Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.11 № 1061, 2013, с.53–84

Построение множества программных управлений, решающих задачу управляемости для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем

В. А. Скорик

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
v.skoryk@karazin.ua

Для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем без использования фундаментальной матрицы неавтономной системы построены множества программных управлений, решающих задачу полной управляемости без ограничений на управление и задачу локальной нуль-управляемости с ограничениями на управление.
Ключевые слова: управляемость, линейная неавтономная неоднородная система, каноническая форма.

Скорик В. О., **Побудова множини програмних керувань, які вирішують задачу керованості для деякого класу лінійних неавтономних неоднорідних систем.** Для деякого класу лінійних неавтономних неоднорідних систем без використання фундаментальної матриці неавтономної системи побудовані множини програмних керувань, які вирішують задачу повної керованості без обмежень на керування і задачу локальної нуль-керованості з обмеженнями на керування.
Ключові слова: керованість, лінійна неавтономна неоднорідна система, канонічна форма.

V. A. Skoryk, **Construction of a set of programm controls solving the problem of controllability for some class of linear non-autonomous inhomogeneous systems.** For some class of linear non-autonomous inhomogeneous systems without the use of fundamental matrix of the non-autonomous system sets of programm controls solving the problem of complete controllability without constraints on a control and the problem of local 0-controllability with constraints on a control are constructed.
Keywords: controllability, linear non-autonomous inhomogeneous system, canonical form.
2000 Mathematics Subject Classification 93B05, 93B10, 93B11.

1. Введение

Данная работа посвящена построению программных управлений, решающих задачу полной управляемости без ограничений на управление и задачу локальной нуль-управляемости с ограничениями на управление для некоторого класса линейных неавтономных неоднородных систем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица, $B(t)$ — $(n\times r)$-матрица, $g(t)$ — n-мерная вектор-функция.

Будем говорить, что управление $u(t)$ переводит за время $T \in (0, t_1 - t_0]$ точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в точку $x_T \in \mathbb{R}^n$ на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$ по траектории системы (1), если траектория $x(t)$ системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \ t \in [t_0, t_1],$$

начинающаяся в момент времени t_0 в точке x_0, т.е. $x(t_0) = x_0$, оканчивается в момент времени $t_0 + T$ в точке x_T, т.е. $x(t_0 + T) = x_T$.

Система (1) называется *полностью управляемой за фиксированное время* $T \in (0, t_1 - t_0]$ *на отрезке* $[t_0, t_0 + T]$, если для произвольно заданных точек x_0 и x_T пространства $\mathbb{R}^n$ существует на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$ управление $u = u(t)$ — r-мерная вектор-функция, — которое переводит за время T точку x_0 в точку x_T на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$ по траектории системы (1).

Хорошо известно (см., например, [1]), что для того, чтобы система (1) с $A(t) \in C[t_0, t_1]$, $B(t) \in C[t_0, t_1]$, $g(t) \in C[t_0, t_1]$ была полностью управляемой за фиксированное время $T \in (0, t_1 - t_0]$ на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$, необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$N(T) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t)B(t)B^*(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^* dt \tag{2}$$

была положительно определенной. При этом множество программных управлений, каждое из которых переводит за время T любую заданную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в любую заданную точку $x_T \in \mathbb{R}^n$ на отрезке времени $[t_0, t_0 + T]$ по траектории системы (1), имеет вид

$$\begin{gathered} u_v(t) = B^*(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^* N^{-1}(T)\Bigg(\Phi^{-1}(t_0 + T)x_T - \\ -\Phi^{-1}(t_0)x_0 - \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t)g(t)dt\Bigg) + v(t), \end{gathered} \tag{3}$$

где $v(t)$ — r-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi^{-1}(t)B(t)v(t)dt = 0.$$

Система (1) с матрицами $A(t) \in C^{(n-2)}[t_0, t_0+T]$, $B(t) \in C^{(n-1)}[t_0, t_0+T]$ и вектор-функцией $g(t) \in C[t_0, t_0+T]$ является полностью управляемой за фиксированное время T на отрезке $[t_0, t_0+T]$, если существует точка $t' \in [t_0, t_0+T]$ такая, что

$$\operatorname{rang} Q_0(t') = n, \tag{4}$$

где $Q_0(t)$ — матрица вида

$$Q_0(t) = \left(\Phi^{-1}(t)B(t), \frac{d}{dt}\,\Phi^{-1}(t)B(t), \ldots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,\Phi^{-1}(t)B(t)\right), \quad t \in [t_0, t_0+T].$$

Отметим, что как при проверке условий (2) критерия и достаточных условий (4) полной управляемости системы (1) за фиксированное время, так и при построении программных управлений вида (3), решающих задачу полной управляемости, требуется нахождение фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы $\dot{x} = A(t)x$, что во многих случаях является весьма затруднительным. Поэтому возникает вопрос о способе построения управлений, не использующий матрицу $\Phi(t)$.

Достаточные условия полной управляемости за фиксированное время системы (1) с дифференцируемыми матрицами $A(t)$, $B(t)$, которые не содержат фундаментальную матрицу $\Phi(t)$, состоят в следующем.

Обозначим через Δ оператор вида $\Delta = A(t) - Ed/dt$, где E — единичная $(n\times n)$-матрица, и рассмотрим матрицу

$$Q(t) = (B(t), \Delta B(t), \ldots, \Delta^{n-1}B(t)). \tag{5}$$

Система (1) с матрицами $A(t) \in C^{(n-2)}[t_0, t_0+T]$, $B(t) \in C^{(n-1)}[t_0, t_0+T]$ и вектор-функцией $g(t) \in C[t_0, t_0+T]$ является полностью управляемой за фиксированное время $T \in (0, t_1 - t_0]$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$, если существует точка $t' \in [t_0, t_0+T]$ такая, что $\operatorname{rang} Q(t') = n$, где $Q(t)$ — матрица вида (5).

2. Построение программных управлений, решающих задачу полной управляемости

Приведем способ построения программных управлений, в котором не используется фундаментальная матрица $\Phi(t)$. Для этого приведем неавтономную неоднородную систему с помощью замены переменных к канонической форме.

2.1. Каноническая форма полностью управляемых линейных неавтономных неоднородных систем с дифференцируемыми матрицами.

Рассмотрим систему (1) с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$. Всюду далее, если не оговорено иное, подразумевается, что

$t \in [t_0, t_1]$. Предположим, что столбцы $b_1(t)$, ..., $b_r(t)$ матрицы $B(t)$ являются линейно независимыми на $[t_0, t_1]$, т.е. rang $B(t) = r$ для любого $t \in [t_0, t_1]$. Если в матрице $B(t)$ k $(1 \le k < r)$ столбцов являются линейно независимыми на $[t_0, t_1]$, то система (1) сводится к системе с k-мерным управлением, т.е. с новым управлением, компонентами которого будут компоненты исходного управления с номерами столбцов матрицы $B(t)$, которые являются линейно независимыми на $[t_0, t_1]$. При этом остальные компоненты исходного управления можно положить равными нулю.

Пусть $\operatorname{rang} Q(t) = n$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, причем [2, 3]

$$b_1(t), \ldots, \Delta^{n_1-1} b_1(t), \ \ldots, \ b_r(t), \ldots, \Delta^{n_r-1} b_r(t),$$

где $n_1 + \ldots + n_r = n$, $n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_r$, являются линейно независимыми для любого $t \in [t_0, t_1]$. Тогда матрица

$$K(t) = \big(b_1(t), \Delta b_1(t), ..., \Delta^{n_1-1} b_1(t), ..., b_r(t), \Delta b_r(t), ..., \Delta^{n_r-1} b_r(t)\big)$$

является невырожденной и

$$\operatorname{rang} Q(t) = \operatorname{rang} K(t) = n, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{6}$$

Положим $s_0 = 0$, $s_i = n_1 + \ldots + n_i$, $i = 1, \ldots, r$. Определим n-мерные вектор-функции $c_1(t)$, ..., $c_r(t)$ равенствами

$$c_i(t) = (K^*(t))^{-1} e_{s_i} \in C^{(n)}[t_0, t_1], \quad i = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

где e_{s_i} — s_i-й столбец единичной матрицы. Рассмотрим невырожденную матрицу

$$L(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \cdots \\ L_r(t) \end{pmatrix}, \quad L_i(t) = \begin{pmatrix} c_i^*(t) \\ (\Delta_* c_i(t))^* \\ \cdots \\ \Big(\Delta_*^{n_i-1} c_i(t)\Big)^* \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, r, \tag{8}$$

и матрицу $\widehat{L}(t)$ вида

$$\widehat{L}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{L}_1(t) \\ \cdots \\ \widehat{L}_r(t) \end{pmatrix}, \quad \widehat{L}_i(t) = \begin{pmatrix} c_i^*(t) \\ (\Delta_* c_i(t))^* \\ \cdots \\ \Big(\Delta_*^{n_i-2} c_i(t)\Big)^* \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть для системы (1) с матрицами* $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$ $(\operatorname{rang} B(t) = r)$ *и вектор-функцией* $g(t) \in C[t_0, t_1]$ *выполнено условие (6) и имеют место равенства*

$$\Delta^{n_i} b_i(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{n_j-1} \alpha_{jk}^i(t) \Delta^k b_j(t), \quad i = 1, \ldots, r, \tag{10}$$

где $\alpha^i_{jk}(t) \in C^{(n)}[t_0,t_1] : \alpha^i_{jk}(t) = 0$ *для* $j < i$, $k > \min\{n_i, n_j{-}1\}$, *или для* $j \geq i$, $k > \min\{n_i{-}1, n_j{-}1\}$.

Тогда заменой переменных $z = L(t)x$ *система (1) отображается на систему*

$$\begin{cases} \dot{z}_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1} + \left(\Delta_*^{j-1} c_i(t)\right)^* g(t), \; j = 1,\ldots,n_i - 1, \\ \dot{z}_{s_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(t) z_j + u_i + \sum\limits_{j=i+1}^{r} m_{ij}(t) u_j + \left(\Delta_*^{n_i-1} c_i(t)\right)^* g(t), \end{cases} \quad i = 1,\ldots,r, \tag{11}$$

где

$$\widetilde{a}_{ij}(t) = \left(\Delta_*^{n_i} c_i(t)\right)^* l_j^{(-1)}(t), \quad i = 1,\ldots,r, \; j = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

(здесь $l_j^{(-1)}(t)$ *— j-й столбец матрицы* $L^{-1}(t)$*),*

$$m_{ij}(t) = \left(\Delta_*^{n_i-1} c_i(t)\right)^* b_j(t), \quad i = 1,\ldots,r, \; j = i+1,\ldots,r. \tag{13}$$

Система (11) в векторной форме записи имеет вид

$$\dot{z} = \widetilde{A}(t) z + B_0 M(t) u + L(t) g(t), \tag{14}$$

где

$$\widetilde{A}(t) = \left(\dot{L}(t) + L(t)A(t)\right) L^{-1}(t), \tag{15}$$

$$B_0 = (e_{s_1},\ldots,e_{s_r}), \tag{16}$$

$M(t) = B_0^* L(t) B(t)$ *— верхнетреугольная* $(r{\times}r)$*-матрица, диагональные элементы которой равны единице.*

Доказательство. Сделаем в системе (1) замену переменных $z = L(t)x$, которая в компонентной форме записи имеет вид

$$z_{s_{i-1}+j} = \left(\Delta_*^{j-1} c_i(t)\right)^* x, \quad i = 1,\ldots,r, \; j = 1,\ldots,n_i.$$

Тогда, в силу равенств [3]

$$\left(\Delta_*^{k} c_i(t)\right)^* \Delta^l b_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } k{+}l \leq n_j{-}1 \text{ и } i \neq j, \\ 0, & \text{если } k{+}l \leq n_i{-}2 \text{ и } i = j, \\ 1, & \text{если } k{+}l = n_i{-}1 \text{ и } i = j, \end{cases}$$

