Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 1061, 2013, с.37–44

Про регуляризацію періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу

С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, А.В. Білущенко

Донбаський державний педагогічний університет,
Слов'янськ, Україна
chujko-slav@inbox.ru

Знайдено умови регуляризації лінійної періодичної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд імпульсного збурення регуляризованої лінійної періодичної крайової задачі.
Ключові слова: умови регуляризації, періодичні крайові задачі, імпульсний вплив.

Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Белущенко А.В., **О регуляризации периодической краевой задачи при помощи импульсного воздействия.** Найдены условия регуляризации линейной периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи импульсного воздействия. Построен обобщенный оператор Грина и найден вид импульсного возмущения регуляризованной линейной периодической краевой задачи.
Ключевые слова: условия регуляризации, периодические краевые задачи, импульсное воздействие.

S.M. Chuiko, E.V. Chujko, A.V. Beluschenko, **Regularization of periodic boundary value problem with impulse action.** The constructive conditions for the existence of solutions have been studied and generalized Green's operator for the linear periodic boundary value problem for system of ordinary differential equations with impulse perturbation have been searched.
Keywords: generalized Green's operator, periodic boundary value problems, impulse perturbation.
2000 Mathematics Subject Classification 34B15.

Постановка задачі

Припустимо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1[0,T]$$

системи звичайних диференціальних рівнянь [1]

$$dz(t)/dt = A(t)z(t) + f(t) \tag{1}$$

некоректно поставленою [2, 3]

$$\int_0^T H^*(s)f(s)ds \neq 0$$

для довільної неперервної функції $f(t)$; тут $A(t)$ — неперервна на відрізку $[0,T]$ матриця, $H(t)$ — фундаментальна матриця системи, спряженої до однорідної частини системи (1).

Нами досліджено умови регуляризації [1, 2, 4] крайової задачі для системи (1) з періодичною граничною умовою

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0 \tag{2}$$

та імпульсним впливом [1, 3, 5, 6, 7, 8]

$$\Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) + \mu, \ \Delta z(\tau) := z(\tau + 0) - z(\tau - 0). \tag{3}$$

На відміну від монографії [1] та статті [3] поставимо задачу не про умови розв'язності лінійної періодичної крайової задачі для системи (1) з фіксованим імпульсним впливом (3), а досліджуємо задачу про знаходження T-періодичних розв'язків

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\},$$

а також матриці $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, яка б для фіксованого вектора $\mu := 0$ гарантувала б розв'язність цієї задачі для довільної неперервної функції $f(t)$. Поставлена задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою імпульсного впливу, наведених у монографії [1, с. 248] та статті [3] на випадок $\mu := 0$ та не фіксованої матриці S.

Умови регуляризації лінійної періодичної задачі за допомогою імпульсного впливу

Позначимо $X_0(t)$ нормальну $(X_0(\tau) = I_n)$ фундаментальну матрицю [9, 10] однорідної частини системи (1). Загальний розв'язок

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}, \quad 0 < \tau < T$$

диференціальної системи з імпульсним впливом (1), (3) зобразимо у вигляді

$$z(t,c) = X(t)c + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) := \left\{ \begin{array}{ll} -X_0(t)\int_t^\tau X_0^{-1}(s)f(s)ds, & t \in [0,\tau[, \\ \\ X_0(t)\int_\tau^t X_0^{-1}(s)f(s)ds, & t \in [\tau,T] \end{array} \right.$$

узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(\tau) = 0$ для диференціальної системи (1) та $X(t)-$ нормальна $(X(\tau-0) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3)

$$X(t) = \left\{ \begin{array}{ll} X_0(t), & t \in [0,\tau[, \\ X_0(t)(I_n + S), & t \in [\tau,T]. \end{array} \right.$$

Позначимо матриці $Q := \ell X_0(\cdot)$, $\mathcal{Q} := \ell X(\cdot)$ та ортопроектор [1] $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*)$. Диференціальна система (1) з періодичною крайовою умовою (2) та імпульсним впливом (3) розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$, якщо $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Таким чином, отримуємо рівняння для знаходження матриці $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\Big[Q - X(T)S\Big] \cdot \Big[Q - X(T)S\Big]^+ = I_n. \tag{4}$$

