Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.64 № 1061, 2013, с.30–36

Квадратурные формулы для вычисления интегралов от кусочно-непрерывных функций

В. Д. Душкин

Академия ВВ МВС Украины, каф №19,
пл. Востания, 3, 61005, г. Харьков, Украина
E-mail:Dushkin_V_and_V@mail.ru

Получена интерполяционная квадратурная формула для вычисления интеграла от функции, содержащей неустранимый разрыв первого рода. Данная формула точна для многочленов, степень которых меньше количества точек интерполяции. Показана сходимость приближённых значений интегралов к точным значениям при увеличении количества точек интерполяции и дана оценка скорости сходимости.
Ключевые слова: квадратурные формулы, скорость сходимости, многочлены Чебышева.

Душкин В.Д., **Квадратурні формули для обчислення інтегралів від кусково-неперервних функцій.** Отримана інтерполяційна квадратурна формула для обчислення інтеграла від функції, що містить неусувний розрив першого роду. Ця формула є точною для многочленів, ступінь яких менше кількості точок інтерполяції. Показана збіжність наближених значень інтегралів до точних при збільшенні кількості точок інтерполяції і дана оцінка швидкості збіжності.
Ключові слова: квадратурні формули, швидкість збіжності процесу наближень, многочлени Чебишова.

V.D. Dushkin, **Quadrature formulas for calculating integrals of piecewise continuous functions.** The interpolation quadrature formula for calculation of the integral of a function containing irreparable rupture of the first kind had been obtained. This formula is exact for polynomials, the degree of which less than the number of interpolation points. The convergence of approximate values of integrals of the exact values of integrals had been shown. The estimates of the convergence rates had been given.
Keywords: quadrature formulas, the speed of convergence, the polynomials of Chebyshev.
2000 Mathematics Subject Classification 41A55.

1. Актуальность проблемы. Истоки исследования.

Одним из эффективных способов построения математических моделей процессов дифракции и рассеяния электромагнитных волн на препятствиях является, предложенный Ю.В. Ганделем, метод параметрических представлений интегральных операторов [1, 2] . Следуя данному подходу, решение исходных краевых задач для уравнения Гельмгольца сводится к решению систем сингулярных интегральных уравнений. Через решения этих уравнений выражаются характеристики электромагнитных полей. Системы граничных интегральных уравнений решаются численно с помощью одной из модификаций метода дискретных особенностей (МДО) [2, 3] . При численном решении систем интегральных уравнений используются интерполяционные квадратурные формулы для вычисления интегралов с гладким, логарифмическим ядром и сингулярным ядром. В этих формулах точками интерполяции являются нули полинома Чебышева $T_n(t)$, которые обозначим $\{t_k^n\}_{k=1}^n$.

При построении математических моделей дифракции на импедансных структурах [4, 5] приходится приближённо вычислять интегралы вида

$$K_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} K(\xi-\tau)\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \qquad |\xi| \leq 1; \tag{1}$$

где $V \epsilon C^{\mu,\,\theta}[-1,1], \mu \geq 0, \theta > 0, K \epsilon C^{1,\,\theta}([-1,-0]\bigcup[+0,1]), \theta > 0$, а при $x = 0$ функция $K(\tau)$ имеет разрыв первого рода. В частности, в случае рассмотрения периодических задач подынтегральные функции содержали слагаемые:

$$K_1(\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\tau)}{n} = -\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot sign(\tau), \qquad \tau\epsilon[-\pi,\pi], \tag{2}$$

а при рассмотрении непериодических задач

$$K_2(\tau) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(\tau x)}{x} = \frac{\pi}{2}\cdot sign(\tau), \qquad \tau\epsilon R. \tag{3}$$

Цель работы: построение квадратурной формулы интерполяционного типа по системе узлов $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ для вычисления интегралов:

$$K_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} K(\xi-\tau)\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \tag{4}$$

где $K(\tau)$ – функция, производная которой непрерывная по Гёльдеру на множестве $\tau\epsilon[-1,-0]\bigcup[+0,1]$, а в точке $x = 0$ функция $K(\tau)$ имеет разрыв первого рода.