и равенств (10), для $i = 1,\ldots,r$ имеем

$$\dot{z}_{s_{i-1}+1} = \frac{d}{dt}\left(c_i^*(t)x\right) = \frac{dc_i^*(t)}{dt} x + c_i^*(t)A(t)x + c_i^*(t)B(t)u +$$

$$+ c_i^*(t)g(t) = \left(A^*(t)c_i(t) + \frac{dc_i(t)}{dt}\right)^* x + \sum_{j=1}^{r} c_i^*(t) b_j(t) u_j +$$

$$+c_i^*(t)g(t) = \big(\Delta_* c_i(t)\big)^* x + c_i^*(t)g(t) = z_{s_{i-1}+2} + c_i^*(t)g(t),$$

$$\dot z_{s_{i-1}+j} = \frac{d}{dt}\left((\Delta_*^{j-1}c_i(t))^* x\right) = \left(\frac{d}{dt}\big((\Delta_*^{j-1}c_i(t))^*\big)\right)x + \big(\Delta_*^{j-1}c_i(t)\big)^* \times$$

$$\times\Big(A(t)x + B(t)u + g(t)\Big) = \left(\Big(A^*(t) + \frac{d}{dt}\Big)\Delta_*^{j-1}c_i(t)\right)^* x +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\big(\Delta_*^{j-1}c_i(t)\big)^* b_k(t)u_k + \big(\Delta_*^{j-1}c_i(t)\big)^* g(t) = \big(\Delta_*^{j}c_i(t)\big)^* x +$$

$$+\big(\Delta_*^{j-1}c_i(t)\big)^* g(t) = z_{s_{i-1}+j+1} + \big(\Delta_*^{j-1}c_i(t)\big)^* g(t),\ j = 2, \ldots, n_i - 1,$$

$$\dot z_{s_i} = \left(\frac{d}{dt}\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\right)^* x + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* \big(A(t)x + B(t)u + g(t)\big) =$$

$$= \left(\Big(A^*(t) + \frac{d}{dt}\Big)\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\right)^* x + \sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(c_i^*(t)\times$$

$$\times\Delta^{n_i-1-k}B(t)u\Big) + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* g(t) = \big(\Delta_*^{n_i}c_i(t)\big)^* L^{-1}(t)z +$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \frac{d^k}{dt^k}\left(c_i^*(t)\Delta^{n_i-1-k}b_j(t)u_j\right) + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* g(t) =$$

$$= \left(\Delta_*^{n_i}c_i(t)\right)^* L^{-1}(t)z + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \frac{d^k}{dt^k}\left(c_i^*(t)\Delta^{n_i-1-k}b_j(t)u_j\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \frac{d^k}{dt^k}\left(c_i^*(t)\Delta^{n_i-1-k}b_i(t)u_i\right) + \sum_{j=i+1}^{r}\sum_{k=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(c_i^*(t)\times$$

$$\times\Delta^{n_i-1-k}b_j(t)u_j\Big) + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* g(t) = \sum_{j=1}^{n}\big(\Delta_*^{n_i}c_i(t)\big)^* l_j^{(-1)}(t)z_j +$$

$$+u_i + \sum_{j=i+1}^{r}\big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* b_j(t)u_j + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* g(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\widetilde a_{ij}(t)z_j + u_i + \sum_{j=i+1}^{r} m_{ij}(t)u_j + \big(\Delta_*^{n_i-1}c_i(t)\big)^* g(t),$$

где $l_j^{(-1)}(t)$ — j-й столбец матрицы $L^{-1}(t)$, $\widetilde a_{ij}(t)$, $m_{ij}(t)$ имеют вид (12) и (13) соответственно.

Таким образом, система (1) заменой переменных отображается на систему (11).

Покажем, что в векторной форме записи система (11) имеет вид (14). Дифференцируя по t равенство $z = L(t)x$ и используя равенство (1), получаем

$$\dot{z} = \widetilde{A}(t)z + L(t)B(t)u + L(t)g(t), \tag{17}$$

где $\widetilde{A}(t)$ — матрица вида (15). Поскольку $L(t)B(t) = B_0 M(t)$, где B_0 — постоянная $(n{\times}r)$-матрица вида (16), то $M(t) = B_0^* L(t)B(t)$ — верхнетреугольная $(r{\times}r)$-матрица, диагональные элементы которой равны единице, невырождена. Тогда система (17) принимает вид (14). □

Следствие 1. *Пусть для системы (1) с матрицами* $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$ *(*$\operatorname{rang} B(t) = r$*) выполнено условие (6), имеют место равенства (10) и вектор-функция* $g(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\widehat{L}(t)g(t) = 0, \tag{18}$$

где $\widehat{L}(t)$ *— матрица вида (9).*

Тогда заменой переменных $z = L(t)x$ *система (1) отображается на систему*

$$\begin{cases} \dot{z}_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1}, \quad j = 1, \dots, n_i - 1, \\ \dot{z}_{s_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(t) z_j + u_i + \sum\limits_{j=i+1}^{r} m_{ij}(t) u_j + \left(\Delta_*^{n_i-1} c_i(t)\right)^* g(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, r, \tag{19}$$

где $\widetilde{a}_{ij}(t)$ *и* $m_{ij}(t)$ *имеют вид (12) и (13) соответственно.*

2.2. Построение управлений, решающих задачу полной управляемости за некоторое фиксированное время.

Рассмотрим $(n{\times}n)$-матрицу

$$A_0 = \operatorname{diag}(A_{01}, \dots, A_{0r}), \tag{20}$$

где A_{0i} — $(n_i{\times}n_i)$-матрица вида

$$A_{0i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r,$$

и невырожденную $(n{\times}n)$-матрицу

$$N_0(T) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t} dt, \tag{21}$$

где B_0 — $(n{\times}r)$-матрица вида (16).

Теорема 1. *Пусть для системы (1) с матрицами* $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$, $\operatorname{rang} B(t) = r$, *и вектор-функцией* $g(t) \in C[t_0, t_1]$ *выполнено условие (6), имеют место равенства (10) и существует* r*-мерная вектор-функция* $v(t)$ *такая, что для некоторого фиксированного* $T \in (0, t_1 - t_0]$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} e^{-A_0 t}\big(B_0 v(t) + L(t)g(t)\big)dt = 0. \tag{22}$$

Тогда множество программных управлений $u_v(t)$, *каждое из которых переводит произвольную заданную точку* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *в произвольную заданную точку* $x_T \in \mathbb{R}^n$ *за время* T *на отрезке* $[t_0, t_0 + T]$ *по траектории* $x(t)$, *определяемой равенством* $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, *где* n*-мерная вектор-функция*

$$z(t) = e^{A_0 t}\Bigg(e^{-A_0 t_0}L(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A_0\tau}B_0 B_0^* e^{-A_0^*\tau}d\tau N_0^{-1}(T)e^{-A_0 t_0}\times$$
$$\times\big(e^{-A_0 T}L(t_0{+}T)x_T{-}L(t_0)x_0\big) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A_0\tau}\big(B_0 v(\tau){+}L(\tau)g(\tau)\big)d\tau\Bigg),$$

имеет вид

$$\begin{aligned} u_v(t) = M^{-1}(t)\Big(B_0^* e^{-A_0^* t}N_0^{-1}(T)e^{-A_0 t_0}\big(e^{-A_0 T}L(t_0{+}T)x_T-\\ -L(t_0)x_0\big) - B_0^*\widetilde{A}(t)z(t) + v(t)\Big). \end{aligned} \tag{23}$$

Доказательство. В силу леммы 1, система (1) заменой переменных $z = L(t)x$, где $L(t)$ — матрица вида (8), отображается на систему (14), которую, в силу равенства $\widetilde{A}(t) = A_0 + B_0 B_0^*\widetilde{A}(t)$, перепишем в виде

$$\dot{z} = A_0 z + B_0\left(B_0^*\widetilde{A}(t)z + M(t)u\right) + L(t)g(t). \tag{24}$$

При этом точки x_0, x_T отображаются, соответственно, в точки $z_0 = L(t_0)x_0$, $z_T = L(t_0 + T)x_T$. Сделав замену управления вида

$$w = B_0^*\widetilde{A}(t)z + M(t)u, \tag{25}$$

система (24) принимает вид

$$\dot{z} = A_0 z + B_0 w + L(t)g(t). \tag{26}$$

Будем искать управление $w_v(t)$, которое переводило бы точку z_0 в точку z_T за время $T \in (t_0, t_1 - t_0]$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ по траектории $z(t)$ системы (26), в виде

$$w_v(t) = B_0^* e^{-A_0^* t}\xi + v(t), \tag{27}$$

где ξ — постоянный n-мерный вектор, подлежащий определению, а $v(t)$ — r-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию (22). Поскольку траектория системы (26) с управлением $w_v(t)$ вида (27), начинающаяся в момент времени t_0 в точке z_0, имеет вид

$$z(t)=e^{A_0t}\left(e^{-A_0t_0}z_0+\int\limits_{t_0}^{t}e^{-A_0\tau}B_0B_0^*e^{-A_0^*\tau}d\tau\xi+\int\limits_{t_0}^{t}e^{-A_0\tau}\big(B_0v(\tau)+L(\tau)g(\tau)\big)d\tau\right),$$

то, используя вид матрицы $N_0(T)$ из (21) и равенство (22), имеем

$$z_T=z(t_0+T)=e^{A_0(t_0+T)}\left(e^{-A_0t_0}z_0+N_0(T)\xi\right).$$

Отсюда получаем

$$\xi=N_0^{-1}(T)e^{-A_0t_0}\left(e^{-A_0T}z_T-z_0\right)=N_0^{-1}(T)e^{-A_0t_0}\left(e^{-A_0T}L(t_0+T)x_T-L(t_0)x_0\right).$$

Из (25) находим

$$u_v(t)=M^{-1}(t)\left(B_0^*e^{-A_0^*t}\xi-B_0^*\widetilde{A}(t)z(t)+v(t)\right). \tag{28}$$

Подставляя выражение для ξ в выражение для $z(t)$ и в (28), получаем управление $u_v(t)$ вида (23). В силу невырожденности матрицы $L(t)$, из равенства $z(t)=L(t)x(t)$ находим траекторию $x(t)=L^{-1}(t)z(t)$, по которой точка x_0 переводится управлением $u_v(t)$ вида (23) в точку x_T за время T на отрезке времени $[t_0,t_0+T]$. □

2.3. Построение управлений, решающих задачу полной управляемости за любое фиксированное время.

В теореме 1 приводится множество управлений $u_v(t)$, каждое из которых решает задачу полной управляемости для системы (1) за некоторое фиксированное время T, для которого выполнено условие (22). В следующей теореме дается вид управления $u(t)$, которое решает задачу полной управляемости для системы (1) за любое фиксированное время $T\in(0,t_1-t_0]$.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) с матрицами* $A(t)\in C^{(2n-2)}[t_0,t_1]$, $B(t)\in C^{(2n-1)}[t_0,t_1]$ ($\operatorname{rang}B(t)=r$) *выполнено условие (6), имеют место равенства (10) и вектор-функция* $g(t)\in C[t_0,t_1]$ *удовлетворяет условию (18).*

Тогда программное управление, переводящее произвольную заданную точку $x_0\in\mathbb{R}^n$ *в произвольную заданную точку* $x_T\in\mathbb{R}^n$ *по траектории* $x(t)=L^{-1}z(t)$ *за любое время* $T\in(0,t_1-t_0]$ *на отрезке времени* $[t_0,t_0+T]$, *имеет вид*

$$\begin{aligned}u(t)=M^{-1}(t)B_0^*\Big(&e^{-A_0^*t}N_0^{-1}(T)e^{-A_0t_0}\big(e^{-A_0T}L(t_0+T)x_T-\\&-L(t_0)x_0\big)-\widetilde{A}(t)z(t)-L(t)g(t)\Big),\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$z(t) = e^{A_0 t}\Bigg(e^{-A_0 t_0}L(t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A_0\tau}B_0B_0^* e^{-A_0^*\tau}d\tau \times \\ \times N_0^{-1}(T)e^{-A_0 t_0}\left(e^{-A_0 T}L(t_0+T)x_T - L(t_0)x_0\right)\Bigg). \qquad (30)$$

Доказательство. В силу следствия 1, система (1) заменой переменных $z = L(t)x$, где $L(t)$ — матрица вида (8), отображается на систему (19). Выберем r-мерную вектор-функцию $v(t)$ в виде $v(t) = -B_0^* L(t)g(t)$. Тогда, в силу условия (18), имеем $B_0 v(t) + L(t)g(t) \equiv 0$, а, следовательно, условие (22) выполнено для любого $T \in (0, t_1 - t_0]$ и $z(t)$ имеет вид (30). Подставляя выражение для $v(t)$ в (23), получаем, что управление, переводящее произвольную заданную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в произвольную заданную точку $x_T \in \mathbb{R}^n$ по траектории $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$ за любое время $T \in (0, t_1 - t_0]$, имеет вид (29), т.е. система (1) является полностью управляемой за любое время $T \in (0, t_1 - t_0]$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$. □

3. Построение множества ограниченных программных управлений, решающих задачу локальной нуль-управляемости за свободное время

Рассмотрим задачу локальной нуль-управляемости за свободное время системы (1) с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$ и вектор-функцией $g(t) \in C[t_0, t_1]$, которая удовлетворяет условию (18), с ограничениями на управление вида $u \in \Omega = \{u \in \mathbb{R}^r : \|u\| \le d\}$, где $d > 0$ — заданное число.