Рівняння (4) має не менше одного розв'язку; дійсно, для задачі (1) — (3) має місце критичний випадок $(\det Q = 0)$, в той же час

$$\det\Big[Q - X(T)S\Big] \neq 0, \quad \det\Big[Q - X(T)S\Big]^+ = \det\Big[Q - X(T)S\Big]^{-1} \neq 0.$$

Вироджена матриця Q у деякому базисі може бути зображена у вигляді

$$Q = \Phi \cdot J \cdot \Psi, \quad \det\Phi \neq 0, \quad \det\Psi \neq 0,$$

де

$$J := \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad P_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix};$$

тут $P_J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J)$ — ортопроектор [1] матриці J. Отже, рівняння (4) має сім'ю розв'язків

$$\mathcal{S} := -X_0^{-1}(T) \cdot \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C_{n-r} \end{pmatrix}, \quad \det C_{n-r} \neq 0.$$

Будь якому дійсному розв'язку $\mathcal{S}$ рівняння (4) відповідає нормальна фундаментальна матриця однорідної частини системи (1) з імпульсним впливом (3):

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & t \in [0, \tau[, \\ X_0(t)(I_n + \mathcal{S}), & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Матриці $X(t)$ відповідає не менш ніж один розв'язок задачі (1) — (3)

$$z(t,c) = \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot).$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. *Якщо задача про знаходження T-періодичних розв'язків системи (1) у просторі $z(t) \in C^1[0,T]$ некоректно поставлена*

$$\int_0^T H^*(s)f(s)ds \neq 0,$$

то для довільного дійсного розв'язку рівняння (4)

$$\mathcal{S} := -X_0^{-1}(T) \cdot \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \Pi_J := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C_{n-r} \end{pmatrix}, \quad \det C_{n-r} \neq 0$$

та для довільної неперервної функції $f(t)$ у просторі

$$z(t) \in C^1\Big\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\Big\}$$

існує не менш ніж один розв'язок

$$z(t) = \mathcal{G}\Big[f(s); \mathcal{S}\Big](t)$$

крайової задачі з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом (1), (2), (3), де $S = \mathcal{S}$, $\mu := 0$,

$$\mathcal{G}\Big[f(s); \mathcal{S}\Big](t) := \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) - X(t)\mathcal{Q}^+\ell\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію T-періодичної задачі для системи (1) за допомогою імпульсного впливу (3).

У залежності від матриці $\mathcal{S}$ імпульсний вплив (3) за умови

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)\neq 0$$

— невироджений [1, 5], або ж вироджений [9, 10]:

$$\det\Big(I_n+\mathcal{S}\Big)=0.$$

Приклад. *Умови доведеної теореми виконуються у випадку* 2π-*періодичної задачі для системи*

$$dz/dt=A(t)z+f(t),$$

яка для довільної неперервної функції $f(t)$ *не має розв'язків у класі* $z(t)\in C^1[0;2\pi]$; *в той же час у класі функцій*

$$z(t)\in C^1\Big\{[0,2\pi]\setminus\{\tau\}_I\Big\},\quad \tau:=\pi$$

крайова задача для системи з періодичною крайовою умовою та імпульсним впливом

$$dz/dt=Az+f(t),\ t\neq\tau,\ \ell z(\cdot)=0,\ \Delta z(\tau)=Sz(\tau-0) \tag{5}$$

розв'язна для довільної неперервної функції $f(t)$; *тут*

$$A(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Дійсно, у випадку крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом рівняння (4) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

якому відповідає нормальна ($X(\pi-0)=I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з невиродженим ($\det(I_3+\mathcal{S})\neq 0$) імпульсним впливом:

$$X(t)=\left\{\begin{array}{ll}\begin{bmatrix}e^{t-\pi} & 0 & 0\\ 0 & -\cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & -\cos t\end{bmatrix}, & t\in[0,\tau[,\\[2ex] \begin{bmatrix}e^{t-\pi} & 0 & 0\\ 0 & -2\cos t & -2\sin t\\ 0 & 2\sin t & -2\cos t\end{bmatrix}, & t\in[\tau,T].\end{array}\right.$$

