $\xi_a < 1$, то сильный разрыв на фронте промачивания отсутствует. Координата ξ_1 внешней границы области подвижных частиц определяется по формуле

$$\xi_1 = \begin{cases} \xi_a, & \xi_a \geq 1 \\ \xi_a^2, & \xi_a < 1 \end{cases}. \quad (26)$$

В случае, когда грунт изначально уже был полностью промочен, координата внешней области подвижных частиц определяется по формуле

$$\xi_1 = \frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c} \quad (27)$$

На рис. 2 представлены характерные графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$. Графики отвечают следующим значениям параметров задачи:

$$A = 1, \quad \alpha = 0.75, \quad m_s = 0.5, \quad m_c = 0.25. \quad (28)$$

В данных решениях имеется сильный разрыв в зоне подвижных частиц, на котором выполняется закон сохранения массы частиц.

Также можно рассмотреть случай, когда источник заменяется стоком. В этом случае $I(t) < 0$. Для наличия автомодельного решения необходимо, чтобы функция $I(t)$ имела вид (20), причём $A < 0$.

На внешней границе области движущихся частиц ставится граничное условие

$$u |_{\xi=\xi_1} = 1, \quad n_c |_{\xi=\xi_1} = m_c. \quad (29)$$

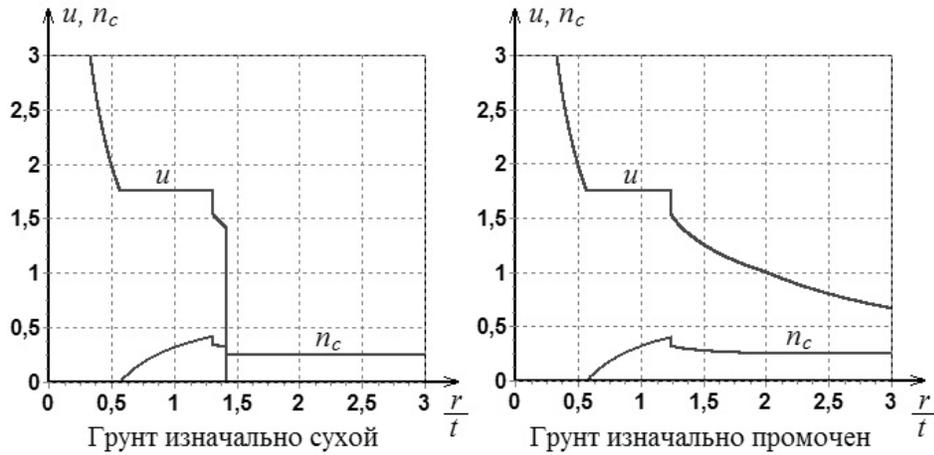


Рис. 2. Графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$ для случая источника (цилиндрическая симметрия)

Здесь ξ_1 – это значение автомодельной переменной на внешней границе области движущихся частиц, которое вычисляется по формуле

$$\xi_1 = \frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c}. \quad (30)$$

Численное решение уравнения (22) с граничным условием (29), (30) даёт результаты, представленные на графиках на рис. 3.

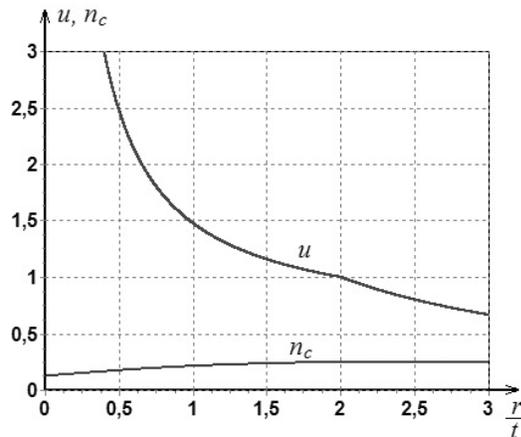


Рис. 3. Графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$ для случая стока (цилиндрическая симметрия)

4. Автомодельное решение в случае сферической симметрии задачи

Пусть источник представляет собой сферу, расположенную на достаточно большой глубине грунта. Изначально грунт промочен, объёмная доля частиц везде одинакова и равна m_c . Рассмотрим задачу в одномерной постановке, когда искомые величины являются функциями от времени t и расстояния r от данной точки пространства до центра сферы.

Система уравнений (2) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_w}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_w u) = 0 \\ \frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_c u_c) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Уравнение, связывающее объёмную концентрацию суффозионных частиц в некоторой точке пространства со скоростью жидкости в данной точке, будет иметь следующий вид:

$$n_c(r, t) = \frac{m_0 u(r, t) - \frac{I(t)}{4\pi r^2}}{\alpha u_k + (1 - \alpha)u(r, t)}. \quad (32)$$

Проведём обезразмеривание по следующим формулам:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_k}, \quad \tilde{r} = r \sqrt{\frac{4\pi u_k m_0}{I_0}}, \quad \tilde{t} = t \sqrt{\frac{4\pi u_k^3 m_0}{I_0}}, \quad \tilde{I} = \frac{I}{I_0}. \quad (33)$$

Далее знаки ' \sim ' ставить не будем.