2. Постановка задачи

Пусть

$$K\,'(-0) = k_1, K(-0) = b_1, K\,'(+0) = k_2, K(+0) = b_2. \tag{5}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$S(\tau) = \begin{cases} k_1\tau + b_1, & \tau \geq 0 \\ k_2\tau + b_2, & \tau < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда функция

$$Q(\tau) = K(\tau) - S(\tau) \tag{7}$$

является непрерывной по Гельдеру на отрезке $[-1,1]$ и, следовательно [6],

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} Q(\xi-\tau)\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi - t_k^n) + r_n\,, \tag{8}$$

где

$$|r_n| = O(\frac{1}{n^{1+\theta}}), n \to \infty. \tag{9}$$

Таким образом, задача вычисления интеграла $K_\nu(\xi)$ свелась к вычислению интеграла

$$SS_V(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} S(\xi-\tau)\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,. \tag{10}$$

Интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$ функции $V(t), t\epsilon[-1,1]$ с n чебышевскими узлами 1-го рода $\{t_k^n\}_{k=1}^n$ обозначим $V_{n-1}(t)$. Он имеет вид

$$V_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k^n) l_{n-1,k}^I(t), \tag{11}$$

где $l_{n-1,k}^I(t)$ – фундаментальные интерполяционные полиномы

$$l_{n-1,k}^I(t) = [1 + 2\sum_{p=1}^{n-1} T_p(t_k^n)T_p(t)]\frac{1}{n}, \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{12}$$

Справедливо равенство:

$$SS_{V_n}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} S(\xi-\tau)\frac{V_n(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_n(t_k^n)[c_0(\xi) + 2\sum_{p=1}^{n-1} c_p(\xi)\cdot T_p(t_k^n)], \tag{13}$$

где

$$c_p(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} S(\xi-\tau)\frac{T_p(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\,. \tag{14}$$

Справедливы формулы:

$$\pi\cdot c_0(t_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_0(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+(k_2-k_1)\sqrt{1-t_0^2}+(\sigma_2-\sigma_1)\cdot\arcsin t_0\,, \tag{15}$$

$$\pi\cdot c_1(t_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_1(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\frac{k_2-k_1}{2}(t_0\sqrt{1-t_0^2}-\arcsin t_0)-\frac{\pi}{4}(k_1+k_2)-(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{1-t_0^2}\,, \tag{16}$$

где

$$\sigma_1=k_1t_0+b_1,\qquad \sigma_2=k_2t_0+b_2. \tag{17}$$

В работе [6] показано, что

$$\int\limits_{-1}^{t_0}T_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{U_{p-1}(t_0)}{p}\sqrt{1-t_0^2},\quad p\in N. \tag{18}$$

Выполняя преобразования, подобные тем, которые были проведены в [6], получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{1}T_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{U_{p-1}(t_0)}{p}\sqrt{1-t_0^2},\quad p\in N; \tag{19}$$

$$\int\limits_{t_0}^{1}\frac{t\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\limits_{-1}^{t_0}\frac{t\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=(\frac{U_{n-2}(t_0)}{n-1}+\frac{U_n(t_0)}{n+1})\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{2}, n=2,3,... \tag{20}$$

Из (18)-(20) следует, что

$$\pi\cdot c_n(t_0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{S(t_0-t)\cdot T_n(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\sigma_2-\sigma_1}{n}U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}+$$

$$+(k_2-k_1)(\frac{U_{n-2}(t_0)}{n-1}+\frac{U_{n-2}(t_0)}{n+1})\frac{\sqrt{1-t_0^2}}{2},\quad n=2,3,4,.... \tag{21}$$

Пусть $L_{2,p}[-1,1]$ – гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(f,g)_\rho=\int\limits_{-1}^{1}f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{22}$$

и нормой

$$||f||_\rho = \sqrt{(f,f)_\rho} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} f^2(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}. \qquad (23)$$

В работе [2] приведено доказательство асимптотического равенства

$$||V_{n-1} - V||_\rho = O(\frac{1}{n^{\mu+\theta}}), \quad n \to \infty. \qquad (24)$$

Введём величину

$$R_n = \max_{\xi\ \epsilon\ [-1,1]} \left|SS_V(\xi) - SS_{V_{n-1}}(\xi)\right| =$$

$$= \max_{\xi\ \epsilon\ [-1,1]} \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-1}^{1} S(\xi-\tau)\frac{(V(\tau)-V_n(\tau))d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right|. \qquad (25)$$

В силу неравенства Коши-Буняковского справедлива оценка:

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} S(\xi-\tau)\frac{(V(\tau)-V_n(\tau))d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\right| \le \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{S^2(\xi-\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}\cdot\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{(V(\tau)-V_n(\tau))^2d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}} =$$

$$= ||V_{n-1} - V||_\rho \cdot \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}\frac{S^2(\xi-\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}}. \qquad (26)$$

Из (24), (26) и ограниченности функции $S(\xi-\tau)$ следует справедливость асимптотического равенства

$$|R_n| = O(\frac{1}{n^{\mu+\tau}}), \quad n \to \infty. \qquad (27)$$

Ряд разрывных функций $S(\tau)$, входящих в подынтегральные выражения $K_\nu(\tau)$ обладают свойствами:

$$S\,'(-0) = S\,'(+0), \;\; S(-0) = -S(+0) \qquad (28)$$

(к их числу относится функция $K_1(\tau)$).