Под *задачей локальной нуль-управляемости за свободное время* $T \in (0, t_1 - t_0]$ системы (1) с заданными ограничениями на управление $u \in \Omega$ будем понимать нахождение управления $u = u(t)$, переводящего произвольную заданную точку x_0 некоторой окрестности $Q \subset \mathbb{R}^n$ начала координат в начало координат за некоторое время $T = T(x_0)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ и удовлетворяющее ограничениям $u(t) \in \Omega$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Решение этой задачи проведем на основе метода функции управляемости [4]. Не ограничивая общности, считаем, что $\operatorname{rang} B(t) = r$. Предположим, что выполнено условие (6) и имеют место равенства (10). Определим вектор-функции $c_1(t), \ldots, c_r(t)$ равенствами (7) и рассмотрим невырожденную матрицу $L(t)$ вида (8). Тогда заменой переменных $z = L(t)x$ система (1) отображается на систему (19), которую перепишем в виде

$$\dot z = A_0 z + B_0\left(B_0^*\widetilde{A}(t)z + M(t)u + B_0^* L(t)g(t)\right), \qquad (31)$$

а точка x_0 отображается в точку $z_0 = L(t_0)x_0$.

Пусть $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ — произвольные неотрицательные невозрастающие на полуоси $[0, +\infty)$ функции, соответственно, с не менее, чем $n_1, \ldots, n_r$ точками убывания, которые удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty s^{2n_i-2} f_i(s) ds < \infty, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{32}$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество наборов f из таких функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$.

Для набора $f \in \mathcal{F}$ определим $(n \times n)$-матрицу $F_f(s) = \operatorname{diag}\Big(f_i(s)E_i\Big)_{i=1}^r$, где E_i — единичная $(n_i \times n_i)$-матрица, и рассмотрим семейство $\big\{N_{f,\alpha}(\Theta)\big\}_{\alpha \geq 1, \Theta > 0}$ положительно определенных матриц

$$N_{f,\alpha}(\Theta) = \int_0^\infty F_f\left(t/\Theta^{\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-A_0 t} B_0 B_0^* e^{-A_0^* t} dt, \tag{33}$$

где матрицы A_0 и B_0 имеют вид (20) и (16) соответственно.

Рассмотрим диагональные $(n \times n)$-матрицы

$$H^\alpha = \operatorname{diag}(H_1^\alpha, \ldots, H_r^\alpha), \quad D_\alpha(\Theta) = \operatorname{diag}(D_{\alpha,1}(\Theta), \ldots, D_{\alpha,r}(\Theta)),$$

где $H_i^\alpha = \operatorname{diag}\left(-\frac{2n_i - 2k + 1}{2\alpha}\right)_{k=1}^{n_i}$, $D_{\alpha,i}(\Theta) = \operatorname{diag}\left(\Theta^{\frac{2n_i - 2k+1}{2\alpha}}\right)_{k=1}^{n_i}$ — $(n_i \times n_i)$-матрицы, $i = 1, \ldots, r$.

Поскольку

$$\Theta^{\frac{1}{\alpha}} e^{-A_0 \Theta^{\frac{1}{\alpha}} s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* \Theta^{\frac{1}{\alpha}} s} = D_\alpha(\Theta) e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} D_\alpha(\Theta), \tag{34}$$

то из (33) получаем равенство

$$N_{f,\alpha}(\Theta) = D_\alpha(\Theta) N_f D_\alpha(\Theta), \tag{35}$$

где $N_f = \int\limits_0^\infty F_f(s) e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} ds$. Следовательно, матрица $N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)$ имеет представление

$$N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = D_\alpha^{-1}(\Theta) N_f^{-1} D_\alpha^{-1}(\Theta). \tag{36}$$

3.1. Построение множества функций управляемости.

Пусть a_0 — положительное число, условие выбора которого будет приведено далее. Для фиксированного набора f и конечного числа $\alpha \geq 1$ рассмотрим функцию

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, z) = 2a_0\Theta - (N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)z, z), \;\; \Theta > 0, \; z \neq 0. \tag{37}$$

Выберем любое число $\widehat{\Theta} > 0$. Положим $R_{f,\alpha} = \delta\sqrt{2a_0\widehat{\Theta}/\|N^{-1}_{f,\alpha}(\widehat{\Theta})\|}$, где $\delta \in (0,1)$, и рассмотрим область $\mathrm{Q}^1_{f,\alpha} = \{z:\ \|z\| \le R_{f,\alpha}\}$. Тогда

$$\Phi_{f,\alpha}(\widehat{\Theta}, z) > 0 \ \text{ для всех } \ z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}. \tag{38}$$

Лемма 2. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \ge 1$ уравнение*

$$\Phi_{f,\alpha}(\Theta, z) = 0, \quad z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}, \tag{39}$$

определяет единственную положительную, непрерывно дифференцируемую функцию $\Theta_{f,\alpha}(z)$, которая при условии

$$\Theta_{f,\alpha}(0) = 0 \tag{40}$$

является непрерывной в нуле.

Доказательство. Вычислим производную по Θ матрицы $N_{f,\alpha}(\Theta)$, имеем $\dfrac{\partial}{\partial\Theta} N_{f,\alpha}(\Theta) = \dfrac{1}{\Theta}\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta)$, где

$$\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta) = \int\limits_0^\infty \frac{s}{\alpha}\,\Theta^{1/\alpha} e^{-A_0 s\Theta^{1/\alpha}} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s\Theta^{1/\alpha}} d\left(-F_f(s)\right).$$

В силу равенства (34), матрица $\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta)$ имеет представление

$$\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta) = D_\alpha(\Theta)\widetilde{N}_{f,\alpha} D_\alpha(\Theta), \tag{41}$$

где $\widetilde{N}_{f,\alpha} = \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{s}{\alpha}\ e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} d\left(-F_f(s)\right)$ является, очевидно, неотрицательно определенной матрицей. Тогда имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial\Theta} N_{f,\alpha}(\Theta) = \frac{1}{\Theta} D_\alpha(\Theta)\widetilde{N}_{f,\alpha} D_\alpha(\Theta). \tag{42}$$

На основе равенства

$$\frac{\partial}{\partial\Theta} N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta) = -\frac{1}{\Theta} N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta) N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta),$$

получаем, что

$$\frac{\partial \Phi_{f,\alpha}(\Theta, z)}{\partial\Theta} \ge 2a_0 > 0, \quad z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}, \tag{43}$$

т.е. $\Phi_{f,\alpha}(\Theta, z)$ является возрастающей по Θ функцией. На основе неравенства $(N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta)z, z) \ge \|z\|^2/\|N_{f,\alpha}(\Theta)\|$, в силу (35), получаем

$$\lim_{\Theta\to+0} \Phi_{f,\alpha}(\Theta, z) = -\infty, \quad z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}. \tag{44}$$

Из соотношений (38), (43), (44) следует, что уравнение (39) имеет единственное положительное решение $\Theta = \Theta_{f,\alpha}(z)$, $z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}$. Поскольку функция $\Phi_{f,\alpha}(\Theta, z)$ является непрерывно дифференцируемой по Θ и по z, причем выполнено неравенство (43), то, в силу теоремы о неявной функции, функция $\Theta_{f,\alpha}(z)$ является непрерывно дифференцируемой в области $\mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}$ и ее производная $\left(\Theta_{f,\alpha}(z)\right)_z$ определяется равенством

$$\left(\Theta_{f,\alpha}(z)\right)_z = \frac{2N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha})z}{2a_0{+}\Theta^{-1}_{f,\alpha}\left(\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha})N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha})z, N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha})z\right)}. \qquad (45)$$

Покажем непрерывность функции $\Theta_{f,\alpha}(z)$ при $z = 0$. Из равенства (39), в силу (36), следует, что при малых значениях функции $\Theta_{f,\alpha}(z)$ справедливо неравенство

$$\Theta_{f,\alpha}(z) \leq \left(\|N_f^{-1}\|\|z\|^2/(2a_0)\right)^{\alpha/(\alpha+2n_1-1)}. \qquad (46)$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, удовлетворяющее неравенству $\delta < \sqrt{2a_0\varepsilon^{(\alpha+2n_1-1)/\alpha} / \|N_f^{-1}\|}$. Тогда из неравенства (46), учитывая (40), получаем, что $\Theta_{f,\alpha}(z) < \varepsilon$ для всех $z \in \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| < \delta\}$. □

3.2. Построение множества управлений.

Произведем в системе (31) замену управления

$$w = B_0^*\widetilde{A}(t)z + M(t)u + B_0^*L(t)g(t). \qquad (47)$$

Тогда система (31) принимает вид $\dot{z} = A_0z{+}B_0w$. Выберем управление $\widetilde{w}_{f,\alpha}(z)$ в виде

$$\widetilde{w}_{f,\alpha}(z) = -\frac{1}{2}B_0^*F_f(0)N^{-1}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha}(z))z, \quad z \in \mathrm{Q}^1_{f,\alpha} \setminus \{0\}. \qquad (48)$$

Лемма 3. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ управление $\widetilde{w}_{f,\alpha}(z)$ в каждом множестве $K(\rho_1, \rho_2) = \{z : 0 < \rho_1 \leq \|z\| \leq \rho_2 \leq R_{f,\alpha}\}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2)$ такой, что $L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$.*

Доказательство. Получим оценки снизу и сверху для функции управляемости $\Theta(z)$ в области $K(\varepsilon, \rho_2)$, где $\varepsilon \in (0, \rho_2)$. Поскольку функция $\Theta_{f,\alpha}(z)$ удовлетворяет равенству

$$2a_0\Theta_{f,\alpha}(z) = \left(D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))N_f^{-1}D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z, z\right), \qquad (49)$$

то

$$2a_0\Theta_{f,\alpha}(z) \leq \|N_f^{-1}\|\|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2\|z\|^2. \qquad (50)$$

Поскольку

$$\|D_\alpha^{-1}(\Theta)\| = \max\left\{\Theta^{-\frac{2n_1-1}{2\alpha}}, \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}\right\}, \qquad (51)$$

то из неравенства (50) получаем

$$\Theta_{f,\alpha}(z) \leq \Theta_{\max}(\rho_2), \quad z \in K(\varepsilon, \rho_2), \tag{52}$$

где

$$\Theta_{\max}(\rho_2) = \max\left\{ \left(\frac{1}{2a_0}\|N_f^{-1}\|\rho_2^2\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},\ \left(\frac{1}{2a_0}\|N_f^{-1}\|\rho_2^2\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2n_1-1}} \right\}.$$

Из равенства (49) имеем

$$2a_0\Theta_{f,\alpha}(z) \geq \frac{\|z\|^2}{\|D_\alpha(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2\|N_f\|}. \tag{53}$$

Поскольку

$$\|D_\alpha(\Theta)\| = \max\left\{\Theta^{\frac{1}{2\alpha}},\ \Theta^{\frac{2n_1-1}{2\alpha}}\right\}, \tag{54}$$

то из неравенства (53) получаем,

$$\Theta_{f,\alpha}(z) \geq \Theta_{\min}(\varepsilon), \quad z \in K(\varepsilon, \rho_2), \tag{55}$$

где

$$\Theta_{\min}(\varepsilon) = \min\left\{ \left(\frac{\varepsilon^2}{2a_0\|N_f\|}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},\ \left(\frac{\varepsilon^2}{2a_0\|N_f\|}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+2n_1-1}} \right\},$$

причем

$$\Theta_{\min}(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{56}$$

Получим оценку сверху для $\left(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z)\right)_z$ в области $K(\varepsilon, \rho_2)$.
Из равенства (45) получаем

$$\left\|(\Theta_{f,\alpha}(z))_z\right\| \leq \frac{1}{a_0}\,\|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2\|N_f^{-1}\|\|z\|. \tag{57}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z))_z = {} & \frac{1}{2\Theta_{f,\alpha}(z)}\,B_0^*F_f(0)N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\widetilde{N}_{f,\alpha}(\Theta_{f,\alpha}(z))\times \\ & \times N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\,(\Theta_{f,\alpha}(z))_z^*\,z - \frac{1}{2}\,B_0^*F_f(0)N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z)),\end{aligned}$$