Получим следующее уравнение в безразмерных переменных относительно скорости жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha \left[(2\alpha + (1 - \alpha)u)u - \alpha - \frac{I(t)}{r^2} \right]}{\alpha + (1 - \alpha)\frac{I(t)}{r^2}} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{(\alpha + (1 - \alpha)u) \left(\frac{dI(t)}{dt} - 2\alpha u r (u - 1) \right)}{r^2 \left(\alpha + (1 - \alpha)\frac{I(t)}{r^2} \right)}. \quad (34)$$

Для того чтобы задача имела автомодельное решение, начальные параметры задачи должны удовлетворять условиям, аналогичным тем, что изложены в разделе 3 данной статьи. Источник считаем точечным. Зависимость объёмного расхода жидкости, поступающей из источника за единицу времени, должна описываться функцией вида

$$I(t) = At^2. \quad (35)$$

Введём автомодельную переменную $\xi = r/t$. Тогда уравнение (34) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $u(\xi)$:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{2(\alpha + (1 - \alpha)u)(A - \alpha\xi u(u - 1))}{(2\alpha + (1 - \alpha)u)\alpha\xi^2 u - A(\alpha + (1 - \alpha)\xi) - \alpha\xi^2(\alpha + \xi)}. \quad (36)$$

Граничные условия ставятся аналогично случаю цилиндрической симметрии задачи. Координата ξ_L внутренней границы области подвижных частиц удовлетворяет уравнению

$$\xi_L^3 + \alpha \xi_L^2 - \alpha A = 0. \tag{37}$$

В случае, когда грунт изначально был сухой, имеется фронт промачивания, скорость которого вычисляется по формуле:

$$\xi_a = \sqrt[3]{\frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c}}. \tag{38}$$

Если $\xi_a \geq 1$, на фронте промачивания имеется сильный разрыв. Если $\xi_a < 1$, то сильный разрыв на фронте промачивания отсутствует. Координата ξ_1 внешней границы области подвижных частиц определяется по формуле

$$\xi_1 = \begin{cases} \xi_a, & \xi_a \geq 1 \\ \sqrt{\frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c}}, & \xi_a < 1 \end{cases} \tag{39}$$

В случае, когда грунт изначально уже был полностью промочен, координата внешней области подвижных частиц определяется по формуле

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{(1 - m_s)A}{1 - m_s - m_c}}. \tag{40}$$

На рис. 4 представлены характерные графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$.

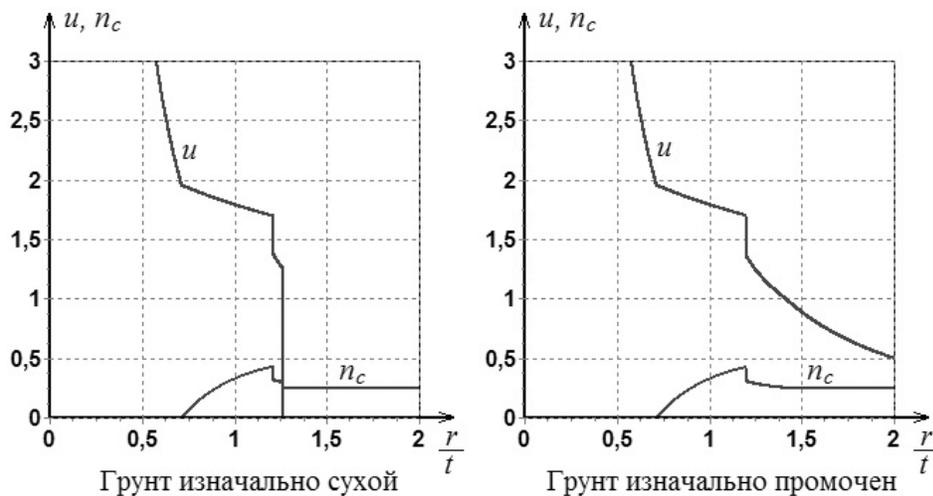


Рис. 4. Графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$ для случая источника (сферическая симметрия)

Случай, в котором источник заменяется стоком, рассматривается аналогично случаю стока при цилиндрической симметрии задачи. Результаты вычислений представлены на рис. 5.

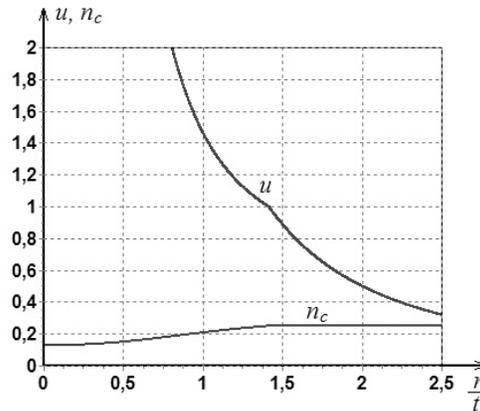


Рис. 5. Графики функций $u(\xi)$ и $n_c(\xi)$ для случая стока (сферическая симметрия)

Заключение

В данной статье представлены автомодельные решения задачи о суффозии в грунте, в которых объёмный расход жидкости является степенной функцией зависимости от времени.

Получено, что в грунте формируются различные зоны, границы которых представляют собой поверхности слабых и сильных разрывов искомых величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитрієв Д. А. Фільтраційні процеси в навколодренній зоні в незв'язних грунтах: Автореф. дис. канд. техн. наук. – Рівне: Рівнен. держ. техн. ун-т, 2001. – 14 с.
2. Кузнецов А. Ю., Пославский С. А. Исследование математической модели механической суффозии // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". 2009, № 875, С. 57-68.
3. Поляков В. Л. Механическая суффозия в дренируемом грунте // Прикладна гідромеханіка, 2002, т. 4 (76), № 4, С. 60-73.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – 10-е изд. – М.: Наука, 1987. – 430 с.
5. Хлапук М. М. Теоретичні основи фільтрації в середовищах, що деформуються, та їх застосування в області дренажу: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – Рівне: Рівнен. держ. техн. ун-т, 1999. – 34 с.

Статья получена: 21.09.2012; принята: 28.12.2012.