Для довільної неперервної функції $f(t)$ та знайденої матриці $X(t)$ існує єдиний розв'язок крайової задачі для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом. Зокрема, для функції

$$f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

2π-періодична задача для диференціальної системи (5) нерозв'язна, в той же час регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок

$$\mathcal{G}\Big[f(s);\mathcal{S}\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \pi\cos t - t\cos t + \sin t \\ -\pi\sin t + t\sin t \end{bmatrix}, t \in [0, \tau[,$$

$$\mathcal{G}\Big[f(s);\mathcal{S}\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 3\pi\cos t - t\cos t + \sin t \\ -3\pi\sin t + t\sin t \end{bmatrix}, t \in [\tau, T].$$

Рівняння (4) має також дійсний розв'язок

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

якому відповідає нормальна ($X_1(\pi - 0) = I_3$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (5) з виродженим ($\det(I_3 + \mathcal{S}_1) = 0$) імпульсним впливом:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t-\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & -\cos t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, \pi[;$$

для $t \in [\pi, 2\pi]$:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{t-\pi} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos t + \sin t & -\cos t - \sin t \\ 0 & -\cos t + \sin t & -\cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

Для такої ж функції $f(t)$ регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та виродженим імпульсним впливом має єдиний розв'язок; для $t \in [0, \pi[$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ (\pi + 1)\sin t - t\cos t \\ \pi\cos t + t\sin t \end{bmatrix};$$

для $t \in [\pi, 2\pi]$:

$$\mathcal{G}\Big[f(s)\Big](t) = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} 0 \\ (2\pi - t)\cos t + (\pi + 1)\sin t \\ \pi \cos t + t \sin t \end{array}\right].$$

Згідно традиційної класифікації крайових задач [1] регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною. Дійсно, для матриці $S = \mathcal{S}$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, де

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{ccc} e^{-\pi} - e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Так саме, для матриці $S = \mathcal{S}_1$ має місце рівність $P_{\mathcal{Q}_1^*} = 0$, де

$$\mathcal{Q}_1 = \left[\begin{array}{ccc} e^{-\pi} - e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

отже, регуляризована крайова задача для диференціальної системи (5) з 2π-періодичною умовою та імпульсним впливом є некритичною. Побудована нами матриця $\mathcal{S}$, а отже і умова регуляризації лінійної періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, не залежать від вибору довільної неперервної функції $f(t)$ навідміну від схеми, запропонованої у монографії [1]. На завершення зазначимо, що формула для знаходження імпульсного впливу (3) регуляризованої T-періодичної задачі для системи (1) може бути поширена на більш загальні, зокрема, нетерові крайові задачі [6, 7, 8, 11, 12].

Подяка. Автори статті висловлюють щиру подяку члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору А.А. Бойчуку за постійну увагу до роботи та обговорення одержаних результатів.

Література

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

2. Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.

3. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Бифуркация решений импульсной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 1. — С. 21 — 31.

4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. — 104 с.

5. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.

6. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**. — № 8. — С. 1132 — 1135.

7. Чуйко С.М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии Наук. Июль 2001. — **379**. — № 2. — С. 170 — 172.

8. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**. — №1, С. 51 — 65.

9. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 588 — 594.

10. Чуйко С.М., Чуйко Е.В. Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Доповіді НАНУ. — 1999. — № 6. — С. 43-47.

11. Чуйко С.М., Чуйко О.С. Імпульсні крайові задачі для систем із перемиканнями // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 349. Математика. — Чернівці: Рута, 2007. — С. 134 — 139.

12. Чуйко С.М. Про регуляризацію лінійної нетерової крайової задачі за допомогою виродженої імпульсної дії // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, — № 1. — С. 133 — 145.