то, в силу равенств (36), (41) и неравенства (57), имеем

$$\begin{aligned}\|\,(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z))_z\,\| \leq {} & \mu_1\frac{1}{\Theta_{f,\alpha}(z)}\|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^6\|D_\alpha(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2\|z\|^2+ \\ & +\mu_2\|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2,\end{aligned} \tag{58}$$

где $\mu_1 = \|F_f(0)\| \, \|N_f^{-1}\|^3 \|\widetilde{N}_{f,\alpha}\|/(2a_0)$, $\mu_2 = \|B_0^* F_f(0)\| \, \|N_f^{-1}\|/2$. На основе равенств (51), (54), в силу неравенств (52), (55), получаем

$$\frac{1}{\Theta_{f,\alpha}(z)} \|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^6 \|D_\alpha(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2 \le \overline{\Theta}_{\max}(\varepsilon, \rho_2), \ z \in K(\varepsilon, \rho_2),$$

$$\|D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))\|^2 \le \overline{\Theta}_{\min}(\varepsilon), \quad z \in K(\varepsilon, \rho_2),$$

где

$$\overline{\Theta}_{\max}(\varepsilon, \rho_2) = \max\left\{ \Theta_{\min}^{-\frac{6n_1+\alpha-4}{\alpha}}(\varepsilon), \Theta_{\min}^{\frac{2n_1-\alpha-4}{\alpha}}(\varepsilon), \Theta_{\max}^{\frac{2n_1-\alpha-4}{\alpha}}(\rho_2) \right\},$$

$$\overline{\Theta}_{\min}(\varepsilon) = \max\left\{ \Theta_{\min}^{-\frac{2n_1-1}{\alpha}}(\varepsilon), \ \Theta_{\min}^{-\frac{1}{\alpha}}(\varepsilon) \right\}.$$

Тогда из неравенства (58) получаем

$$\| \left(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z)\right)_z \| \le L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2), \quad z \in K(\varepsilon, \rho_2),$$

где $L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2) = \mu_1 \overline{\Theta}_{\max}(\varepsilon, \rho_2)\rho_2^2 + \mu_2 \overline{\Theta}_{\min}(\varepsilon)$. Поскольку, в силу соотношения (56), $\overline{\Theta}_{\min}(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$, то $L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, для любых $z' \in K(\rho_1, \rho_2)$, $z'' \in K(\rho_1, \rho_2)$ имеем

$$\|\widetilde{w}_{f,\alpha}(z') - \widetilde{w}_{f,\alpha}(z'')\| \le \| \left(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z)\right)_z \| \|z' - z''\| \le L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2) \|z' - z''\|,$$

где $L_{\widetilde{w}}(\varepsilon, \rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$. □

3.3. Установление дифференциального неравенства для функций управляемости и построение области управляемости.

Рассмотрим матрицы

$$P_f = -\frac{1}{2} B_0^* F_f(0) N_f^{-1}, \quad A_f = A_0 + B_0 P_f,$$

$$W_f = -(N_f^{-1} A_f + A_f^* N_f^{-1}), \quad N_f^\alpha = N_f^{-1} - H^\alpha N_f^{-1} - N_f^{-1} H^\alpha. \qquad (59)$$

Покажем, что W_f, N_f^α являются положительно определенными матрицами. Используя вид матрицы $F_f(s)$, имеем

$$A_0 N_f + N_f A_0^* = -\int_0^\infty F_f(s) d\left(e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s}\right) = F_f(0) B_0 B_0^* - \widehat{N}_f,$$

где $\widehat{N}_f = \int_0^\infty e^{-A_0 s} B_0 B_0^* e^{-A_0^* s} d(-F_f(s))$ является положительно определенной матрицей. Тогда

$$N_f^{-1} A_0 + A_0^* N_f^{-1} = N_f^{-1} F_f(0) B_0 B_0^* N_f^{-1} - N_f^{-1} \widehat{N}_f N_f^{-1},$$

откуда, в силу равенства $F_f(0)B_0B_0^* = B_0B_0^*F_f(0)$, получаем

$$W_f = N_f^{-1}\widehat{N}_f N_f^{-1}. \tag{60}$$

Следовательно, W_f является положительно определенной матрицей.

Поскольку из равенства (35) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\Theta}N_{f,\alpha}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}D_\alpha(\Theta)\left(-H^\alpha N_f - N_f H^\alpha\right)D_\alpha(\Theta),$$

то отсюда и из равенства (42) получаем равенство

$$\widetilde{N}_{f,\alpha} = -N_f H^\alpha - H^\alpha N_f. \tag{61}$$

Умножая обе части этого равенства слева и справа на матрицу N_f^{-1}, получаем

$$-N_f^{-1}H^\alpha - H^\alpha N_f^{-1} = N_f^{-1}\widetilde{N}_{f,\alpha}^{-1}N_f^{-1}.$$

Поскольку $\widetilde{N}_{f,\alpha}$ — неотрицательно определенная матрица, то $(-N_f^{-1}H^\alpha - -H^\alpha N_f^{-1})$ является неотрицательно определенной матрицей. Поскольку N_f^{-1} — положительно определенная матрица, то матрица N_f^α является положительно определенной.

Лемма 4. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ производная функции управляемости $\Theta_{f,\alpha}(z)$ в силу системы*

$$\dot{z} = A_0 z + B_0\widetilde{w}_{f,\alpha}(z) \tag{62}$$

определяется равенством

$$\dot{\Theta}_{f,\alpha}(z) = -\frac{\left(W_f D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z, D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z\right)}{\left(N_f^\alpha D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z, D_\alpha^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z\right)}\,\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(z), \quad z \in Q_{f,\alpha}^1 \setminus \{0\},$$

и удовлетворяет неравенствам

$$-\Lambda_{f,\alpha}\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(z) \leq \dot{\Theta}_{f,\alpha}(z) \leq -\lambda_{f,\alpha}\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(z), \quad z \in \mathrm{Q}_{f,\alpha}^1 \setminus \{0\}, \tag{63}$$

где $\Lambda_{f,\alpha} > 0$, $\lambda_{f,\alpha} > 0$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $(N_f^\alpha)^{-1}W_f$, где матрицы N_f^α и W_f определены равенствами (59).

Доказательство. Положим $y(\Theta, z) = D_\alpha^{-1}(\Theta)z$. Тогда, в силу (36), равенство (39) при $\Theta = \Theta_{f,\alpha}(z)$ и управление (48) принимают вид

$$2a_0\Theta_{f,\alpha}(z) - \left(N_f^{-1}\,y(\Theta_{f,\alpha}, z), y(\Theta_{f,\alpha}, z)\right) = 0, \tag{64}$$

$$\widetilde{w}_{f,\alpha}(z) = \Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}(z)P_f y. \tag{65}$$

В силу равенства $D_\alpha^{-1}(\Theta)\left(A_0 D_\alpha(\Theta)+B_0 P_f \Theta^{-\frac{1}{2\alpha}}\right)=A_f\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}$, имеем

$$\dot y=\left(\frac{\dot\Theta_{f,\alpha}(z)}{\Theta_{f,\alpha}(z)}\,H^\alpha+A_f\Theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{\alpha}}(z)\right)y. \tag{66}$$

Из равенства (64), в силу равенства (66), получаем, что производная функции управляемости $\Theta_{f,\alpha}(z)$ в силу системы (62) с управлением (65) имеет вид

$$\dot\Theta_{f,\alpha}(z)=-\frac{(W_f y,y)}{(N_f^\alpha y,y)}\,\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(z). \tag{67}$$

Получим точные оценки для $\dot\Theta_{f,\alpha}(z)$ в области $Q^1_{f,\alpha}\setminus\{0\}$.
Поскольку $\lambda_{f,\alpha}\le(W_f y,y)/(F_f^\alpha y,y)\le\Lambda_{f,\alpha}$, где $\lambda_{f,\alpha}>0$ $\Lambda_{f,\alpha}>0$, являются, соответственно, наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы $\left(N_f^\alpha\right)^{-1}W_f$, то из равенства (67) получаем неравенства (63). □

В следующей лемме строится область разрешимости задачи нуль-управляемости и приводятся оценки на время движения из любой точки этой области в начало координат.

Лемма 5. *Для каждого набора $f\in\mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha\ge1$ при выборе числа $c_{f,\alpha}$ из условия*

$$0<c_{f,\alpha}\le\min\left\{\frac{\sigma\delta^2\widehat\Theta}{\|N_{f,\alpha}(\widehat\Theta)\|\|N_{f,\alpha}^{-1}(\widehat\Theta)\|},\ \left(\frac{\lambda_{f,\alpha}(t_1-t_0)}{\alpha}\right)^\alpha\right\}, \tag{68}$$

где $\sigma\in(0,1)$, множество $\mathrm{Q}_{f,\alpha}=\{z:\Theta_{f,\alpha}(z)\le c_{f,\alpha}\}$ является ограниченным и $\mathrm{Q}_{f,\alpha}\subset\operatorname{int}\mathrm{Q}^1_{f,\alpha}$. Время движения $T_{f,\alpha}(z_0)$ из произвольной точки $z_0\in\mathrm{Q}_{f,\alpha}\setminus\{0\}$ в начало координат удовлетворяет оценкам

$$\frac{\alpha}{\Lambda_{f,\alpha}}\,\Theta_{f,\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(z_0)\le T_{f,\alpha}(z_0)\le\frac{\alpha}{\lambda_{f,\alpha}}\,\Theta_{f,\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(z_0). \tag{69}$$

Доказательство. В силу неравенства (38), имеем

$$\left\{z:(N_{f,\alpha}^{-1}(\widehat\Theta)z,z)<2a_0\widehat\Theta\right\}\supset\left\{z:\|z\|^2<2a_0\widehat\Theta/\|N_{f,\alpha}^{-1}(\widehat\Theta)\|\right\}.$$

Поскольку $(N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)z,z)$ — убывающая по Θ функция, то, в силу неравенства $(N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)z,z)\ge\|z\|^2/\|N_{f,\alpha}(\Theta)\|$, получаем

$$\mathrm{Q}^1_{f,\alpha}\supset\left\{z:\ \Theta_{f,\alpha}(z)\le R^2_{f,\alpha}/(2a_0\|N_{f,\alpha}(\widehat\Theta)\|)\right\}.$$

Используя выражение для $R_{f,\alpha}$, получаем, что для числа $c_{f,\alpha}$, удовлетворяющего условию (68), справедливо включение $\mathrm{Q}_{f,\alpha}\subset\operatorname{int}\mathrm{Q}^1_{f,\alpha}$.

В силу теоремы 1.3 [4], из неравенства (63) получаем, что время движения $T_{f,\alpha}=T_{f,\alpha}(z_0)$ из произвольной точки $z_0\in\mathrm{Q}_{f,\alpha}\setminus\{0\}$ в начало координат по траектории $z(t)$ системы (62) удовлетворяет оценкам (69). □

3.4. Ограниченность управления.