В этом случае формулы (15), (16), (21) для определения величин $c_n(t_0)$ значительно упрощаются:

$$c_0(t_0) = k_1\cdot t_0 - 2\frac{b_1}{\pi}\cdot\arcsin t_0; \qquad (29)$$

$$c_1(t_0) = -\frac{k_1}{2} + 2\frac{b_1}{\pi}\cdot\sqrt{1-t_0^2}; \qquad (30)$$

$$c_n(t_0) = \frac{2b_1}{\pi n} U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}, \quad n = 2,3,4,.... \tag{31}$$

В частности, для функции $K_1(\tau)$ имеем:

$$c_0(t_0) = \arcsin t_0 - \frac{t_0}{2}; \tag{32}$$

$$c_1(t_0) = \frac{1}{4} - \sqrt{1-t_0^2}; \tag{33}$$

$$c_n(t_0) = -\frac{1}{n} U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}, \; n = 2,3,4,.... \tag{34}$$

В случае, когда разрывные функции $S(\tau)$, входящие в ядра интегральных операторов $SS_\nu(\xi)$, обладают свойствами:

$$S\,'(-0) = S\,'(+0) = 0, \;\; S(-0) = -S(+0)\,, \tag{35}$$

величины $c_n(t_0)$ имеют вид:

$$c_0(t_0) = -2\frac{b_1}{\pi} \cdot \arcsin t_0; \tag{36}$$

$$c_n(t_0) = \frac{2b_1}{\pi n} U_{n-1}(t_0)\sqrt{1-t_0^2}, \quad n \in N. \tag{37}$$

В частности, для функции $K_2(\tau)$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_2(\xi-\tau)\frac{V_n(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\cdot sign(\xi-\tau)\frac{V_n(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_n(t_k^n)\cdot[\arcsin\xi + 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{U_{p-1}(\xi)}{n}\sqrt{1-\xi^2}\cdot T_p(t_k^n)]. \tag{38}$$

3. Выводы.

Получена квадратурная формула:

$$K_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\xi-\tau)\frac{V(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_n(t_k^n)\cdot[c_0(\xi) + 2\sum_{p=1}^{n-1} c_p(\xi)\cdot T_p(t_k^n)]+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi-t_k^n)\cdot V(t_k^n) + \triangle_n \;, \tag{39}$$

где

$$|\triangle_n| = O(\frac{1}{n^{\mu+\theta}}), \quad n\to\infty; \tag{40}$$

и $V \epsilon C^{\mu,\theta}[-1,1]$, $\mu \geq 0, \theta > 0$, $K \epsilon C^{1,\theta}([-1,-0]\bigcup[+0,1])$, а вид функций $Q(\tau)$ и $c_p(\xi)$ определён формулами (7), (15), (16), (17).

Формула (36) является точной ($\Delta_n \equiv 0$), когда функции $V(\tau)$ являются многочленами степени не превышающей $n-1$.

Для ряда функций, встречающихся при построении моделей взаимодействия электромагнитных волн с периодическими импедансными структурами, в частности $K_1(\xi)$ и $K_2(\xi)$, вид функций $c_p(\xi)$ значительно упрощается. Так для функции $K_1(\xi)$ величины $c_p(\xi)$ определяются формулами (32)-(34). В случае, когда $K(\xi) = K_2(\xi)$ и $V(\tau) = V_n(\tau)$, справедливо равенство (38).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gandel'. Yu.V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models // Journal of Mathematical Sciences. - 2010. - Vol. 171, № 1. - Springer Science+Business Media, Inc. - P. 74–88.

2. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. - Харьков. Акад. ВВ МВД Украины, 2012. - 544 с.

3. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices/ I.K. Lifanov. - Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996, - 475 p.

4. Ильинский А.С Колебания и волны в электродинамических системах с потерями / А.С. Ильинский , Г.Я. Слепян. - М. : Изд-во МГУ, 1983. - 231 с.

5. Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений / В.Ф. Кравченко. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 280 с.

6. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель. - Харьков: Изд-во Харьковского национального университета, 2001. - 92 с.