Из (47), в силу (48) и невырожденности матрицы $M(t)$, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_{f,\alpha}(t,z) &= M^{-1}(t)\Big(\widetilde{w}_{f,\alpha}(z) - B_0^*\widetilde{A}(t)z - B_0^*L(t)g(t)\Big) = \\ &= -M^{-1}(t)B_0^*\Big(\frac{1}{2}F_f(0)N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta_{f,\alpha}(z))z + \widetilde{A}(t)z + L(t)g(t)\Big).\end{aligned} \tag{70}$$

В силу леммы 3, управление $\widetilde{u}_{f,\alpha}(t,z)$ удовлетворяет условию Липшица в каждом множестве $K_t(\rho_1,\rho_2) = \{(t,z) : t \in [t_0,t_1], 0 < \rho_1 \le \|z\| \le \rho_2 \le R_{f,\alpha}\}$ с $L_{\widetilde{u}}(\varepsilon,\rho_2) = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \|M^{-1}(t)\|\Big(L_{\widetilde{w}}(\varepsilon,\rho_2) + \max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\|B_0^*\widetilde{A}(t)\|\Big) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим $\theta_{f,\alpha}(t) = \Theta_{f,\alpha}(z(t))$, $\Theta_{f,\alpha}^0$ — единственное положительное решение уравнения (39) при $z = z_0$. Тогда $z(t)$ на $[t_0, t_0 + T_{f,\alpha}]$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z - \dfrac{1}{2}B_0B_0^*F_f(0)N_{f,\alpha}^{-1}(\theta_{f,\alpha})z, \\ \dot{\theta}_{f,\alpha} = -\dfrac{\big(W_fD_\alpha^{-1}(\theta_{f,\alpha})z, D_\alpha^{-1}(\theta_{f,\alpha})z\big)}{(N_f^\alpha D_\alpha^{-1}(\theta_{f,\alpha})z, D_\alpha^{-1}(\theta_{f,\alpha})z)}\,\theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}, \\ z(t_0) = z_0, \\ \theta_{f,\alpha}(t_0) = \Theta_{f,\alpha}^0. \end{cases} \tag{71}$$

Рассмотрим управление $u_{f,\alpha}(t)$ при $t \in [t_0, t_0+T_{f,\alpha}]$ вида

$$\begin{aligned}u_{f,\alpha}(t) = \widetilde{u}_{f,\alpha}(t,z(t)) &= M^{-1}(t)\Big(w_{f,\alpha}(t) - B_0^*(\widetilde{A}(t)z(t) + L(t)g(t))\Big) = \\ &= -M^{-1}(t)B_0^*\Big(\frac{1}{2}F_f(0)N_{f,\alpha}^{-1}(\theta_{f,\alpha}(t))z(t) + \widetilde{A}(t)z(t) + L(t)g(t)\Big).\end{aligned} \tag{72}$$

Лемма 6. *Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \ge 1$ число a_0 в уравнении (39) может быть выбрано таким, что управление (72) удовлетворяет ограничениям вида*

$$\|u_{f,\alpha}(t)\| \le d, \quad t \in [t_0, t_0 + T_{f,\alpha}], \tag{73}$$

где

$$d > d_0 = \max_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]} \|M^{-1}(t)B_0^*L(t)g(t)\|, \quad \widehat{T}_{f,\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_{f,\alpha}}\,c_{f,\alpha}^{1/\alpha}. \tag{74}$$

Доказательство. Перепишем управление $u_{f,\alpha}(t)$ из (72) в виде

$$\begin{aligned}u_{f,\alpha}(t) = M^{-1}(t)\bigg(\Big(\theta_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2\alpha}}(t)P_f - B_0^*\widetilde{A}(t)D_\alpha(\theta_{f,\alpha}(t))\Big)y(t) - \\ -B_0^*L(t)g(t)\bigg), \quad t \in [t_0, t_0 + T_{f,\alpha}],\end{aligned} \tag{75}$$

где $y(t) = D_\alpha^{-1}(\theta_{f,\alpha}(t))z(t)$. Из (63) следует, что $\theta_{f,\alpha}(t) \le c_{f,\alpha}$ и $z(t) \in Q_{f,\alpha}$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T_{f,\alpha}]$. Из равенства (64) имеем

$$\|y(t)\|^2 \le 2a_0\theta_{f,\alpha}(t)\|N_f\|, \quad t \in [t_0, t_0 + T_{f,\alpha}].$$

Поскольку $\|D_\alpha(\Theta)\| = \max\left\{\Theta^{\frac{1}{2\alpha}},\ \Theta^{\frac{2n_1-1}{2\alpha}}\right\}$, то из (75) получаем, что при $t \in [t_0, t_0{+}T_{f,\alpha}] \subset [t_0, t_0 + \widehat{T}_{f,\alpha}] \subset [t_0, t_1]$ справедливо неравенство

$$\|u_{f,\alpha}(t)\|{\le}\left(M_1 c_{f,\alpha}^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}{+}M_2\max\left\{c_{f,\alpha}^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}, c_{f,\alpha}^{\frac{2n_1+\alpha-1}{2\alpha}}\right\}\right)\sqrt{2a_0\|N_f\|}{+}d_0, \tag{76}$$

где $M_1 = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]}\|M^{-1}(t)P_f\|$, $M_2 = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\widehat{T}_{f,\alpha}]}\|M^{-1}(t)B_0^*\widetilde{A}(t)\|$. Выберем число a_0 в уравнении (39) из условия

$$0 < a_0 \le \frac{(d-d_0)^2}{2\|N_f\|\left(M_1 c_{f,\alpha}^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} + M_2\max\left\{c_{f,\alpha}^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}, c_{f,\alpha}^{\frac{2n_1+\alpha-1}{2\alpha}}\right\}\right)^2}. \tag{77}$$

Тогда из неравенства (76) получаем, что управление $u_{f,\alpha}(t)$ вида (72) удовлетворяет ограничениям (73). □

Теорема 3. *Рассмотрим с матрицами $A(t) \in C^{(2n-2)}[t_0, t_1]$, $B(t) \in C^{(2n-1)}[t_0, t_1]$ ($\operatorname{rang} B(t) = r$) и удовлетворяющей условию (6) вектор-функцией $g(t) \in C[t_0, t_1]$ систему (1), для которой выполнено условие (18) и имеют место равенства (10), с ограничениями на управление вида $\|u\| \le d$, где d — заданное число, удовлетворяющее неравенству (74).*

Пусть выполнены следующие условия:

1) *$f \in \mathcal{F}$ — набор неотрицательных невозрастающих функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ на полуоси $[0, +\infty)$, соответственно, с не менее, чем $n_1, \ldots, n_r$ числом точек убывания, которые удовлетворяют условиям (32);*
2) *для конечного числа $\alpha \ge 1$ постоянная $c_{f,\alpha}$ удовлетворяет условию (68) и число a_0 удовлетворяет условию (77);*
3) *функция управляемости $\Theta_{f,\alpha}(L(t)x)$ при $x \ne 0$ определяется из уравнения (39) и $\Theta_{f,\alpha}(0) = 0$;*
4) *$\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t) = \{x : \Theta\big(L(t)x\big) \le c_{f,\alpha}\}$, $t \in [t_0, t_1]$.*

Тогда для системы (1) управление $u_{f,\alpha}(t)$ вида (72) решает задачу локальной нуль-управляемости в области $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t_0)$ за свободное время и удовлетворяет заданным ограничениям, причем время движения $T_{f,\alpha}\big(L(t_0)x_0\big)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат по траектории $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, где $z(t)$ — решение задачи (71), удовлетворяет оценкам (69).

Доказательство. Для каждого набора $f \in \mathcal{F}$ и каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ построена неотрицательная функция управляемости $\Theta(L(t)x) = \Theta_{f,\alpha}(z)$, которая при условии $\Theta_{f,\alpha}(0) = 0$ является непрерывной в области $Q^1_{f,\alpha}(t) = \{(t,x) : t \in [t_0,t_1], \|L(t)x\| \leq R_{f,\alpha}\}$ и непрерывно дифференцируемой в этой области при $x \neq 0$ (лемма 2), для которой выполнены неравенства (63) (лемма 4) и справедливо включение $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t) \subset \operatorname{int} \mathrm{Q}^1_{f,\alpha}(t)$ (лемма 5). Управление $\widetilde{u}_{f,\alpha}(t, L(t)x)$ вида (70) удовлетворяет условию Липшица в каждой области $\{(t,x) : t_0 \leq t \leq t_1, 0 < \rho_1 \leq \|L(t)x\| \leq \rho_2\}$ с постоянной $L_{\widetilde{u}}(\varepsilon, \rho_2) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$ и $u_{f,\alpha}(t) = \widetilde{u}_{f,\alpha}(t, L(t)x(t))$ удовлетворяет заданным ограничениям (73) (лемма 6).

Тогда на основе теоремы 1.1. [4] и теоремы 1.3 [4] получаем утверждение данной теоремы. □

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 3 функции*

$$f_1(s) = \ldots = f_r(s) = f^\alpha(s) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{s}{\alpha}\right)^\alpha & \textit{при } s \in [0,\alpha), \\ 0 & \textit{при } s \geq \alpha. \end{cases} \tag{78}$$

Тогда для системы (1) управление вида (72) решает задачу локальной нуль-управляемости в области $\mathrm{Q}_{f,\alpha}(t_0)$ за свободное время и удовлетворяет заданные ограничения, причем время движения $T_{f,\alpha} = T_{f,\alpha}(L(t_0)x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат по траектории $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, где $z(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \dot{z} = \left(A_0 - \frac{1}{2}B_0B_0^*F_{f,\alpha}\left(\left(\frac{t_0+T_{f,\alpha}-t}{\alpha}\right)^\alpha\right)\right)z, \\ z(t_0) = L(t_0)x_0, \end{cases} \tag{79}$$

равно $\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}_{f,\alpha}\big(L(t_0)x_0\big)$.

Доказательство. Для такого набора f функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ вида (78) матрица $F_f(s) = f^\alpha(s)E$ и $d(-f^\alpha(s)) = \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^{\alpha-1} ds$. Следовательно, матрицы N_f, $\widetilde{N}_{f,\alpha}$, $\widehat{N}_f$ принимают вид

$$N_f = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^\alpha e^{-A_0s}B_0B_0^*e^{-A_0^*s}ds,$$

$$\widetilde{N}_{f,\alpha} = \int_0^\alpha \frac{s}{\alpha}\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^{\alpha-1} e^{-A_0s}B_0B_0^*e^{-A_0^*s}ds,$$

$$\widehat{N}_f = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)^{\alpha-1} e^{-A_0s}B_0B_0^*e^{-A_0^*s}ds.$$

Для этих матриц справедливо равенство $N_f + \widetilde{N}_{f,\alpha} = \widehat{N}_f$, и, следовательно, $N_f^{-1}\widehat{N}_f N_f^{-1} = N_f^{-1}\left(N_f + \widetilde{N}_{f,\alpha}\right)N_f^{-1}$. Тогда, используя равенства (60), (61), получаем равенство

$$W_f = N_f^{-1} - H^\alpha N_f^{-1} - N_f^{-1}H^\alpha = N_f^\alpha. \tag{80}$$

Из равенства (34), в силу равенства (80), имеем

$$\dot{\Theta}_{f,\alpha}(L(t)x) = -\Theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}(L(t)x), \tag{81}$$

откуда получаем, что $T = T_{f,\alpha}(L(t_0)x_0)$ — время движения из произвольной точки $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат, определяется равенством $T_{f,\alpha}(L(t_0)x_0) = \alpha\Theta_{f,\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(L(t_0)x_0)$.

Из (81) следует, что функция $\theta_{f,\alpha}(t)$ является решением задачи Коши

$$\dot{\theta}_{f,\alpha} = -\theta_{f,\alpha}^{1-\frac{1}{\alpha}}, \quad \theta_{f,\alpha}(t_0) = \Theta_{f,\alpha}^0$$

и имеет вид

$$\theta_{f,\alpha}(t) = \left(t_0 + \alpha\left(\Theta_{f,\alpha}^0\right)^{\frac{1}{\alpha}} - t\right)^\alpha / \alpha^\alpha = \left(t_0 + T_{f,\alpha} - t\right)^\alpha / \alpha^\alpha. \tag{82}$$

Тогда из (71), в силу (82), получаем, что траектория $z(t)$, по которой точка z_0 переходит в начало координат за время $T_{f,\alpha}(z_0)$, является решением задачи Коши (79). Следовательно, в силу равенства $z = L(t)x$, имеем, что траектория $x(t)$, по которой точка x_0 переходит в начало координат за время $T_{f,\alpha} = \alpha\Theta_{f,\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}\big(L(t_0)x_0\big)$, определяется равенством $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$. □

3.5. Нахождение траектории.

Для набора f из произвольных неотрицательных невозрастающих функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ на полуоси $[0, +\infty)$, соответственно, с не менее, чем $n_1, \ldots, n_r$ точками убывания, которые удовлетворяют условиям (32), и конечного фиксированного числа $\alpha \geq 1$ найдем траекторию $x(t)$ системы (1), которая отвечает управлению $u_{f,\alpha}(t)$ и начинается в произвольной точке $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ в момент времени t_0 и оканчивается в начале координат. Для этого выберем число a_0 из условия (77) и найдем единственный положительный корень $\Theta_{f,\alpha}^0$ уравнения (39) при $z = z_0 = L(t_0)x_0$. Тогда $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, где $z(t)$ — решение задачи Коши (71).

Отдельно рассмотрим нахождение отвечающей управлению $u_{f,\alpha}(t)$ траектории $x(t)$ системы (1), которая начинается в произвольной точке $x_0 \in Q_{f,\alpha}(t_0)$ и оканчивается в начале координат, в случае набора f из функций $f_1(s), \ldots, f_r(s)$ вида (78) и фиксированного числа $\alpha \geq 1$. Для этого выберем число a_0 из условия (77) и найдем единственный положительный корень $\Theta_{f,\alpha}^0$ уравнения (39) при $z = z_0 = L(t_0)x_0$ и определим время движения $T_{f,\alpha}(z_0) =$

$= \alpha \left(\Theta^0_{f,\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Рассмотрим задачу Коши (79), которая в компонентной форме записи имеет вид

$$\begin{cases} \dot z_{s_{i-1}+j} = z_{s_{i-1}+j+1}, \ j = 1, \dots, n_i - 1, \\ \dot z_{s_i} = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n_i} \dfrac{\alpha^{n_i-k+1} n'_{s_i s_{i-1}+k} z_{s_{i-1}+k}}{(t_0 + T_{f,\alpha} - t)^{n_i-k+1}}, & i = 1, \dots, r, \\ z_{s_{i-1}+j}(t_0) = \left(\Delta_*^{j-1} c_i(t_0)\right)^* x_0, \quad j = 1, \dots, n_i, \end{cases}$$

где n'_{ij} — элементы матрицы N_f^{-1}. Отсюда для каждого $i = 1, \dots, r$ получаем задачу Коши для функции $z_{s_{i-1}+1}(t)$ вида

$$\begin{cases} 2(t_0 + T_{f,\alpha} - t)^{n_i} z^{(n_i)}_{s_{i-1}+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n_i} \alpha^k n'_{s_i s_{i-k+1}} (t_0 + T_{f,\alpha} - t)^{n_i-k} z^{(n_i-k)}_{s_{i-1}+1} = 0, \\ z^{(j)}_{s_{i-1}+1}(t_0) = z_{s_{i-1}+j+1}(t_0), \quad j = 0, \dots, n_i - 1. \end{cases} \tag{83}$$

Эти дифференциальные уравнения являются уравнениями Эйлера, которые сводятся к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Обозначим через Δ_0 — тождественный оператор,

$$\Delta_1 = -\frac{d}{d\tau}, \quad \Delta_k = \left(-\frac{d}{d\tau} + k - 1\right) \dots \left(-\frac{d}{d\tau}\right), \quad k = 2, \dots, n_1.$$

Заменой времени $t = t_0 + T_{f,\alpha} - e^\tau$ из (83) получаем задачи Коши относительно функций $y_i(\tau) = z_{s_{i-1}+1}(t_0 + T_{f,\alpha} - e^\tau)$, $i = 1, \dots, r$, вида

$$\begin{cases} 2\Delta_{n_i} y_i(\tau) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n_i} \alpha^k n'_{s_i s_{i-k+1}} \Delta_{n_i-k} y_i(\tau) = 0, \\ y_i(\tau_0) = c_i^*(t_0) x_0, \\ (\Delta_1 y_i)(\tau_0) = T_{f,\alpha} \left(\Delta_* c_i(t_0)\right)^* x_0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (\Delta_{n_i-1} y_i)(\tau_0) = T^{n_i-1}_{f,\alpha} (\Delta_*^{n_i-1} c_i(t_0))^* x_0, \end{cases} \tag{84}$$

где $\tau_0 = \ln(T_{f,\alpha})$. Решив эти задачи Коши, находим функции $y_1(\tau), \dots, y_r(\tau)$. Тогда

$$z_{s_{i-1}+1}(t) = y_i(\ln(t_0 + T_{f,\alpha} - t)), \quad i = 1, \dots, r, \tag{85}$$

а остальные функции $z_{s_{i-1}+2}(t), \dots, z_{s_i}(t)$ находятся путем дифференцирования последнего равенства, т.е.

$$z_{s_{i-1}+j}(t) = z^{(j-1)}_{s_{i-1}+1}(t), \quad j = 2, \dots, n_i, \tag{86}$$

и, таким образом, $z(t)$ найдено. Тогда траектория $x(t)$, по которой управление $u_{f,\alpha}(t)$ переводит точку $x_0 \in \mathrm{Q}_{f,\alpha}(t_0)$ в начало координат за время $T_{f,\alpha}$, определяется равенством $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$. Как следует из выше изложенного, для ее нахождения требуется лишь один раз решить уравнение (39).

Отметим, что i-тая компонента управления $w_{f,\alpha}(t)$ может быть найдена также путем дифференцирования функции $z_{s_i}(t)$, а, следовательно,

$$w_{f,\alpha}(t) = \widetilde{w}_{f,\alpha}(z(t)) = \begin{pmatrix} \dot{z}_{s_1}(t) \\ \dot{z}_{s_2}(t) \\ \dots \\ \dot{z}_{s_r}(t) \end{pmatrix},$$

и

$$u_{f,\alpha}(t) = M^{-1}(t)\left(w_{f,\alpha}(t) - B_0\widetilde{A}(t)z(t) - B_0^*L(t)g(t)\right).$$

Пример 1. Рассмотрим построение множества управлений, решающих задачу локальной нуль-управляемости для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{1+t}\,x_1 + \dfrac{1}{(1+t)^2}\,x_2 + \dfrac{1}{1+t}\,u + \dfrac{\sin 10t}{2+2t}, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - \dfrac{2}{1+t}\,x_2 + 2u + \sin 10t, \quad t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{87}$$

и удовлетворяющих ограничениям $|u| \le d$. Эта система имеет вид (1), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} & \frac{1}{(1+t)^2} \\ 2 & -\frac{2}{1+t} \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+t} \\ 2 \end{pmatrix},\ g(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin 10t}{2t+2} \\ \sin 10t \end{pmatrix}.$$

Система (87) является полностью управляемой без ограничений на управление, поскольку

$$\det Q(t) = \det(B(t), \Delta B(t)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+t} & \frac{4}{(1+t)^2} \\ 2 & -\frac{2}{1+t} \end{vmatrix} = -\frac{10}{(1+t)^2}.$$

Поскольку управление является одномерным, то $K(t) = Q(t)$. Определим вектор-функцию

$$c(t) = (K^*(t))^{-1} B_0 = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{5} & \frac{(1+t)^2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1+t}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+t)^2}{5} \\ -\frac{1+t}{10} \end{pmatrix},$$

а, следовательно, и невырожденную матрицу

$$L(t) = \begin{pmatrix} c^*(t) \\ (\Delta_* c(t))^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+t)^2}{5} & -\frac{1+t}{10} \\ \frac{2+2t}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix},\ \det L(t) = \frac{(1+t)^2}{10}.$$

Функция $g(t)$ удовлетворяет условию (18), поскольку $c^*(t)g(t) = 0$. Так как $M^{-1}(t)B_0^*L(t)g(t) = (\sin 10t)/2$, то $d_0 = 1/2$.

Заменой переменных

$$z = L(t)x = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+t)^2}{5}\, x_1 - \dfrac{1+t}{10}\, x_2 \\ \dfrac{2+2}{5}\, x_1 + \dfrac{3}{10}\, x_2 \end{pmatrix} \tag{88}$$

система (87) отображается на систему

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = \dfrac{5}{(1+t)^2}\, z_1 + \dfrac{1}{1+t}\, z_2 + u + \dfrac{1}{2}\sin 10t, \end{cases} \tag{89}$$

при этом произвольно заданная точка x_0 отображается в точку $z_0 = L(0)x_0$.

Выберем функцию $f(s)$ в виде (78). Тогда

$$N_{f,\alpha}(\Theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha^3\Theta^{3/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} & -\dfrac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \\ -\dfrac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)} & \dfrac{\alpha\Theta^{1/\alpha}}{1+\alpha} \end{pmatrix}, \tag{90}$$

$$N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{(2+\alpha)^2(3+\alpha)}{\alpha^3\Theta^{3/\alpha}} & \dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}} \\ \dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}} & \dfrac{2(2+\alpha)}{\alpha\Theta^{1/\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Выберем число $\widehat\Theta > 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|N_{f,\alpha}(\widehat\Theta)\| = {} & \frac{\alpha\widehat\Theta^{1/\alpha}}{2(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)}\Big((2+\alpha)(3+\alpha)+2\alpha^2\widehat\Theta^{2/\alpha}+ \\ & +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2+4\alpha^2(3+\alpha)\widehat\Theta^{2/\alpha}+4\alpha^4\widehat\Theta^{4/\alpha}}\,\Big), \end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} \|N_{f,\alpha}^{-1}(\widehat\Theta)\| = {} & \frac{2+\alpha}{2\alpha^3\widehat\Theta^{3/\alpha}}\Big((2+\alpha)(3+\alpha) + 2\alpha^2\widehat\Theta^{2/\alpha}+ \\ & +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2 + 4\alpha^2(3+\alpha)\widehat\Theta^{2/\alpha} + 4\alpha^4\widehat\Theta^{4/\alpha}}\,\Big), \end{aligned} \tag{93}$$

то условие (68) выбора $c_{f,\alpha}$ принимает вид

$$\begin{aligned} 0<c_{f,\alpha}\le & \Big(4\sigma\alpha^2(1+\alpha)(3+\alpha)\widehat\Theta^{\,1+2/\alpha}\Big)\Big/\Big((2+\alpha)(3+\alpha)+2\alpha^2\widehat\Theta^{\,2/\alpha}+ \\ & +\sqrt{(6+5\alpha+\alpha^2)^2+4\alpha^2(3+\alpha)\widehat\Theta^{\,2/\alpha}+4\alpha^4\widehat\Theta^{\,4/\alpha}}\,\Big)^2, \quad \sigma\in(0,1). \end{aligned}$$

В частности, при $\alpha = 5$ для $\widehat\Theta = 10$ и значениях $\sigma \in [0.99, 1)$, $\delta \in [0.99, 1)$ постоянную $c_{f,5}$ можно взять равной единице.

Выберем число a_0 из условия (77), положив его равным

$$\frac{(d-0.5)^2}{2\|N_f\|\left(M_1 c_{f,\alpha}^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}+M_2 c_{f,\alpha}^{\gamma}\right)^2},$$

где $d>1/2$,

$$\|N_f\|=\frac{\alpha\Big((2+\alpha)(3+\alpha)+\alpha^2+\sqrt{36+60\alpha+49\alpha^2+14\alpha^3+5\alpha^4}\Big)}{2(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)},$$

$$M_1=\frac{2+\alpha}{2\alpha^2}\sqrt{9+6\alpha+5\alpha^2}\,,\quad M_2=\max_{t\in[0,\widehat{T}_{f,\alpha}]}\frac{\sqrt{26+2t+t^2}}{(1+t)^4}=\sqrt{26}.$$

Определим функцию $\Theta_{f,\alpha}(z)$ при $z\neq 0$ из уравнения (39), которое принимает вид

$$2a_0\Theta-\frac{(2+\alpha)^2(3+\alpha)z_1^2}{\alpha^3\Theta^{3/\alpha}}-\frac{2(2+\alpha)(3+\alpha)z_1z_2}{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}-\frac{2(2+\alpha)z_2^2}{\alpha\Theta^{1/\alpha}}=0, \tag{94}$$

и рассмотрим область $Q_{f,\alpha}=\{z:\Theta_{f,\alpha}(z)\le c_{f,\alpha}\}$. Граница этой области имеет вид $\Big\{z:\big(N_{f,\alpha}^{-1}(c_{f,\alpha})z,z\big)=2a_0c_{f,\alpha}\Big\}$.

Построим управление $u_{f,\alpha}(t)$, которое переводит произвольно заданную точку x_0 области $Q_{f,\alpha}=\Big\{x_0:\big(N_{f,\alpha}^{-1}(c_{f,\alpha})L(0)x_0,L(0)x_0\big)\le 2a_0c_{f,\alpha}\Big\}$ в начало координат по траектории системы (87) за некоторое время $T=T_{f,\alpha}(x_0)$ и удовлетворяет заданным ограничениям. Для этого найдем единственный положительный корень $\Theta_{f,\alpha}^0$ уравнения (94) при $z_1=z_{10}$, $z_2=z_{20}$, определим $T_{f,\alpha}=\alpha\left(\Theta_{f,\alpha}^0\right)^{1/\alpha}$ и рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot z_1=z_2,\quad \dot z_2=-\dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{2\alpha^2\theta^{2/\alpha}}\,z_1-\dfrac{2+\alpha}{\alpha\theta^{1/\alpha}}\,z_2,\quad \dot\theta=-\theta^{1-1/\alpha},\\ z_1(0)=z_{10},\quad z_2(0)=z_{20},\quad \theta(0)=\Theta_{f,\alpha}^0. \end{cases} \tag{95}$$

Поскольку решение задачи Коши $\dot\theta=-\theta^{1-1/\alpha}$, $\theta(0)=\Theta_{f,\alpha}^0$ имеет вид

$$\theta(t)=\Big(\alpha\left(\Theta_{f,\alpha}^0\right)^{1/\alpha}-t\Big)^{\alpha}/\alpha^{\alpha}=\left(T_{f,\alpha}-t\right)^{\alpha}/\alpha^{\alpha},$$

то из (95) получаем, что $z(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot z_1=z_2,\quad \dot z_2=-\dfrac{(2+\alpha)(3+\alpha)}{2(T_{f,\alpha}-t)^2}\,z_1-\dfrac{2+\alpha}{T_{f,\alpha}-t}\,z_2,\\ z_1(0)=z_{10},\quad z_2(0)=z_{20}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 2(T_{f,\alpha}-t)^2\ddot z_1+(4+2\alpha)(T_{f,\alpha}-t)\dot z_1+(2+\alpha)(3+\alpha)z_1=0,\\ z_1(0)=z_{10},\\ \dot z_1(0)=z_{20}. \end{cases}$$

Заменой времени $t = T_{f,\alpha} - e^{\tau}$ имеем относительно функции $y_1(\tau) = z_1(T_{f,\alpha} - e^{\tau})$ задачу Коши

$$\begin{cases} 2y_1'' - 2(3+\alpha)y_1' + (2+\alpha)(3+\alpha)y_1 = 0, \\ y_1(\tau_0) = z_{10}, \\ y_1'(\tau_0) = -T_{f,\alpha}z_{20}, \end{cases}$$

где $\tau_0 = \ln T_{f,\alpha}$. Решением этой задачи Коши является функция

$$y_1(\tau) = e^{\frac{1}{2}(3+\alpha)\tau}\Big((k_1 \cos\mu\tau + k_2 \sin\mu\tau\Big),$$

где $\mu = \sqrt{(1+\alpha)(3+\alpha)}/2$,

$$k_1 = \frac{1}{2\mu}T_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2}(3+\alpha)}\Big((2\mu\cos\mu\tau_0 + (3+\alpha)\sin\mu\tau_0)\, z_{10} + 2T_{f,\alpha}z_{20}\sin\mu\tau_0\Big),$$
$$k_2 = \tfrac{1}{2\mu}T_{f,\alpha}^{-\frac{1}{2}(3+\alpha)}\Big((2\mu\sin\mu\tau_0 - (3+\alpha)\cos\mu\tau_0)\, z_{10} - 2T_{f,\alpha}z_{20}\cos\mu\tau_0\Big).$$

Тогда из равенств $z_1(t) = y_1(\ln(T_{f,\alpha} - t)$, $z_2(t) = \dot{z}_1(t)$ получаем

$$z(t) = \begin{pmatrix} (T_{f,\alpha}-t)^{\frac{3+\alpha}{2}}\Big(k_1\cos\mu\ln(T_{f,\alpha}-t) + k_2\sin\mu\ln(T_{f,\alpha}-t)\Big) \\ (T_{f,\alpha}-t)^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big(k_3\cos\mu\ln(T_{f,\alpha}-t) + k_4\sin\mu\ln(T_{f,\alpha}-t)\Big) \end{pmatrix},$$

где $k_3 = -k_1(3+\alpha)/2 - k_2\mu$, $k_4 = k_1\mu - k_2(3+\alpha)/2$.

Таким образом, управление $u_{f,\alpha}(t)$, переводящее заданную точку $x_0 = (x_{10}, x_{20})^*$ области $Q_{f,\alpha} = \Big\{x_0 : \Big(N_{f,\alpha}^{-1}(c_{f,\alpha})L(0)x_0, L(0)x_0\Big) \le 2a_0c_{f,\alpha}\Big\}$ в начало координат по траектории

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+t)^2}\, z_1(t) + \dfrac{1}{1+t}\, z_2(t) \\ -\dfrac{4}{1+t}\, z_1(t) + 2z_2(t) \end{pmatrix}$$

за время $T_{f,\alpha} = \alpha\Big(\Theta_{f,\alpha}^0\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$, где $\Theta_{f,\alpha}^0$ — единственный положительный корень уравнения $2a_0\Theta = (F_{f,\alpha}(\Theta)L(0)x_0, L(0)x_0)$, и удовлетворяет заданным ограничениям, имеет вид

$$u_{f,\alpha}(t) = -\frac{(2+\alpha)(3+\alpha)z_1(t)}{2(T_{f,\alpha}-t)^2} + \frac{5z_1(t)}{(1+t)^2} - \frac{(2+\alpha)z_2(t)}{T_{f,\alpha}-t} - \frac{z_2(t)}{1+t} - \frac{\sin 10t}{2}.$$

Рассмотрим случай $d = 5$. Пусть $\alpha = 5$, $\widehat{\Theta} = 10$. Выберем $c_{f,5} = 1$. Тогда

$$a_0 = \frac{425250}{(18259 + 350\sqrt{1066})(53 + \sqrt{1609})},$$

а область, в которой управление $u_{f,5}(t)$ решает задачу локальной нуль-управляемости для системы (87), имеет вид

$$Q_{f,5} = \big\{(x_{10}, x_{20})^* :\ 832x_{10}^2 + 568x_{10}x_{20} + 133x_{20}^2 \le 12500a_0/7\big\}$$

и изображена на рис. 1.

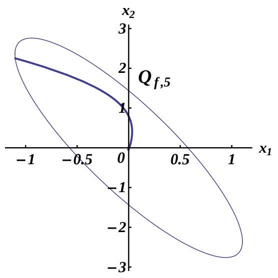

Рис. 1: Область $Q_{f,5}$ и фазовая траектория.

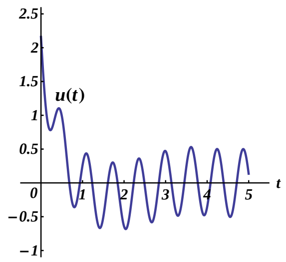

Рис. 2: График управления $u(t)$.

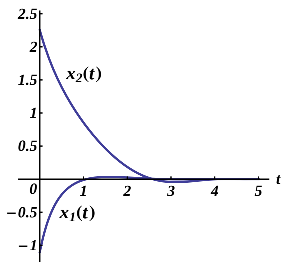

Рис. 3: Графики компонент траектории $x(t)$ на $[0, T_{f,5}]$.

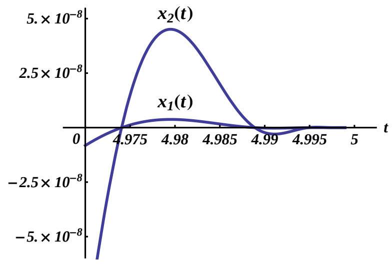

Рис. 4: Графики компонент траектории $x(t)$ на $[4.97, T_{f,5}]$.

График управления $u_{f,5}(t)$, которое переводит точку $x_0 = (-1.1, 2.25)^*$ в начало координат за время $T_{f,5} = 4.99895...$, и графики компонент соответствующей траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^*$ изображены, соответственно, на рис. 2, 3, 4, а на рис. 1 изображена фазовая траектория.

Пример 2. Рассмотрим построение управлений, решающих задачу локальной нуль-управляемости за свободное время для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + u_2 + \sin 5t, \\ \dot{x}_2 = u_1 - \cos 5t, \\ \dot{x}_3 = x_2 + tx_4, \\ \dot{x}_4 = tx_2 - tu_1 + t\cos 5t, \\ \dot{x}_5 = tx_3 + x_5 + tu_2 + t\sin 5t, \end{cases} \qquad t \in [0, \infty), \tag{96}$$

и удовлетворяющих ограничениям $\|u\| \le d$, где число $d > 1$.

Матрицы $A(t)$, $B(t)$ системы (96) имеют вид

$$A(t)=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

а вектор-функция $g(t) = (\sin 5t, -\cos 5t, 0, t\cos 5t, t\sin 5t)^*$, причем ранг матрицы $B(t)$ постоянный для любого $t \in [0, +\infty)$ и равен 2. Поскольку

$$\operatorname{rang}\big(B(t), \Delta B(t), \Delta^2 B(t), \Delta^3 B(t), \Delta^4 B(t)\big) = 5,\ t \in [0, +\infty),$$

то система (96) является полностью управляемой.

Поскольку

$$b_1(t)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-t\\0\end{pmatrix},\ b_2(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\t\end{pmatrix},\ \Delta b_1(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\1-t^2\\1+t\\0\end{pmatrix},\ \Delta b_2(t)=\begin{pmatrix}t\\0\\0\\0\\t-1\end{pmatrix},$$

$$\Delta^2 b_1(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\t(t+3)\\-1\\t-t^3\end{pmatrix},\ \Delta^2 b_2(t)=\begin{pmatrix}t^2-1\\0\\0\\0\\t-2\end{pmatrix},\ \Delta^3 b_1(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\-3(t+1)\\0\\6t^2+t-1\end{pmatrix},$$

$$\Delta^3 b_2=\begin{pmatrix}t(t^2-3)\\0\\0\\0\\t-3\end{pmatrix},\ \Delta^4 b_1=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\\3t^2-14t-2\end{pmatrix},\ \Delta^4 b_2=\begin{pmatrix}t^4-6t^2+3\\0\\0\\0\\t-4\end{pmatrix},$$

то матрица $K(t)$ имеет вид $K(t)=(b_1(t),\Delta b_1(t),\Delta^2 b_1(t),b_2(t),\Delta b_2(t))$, ранг которой равен пяти для любого $t\in[0,+\infty]$, $\det K(t)=-(1+t)^3(1-t+t^2)\neq 0$ на любом отрезке $[t_0,t_1]\subset[0,+\infty)$ и $n_1=3$, $n_2=2$. Отметим, что так как

$$\begin{aligned}&\operatorname{rang}\big(b_1(t),\Delta b_1(t),\Delta^2 b_1(t),\Delta^3 b_1(t),\Delta^4 b_1(t)\big)=4,\\&\operatorname{rang}\big(b_2(t),\Delta b_2(t),\Delta^2 b_2(t),\Delta^3 b_2(t),\Delta^4 b_2(t)\big)=2,\end{aligned}\qquad t\in[0,+\infty),$$

то система (96) не может быть управляемой только u_1 или u_2.

Равенствами (7) определим n-мерные вектор-функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, которые имеют вид

$$c_1(t)=\left(0,\ \frac{(t-1)t}{(1+t)^2},\ \frac{1}{(1+t)^2},\ \frac{t-1}{(1+t)^2},\ 0\right)^*,$$

$$c_2(t)=\left(\frac{t}{t^2-t+1},\ -\frac{t^2(t-1)^2}{1+t^3},\ -\frac{t(t-1)}{1+t^3},\ -\frac{t(t-1)^2}{1+t^3},\ \frac{1}{t^3+t-1}\right)^*,$$

и построим невырожденную матрицу $L(t)$.

Система (96) заменой переменных $z = L(t)x$, имеющей вид

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{t^2-t}{(1+t)^2}\,x_2 + \frac{1}{(1+t)^2}\,x_3 + \frac{t-1}{(1+t)^2}\,x_4,\\
z_2 &= \frac{3t+t^3}{(1+t)^3}\,x_2 - \frac{2}{(1+t)^3}\,x_3 + \frac{3+t^2}{(1+t)^3}\,x_4,\\
z_3 &= \frac{1-5t+6t^2+t^3+t^4}{(1+t)^4}\,x_2 + \frac{6}{(1+t)^4}\,x_3 - \frac{9+3t^2}{(1+t)^4}\,x_4,\\
z_4 &= \frac{t}{1-t+t^2}\,x_1 - \frac{(t-1)^2t^2}{1+t^3}\,x_2 - \frac{t^2-t}{1+t^3}\,x_3 - \frac{(t-1)^2t}{1+t^3}\,x_4 + \frac{1}{-1+t-t^2}\,x_5,\\
z_5 &= \frac{1-t^3+t^4}{(1-t+t^2)^2}\,x_1 + \frac{-t+4t^2-2t^3+t^4-2t^5+t^6-t^7)}{(1+t^3)^2}\,x_2 - \frac{-1+3t+t^2+2t^3+t^5}{(1+t^3)^2}\,x_3 +\\
&\quad + \frac{-1+4t-2t^2+t^3-2t^4+t^5-t^6}{(1+t^3)^2}\,x_4 - \frac{2-3t+t^2}{(1-t+t^2)^2}\,x_5,
\end{aligned}
$$

отображается на систему

$$
\begin{cases}
\dot z_1 = z_2,\\
\dot z_2 = z_3,\\
\dot z_3 = \dfrac{3}{(1+t)^2}\,z_2 - \dfrac{3}{1+t}\,z_3 + u_1 - \cos 5t,\\
\dot z_4 = z_5,\\
\dot z_5 = \dfrac{-3-9t+12t^2-2t^3+t^4+3t^5}{(1-t+t^2)^2}\,z_1 + \dfrac{1-4t-3t^2}{1-t+t^2}\,z_2 -\\
\qquad - \dfrac{1+4t-7t^2+6t^3-4t^4+t^5}{(1-t+t^2)^2}\,z_4 + \dfrac{2-2t+t^3}{1-t+t^2}\,z_5 + u_2 + \sin 5t,
\end{cases}
$$

при этом точка x_0 отображается в точку $z_0 = L(0)x_0$. Вектор-функция $g(t) = (\sin 5t, -\cos 5t, 0, t\cos 5t, t\sin 5t)^*$ удовлетворяет условию (18), к тому же $d_0 = 1$. Следовательно, система (96) удовлетворяет условиям теоремы 3.

Построим управление $u_{f,\alpha}(t)$, которое будет переводить произвольную заданную точку $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50})^*$ некоторой окрестности начала координат в начало координат за свободное время, в виде (72). Для этого выберем набор f функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ вида

$$
f_1(s) = \begin{cases} 3 & \text{при } s\in[0,1],\\ 2 & \text{при } s\in(1,2],\\ 1 & \text{при } s\in(2,3],\\ 0 & \text{при } s>3, \end{cases}
\qquad
f_2(s) = \begin{cases} 2 & \text{при } s\in[0,1],\\ 1 & \text{при } s\in(1,2],\\ 0 & \text{при } s>2. \end{cases}
$$

Тогда

$$
N_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix}
\frac{920}{561\Theta^{5/\alpha}} & \frac{420}{187\Theta^{4/\alpha}} & \frac{50}{51\Theta^{3/\alpha}} & 0 & 0\\
\frac{420}{187\Theta^{4/\alpha}} & \frac{624}{187\Theta^{3/\alpha}} & \frac{28}{17\Theta^{2/\alpha}} & 0 & 0\\
\frac{50}{51\Theta^{3/\alpha}} & \frac{28}{17\Theta^{2/\alpha}} & \frac{113}{102\Theta^{1/\alpha}} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{12}{11\Theta^{3/\alpha}} & \frac{10}{11\Theta^{2/\alpha}}\\
0 & 0 & 0 & \frac{10}{11\Theta^{2/\alpha}} & \frac{12}{11\Theta^{1/\alpha}}
\end{pmatrix}.
$$

Для $\widehat{\Theta} = 165^{\frac{\alpha}{\alpha-4}}$ из условия (68) выберем $c_{f,\alpha} = 1$ и из условия (77) выберем

$$a_0 = \frac{115600(d-1)^2}{1443\left(629+\sqrt{50993+215665/\alpha^2+198434/\alpha}\right)^2}.$$

Определим функцию $\Theta_{f,\alpha}(z)$ при $z \neq 0$ из уравнения (39), которое принимает вид

$$\begin{gathered}2a_0\Theta^{1+\frac{5}{\alpha}} - \tfrac{920}{561}z_1^2 - \tfrac{840}{187}\Theta^{\frac{1}{\alpha}}z_1z_2 - \tfrac{624}{187}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}z_2^2 - \tfrac{100}{51}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}z_1z_3 - \\ -\tfrac{56}{17}\Theta^{\frac{3}{\alpha}}z_2z_3 - \tfrac{113}{102}\Theta^{\frac{4}{\alpha}}z_3^2 - \tfrac{12}{11}\Theta^{\frac{2}{\alpha}}z_4^2 - \tfrac{20}{11}\Theta^{\frac{3}{\alpha}}z_4z_5 - \tfrac{12}{11}\Theta^{\frac{4}{\alpha}}z_5^2 = 0.\end{gathered} \tag{97}$$

Выберем точку x_0 из области $\left\{x_0 : \left(N_{f,\alpha}^{-1}(1)L(0)x_0, L(0)x_0\right) \leq 2a_0\right\}$, тогда $z_0 \in Q_{f,\alpha} = \{z : \Theta_{f,\alpha}(z) \leq 1\}$. Найдем единственный положительный корень $\Theta_{f,\alpha}^0$ уравнения (97) при $z_1 = z_{10}$, $z_2 = z_{20}$, $z_3 = z_{30}$, $z_4 = z_{40}$, $z_5 = z_{50}$. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2,\ \ \dot z_2 = z_3,\ \ \dot z_3 = -\frac{25z_1}{17\theta^{3/\alpha}} - \frac{42z_2}{17\theta^{2/\alpha}} - \frac{113z_3}{68\theta^{1/\alpha}}, \\ \dot z_4 = z_5,\ \ \dot z_5 = -\frac{10z_4}{11\theta^{2/\alpha}} - \frac{12z_5}{11\theta^{1/\alpha}}, \\ \dot\theta = -\theta^{1-1/\alpha}\Big(\frac{2500z_1^2}{867\theta^{5/\alpha}} + \frac{61120z_1z_2}{9537\theta^{4/\alpha}} + \frac{11592z_2^2}{3179\theta^{3/\alpha}} + \frac{19310z_1z_3}{9537\theta^{3/\alpha}} + \frac{22064z_2z_3}{9537\theta^{2/\alpha}} + \\ \quad + \frac{1345z_3^2}{3468\theta^{1/\alpha}} + \frac{200z_4^2}{121\theta^{3/\alpha}} + \frac{216z_4z_5}{121\theta^{2/\alpha}} + \frac{68z_5^2}{121\theta^{1/\alpha}}\Big)\Big/\Big(\frac{920(5+\alpha]z_1^2}{561\alpha\theta^{5/\alpha}} + \\ \quad + \frac{840(4+\alpha)z_1z_2}{187\alpha\theta^{4/\alpha}} + \frac{624(3+\alpha)z_2^2}{187\alpha\theta^{3/\alpha}} + \frac{100(3+\alpha)z_1z_3}{51\alpha\theta^{3/\alpha}} + \frac{56(2+\alpha)z_2z_3}{17\alpha\theta^{2/\alpha}} + \\ \quad + \frac{113(1+\alpha)z_3^2}{102\alpha\theta^{1/\alpha}} + \frac{12(3+\alpha)z_4^2}{11\alpha\theta^{3/\alpha}} + \frac{20(2+\alpha)z_4z_5}{11\alpha\theta^{2/\alpha}} + \frac{12(1+\alpha)z_5^2}{11\alpha\theta^{1/\alpha}}\Big), \\ z_1(0)=z_{10}, z_2(0)=z_{20}, z_3(0)=z_{30}, z_4(0)=z_{40}, z_5(0)=z_{50}, \theta(0) = \Theta_{f,\alpha}^0. \end{cases} \tag{98}$$

Тогда управление $u_{f,\alpha}(t)$, переводящее заданную точку $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50})^*$ из области $Q_{f,\alpha}$ в начало координат за время $T_{f,\alpha}$ по траектории $x(t) = L^{-1}(t)z(t)$, которая имеет вид

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1+4t+3t^2}{1-t+t^2}\,z_1(t) - \frac{2-3t+t^2}{1-t+t^2}\,z_4(t) + z_5(t) \\ \frac{3}{1+t}\,z_2(t) + z_3(t) \\ (3+t^2)z_1(t) + (1-t^2)z_2(t) \\ 2z_1(t) + \frac{1-t+t^2}{1+t}\,z_2(t) - tz_3(t) \\ \frac{3t^2+3t^3+t^4-t^5}{1-t+t^2}\,z_1(t) + \frac{-1+t^3-t^4}{1-t+t^2}\,z_4(t) + tz_5(t) \end{pmatrix},$$

и удовлетворяющее заданным ограничениям, имеет вид

$$u_{f,\alpha}(t)= \begin{pmatrix} -\frac{25z_1(t)}{17\theta^{3/\alpha}(t)} - \frac{3z_2(t)}{(1+t)^2} - \frac{42z_2(t)}{17\theta^{2/\alpha}(t)} + \frac{3z_3(t)}{1+t} - \frac{113z_3(t)}{68\theta^{1/\alpha}(t)} + \cos 5t \\ -\frac{(-3-9t+12t^2-2t^3+t^4+3t^5)z_1(t)}{(1-t+t^2)^2} - \frac{(1-4t-3t^2)z_2(t)}{1-t+t^2} - \frac{10z_4(t)}{11\theta^{2/\alpha}(t)} + \\ + \frac{(1+4t-7t^2+6t^3-4t^4+t^5)z_4(t)}{(1-t+t^2)^2} - \frac{(2-2t+t^3)z_5(t)}{1-t+t^2} - \frac{12z_5(t)}{11\theta^{1/\alpha}(t)} - \sin 5t \end{pmatrix},$$

где $z(t)$, $\theta(t)$ — решение задачи Коши (98).

В частности, рассмотрим случай $d = 40$. Выберем $\alpha = 2$, $c_{f,2} = 1$, $a_0 = \frac{1}{10}$.

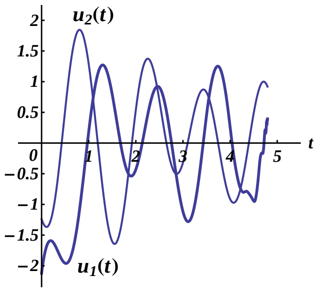

Рис. 5: Графики компонент управления $u_{f,2}(t)$.

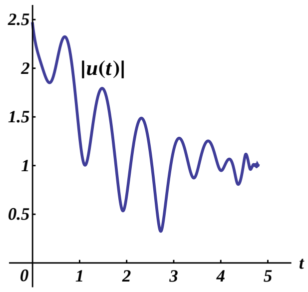

Рис. 6: График нормы управления $u_{f,2}(t)$.

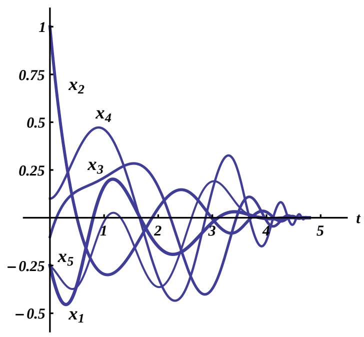

Рис. 7: Графики компонент траектории $x(t)$ на отрезке $[0, T_{f,2}]$.

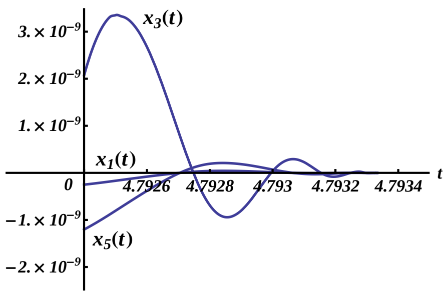

Рис. 8: Графики $x_1(t)$, $x_3(t)$, $x_5(t)$ на отрезке $[7.7924, T_{f,2}]$.

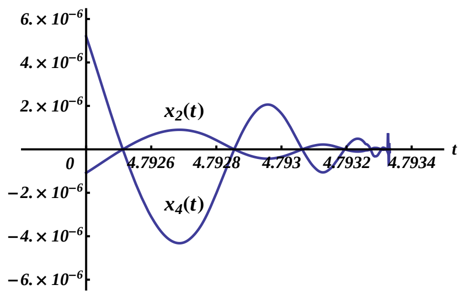

Рис. 9: Графики $x_2(t)$, $x_4(t)$ на отрезке $[7.7924, T_{f,2}]$.

Графики компонент управления $u_{f,2}(t)$, которое переводит точку $x_0 = (-0.25, 1, -0.1, 0.1, -0.25)^*$ в начало координат за время $T_{f,2} = 4.7933...$, изображены на рис. 5. При этом оценки (69) на время движения имеют вид $2.8442... \le T_{f,2} \le 41.925...$. График нормы управления $u_{f,2}(t)$ изображен на рис. 6. Очевидно, управление удовлетворяет заданным ограничениям. Графики компонент траектории $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))^*$ на отрезке $[0, T_{f,2}]$ изображены на рис. 7, а на отрезке $[4.7924, T_{f,2}]$ — изображены на рис. 8, 9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 391 с.

2. Бессонов Г. А., Коробов В. И. Каноническая форма линейных нестационарных управляемых систем и задача синтеза // Динамические процессы и их устойчивость. — 1987. – С. 26–39.

3. Бессонов Г. А., Коробов В. И., Скляр Г. М. Задача устойчивого синтеза ограниченных управлений для некоторого класса нестационарных систем // Прикладная математика и механика. 1988. – Т. 52. – Вып. 1. – С. 9–15.

4. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2007. – 576 с.