Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.925.3 № 1061, 2013, с.17–29

О модификации теорем прямого метода Ляпунова для импульсных систем

Р. И. Гладилина

Донецкий национальный технический университет, Украина
gladilina@yandex.ru

В статье исследуется проблема устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. С помощью второго метода Ляпунова получены новые условия асимптотической устойчивости, а также неустойчивости нулевого решения импульсной системы с менее жесткими требованиями к функциям Ляпунова.
Ключевые слова: устойчивость, импульсные системы, функции Ляпунова.

Гладіліна Р. І., **Про модіфікацію теорем прямого методу Ляпунова для імпульсних систем.** За допогою другого методу Ляпунова встановлено нові достатні умови асимптотичної стійкості та нестійкості тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, в яких послаблено вимоги до функцій Ляпунова.
Ключові слова: стійкість, імпульсні системи, функції Ляпунова.

R. I. Gladilina, **On modification of the theorems of direct Lyapunov method for impulsive systems.** The stability problem of the trivial solution of the systems of differential equations with unfixed times of impulse effect was studied by means of Lyapunov functions. The new conditions of acymptotic stability and instability were obtained.
Key words: stability, impulsive systems, Lyapunov functions.

2000 Mathematics Subject Classification 34A37, 34D20.

Введение

Импульсные системы являются удобными моделями реальных эволюционных процессов, которые в определенные моменты их развития подвергаются резким изменениям. Фундаментальная теория таких систем изложена в [1].

В настоящее время, благодаря запросам современной науки и новейшей техники, происходит интенсивное развитие теории управления [2]. Системы дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями можно успешно применять в задачах стабилизации управляемых систем, если управляющие воздействия кратковременны и их длительностью можно пренебречь.
Важным направлением исследования импульсных систем является исследование устойчивости движения с помощью прямого метода Ляпунова [1, 3-10].

В теоремах об асимптотической устойчивости на функцию Ляпунова налагаются довольно жесткие требования, в том числе, условие знакоопределенности производной функции Ляпунова. Однако, в прикладных задачах попытки построить функцию Ляпунова со знакоопределенной производной встречают серьезные трудности.

Предметом исследования в данной работе является установление условий асимптотической устойчивости (неустойчивости) решений импульсных систем, в которых на функции Ляпунова налагались бы менее жесткие требования, чем в опубликованных статьях.

Для периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений условия асимптотической устойчивости со знакопостоянной производной функции Ляпунова по времени были получены Н. Н. Красовским [11]. Обобщение этих теорем для периодических систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени дано в [3, 5].

В настоящей работе для непериодических систем с импульсными воздействиями на поверхностях разрыва доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости при условии, что производная функции Ляпунова по времени сколь угодно мала, т.е. практически близка к знакопостоянной функции. Получены также условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) со знакопостоянной производной функции Ляпунова.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+,\ x \in \Omega \subset R^n,\ \Omega = \{x : \|x\| < H\ (H > 0)\}$,
$f \in C(R_+ \times \Omega, R^n),\ f(t,0) \equiv 0;\ \ f(t,x) \in Lip(x),\ I_i \in C(\Omega, R^n)$,
$I_i(x) \in Lip,\ I_i(0) \equiv 0,\ \tau_i \in C^1(\Omega, R_+),\ \tau_i(x)$ – поверхности разрыва,
$0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$ и $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, непрерывно слева и пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия отсутствия биений решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [1, с.23-25].

Заметим, что под устойчивостью нулевого решения импульсной системы (1) понимается устойчивость по Ляпунову [11].

Введем вспомогательные кусочно-непрерывные функции $V : R_+ \times B_H \to R$, удовлетворяющие требованиям: функция $V(t,x)$ непрерывна слева и $V(t,0) \equiv 0$ при любом $t \in R_+$. При $t \neq \tau_i(x)$ определим производную от функции $V(t,x)$ в силу системы (1)

$$\dot V_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \Big\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), f(t,x) \Big\rangle.$$

В дальнейшем функцию Ляпунова вдоль решения будем обозначать через $v(t) = V(t, x(t,t_0,x_0))$, а моменты попадания решения на поверхности разрыва $t = \tau_i(x)$ — через τ_i.

Функцию $a : R_+ \to R_+$ будем называть функцией класса Хана ($a \in \mathcal{K}$) , если $a(r)$ – непрерывная, строго возрастающая и $a(0) = 0$.

2. Асимптотическая устойчивость. В теоремах прямого метода Ляпунова об асимптотической устойчивости требуется, чтобы производная функции Ляпунова по времени была определенно-отрицательной. В [8] доказана теорема об асимптотической устойчивости, которая обобщает аналогичную теорему Ляпунова на класс импульсных систем.

Следующая теорема позволяет ослабить требования, налагаемые на производную функции Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условию*

$$a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|) \quad \text{для} \ \ (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad a, b \in \mathcal{K}, \tag{2}$$

и, либо условиям A:

$$\dot V_{(1)}(t,x) \leq -1/kc(\|x\|) \quad \text{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \ (k \in N), \ c \in \mathcal{K}, \tag{3}$$

$$V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \leq 0 \ \ (k \in N), \tag{4}$$

$$\inf_{k \in N} (\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) \geq \theta > 0, \quad (x \in \Omega), \tag{5}$$

либо условиям B:

$$\dot V_{(1)}(t,x) \leq 0 \quad \text{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], (k \in N) \tag{6}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \leq -1/kc(\|x\|) \ \ (k \in N), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{7}$$

Если $a_k \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_i$ расходится, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из теоремы 18.1 [1, с. 132] следует устойчивость нулевого решения системы (1). Это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in R_+$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любых $t_0 \in R_+$, $x_0 \in B_\delta$ при $t > t_0$ выполняется неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \varepsilon$. Покажем, что любая траектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ с такими начальными условиями обладает свойством $\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$.

Из условия теоремы 1 следует, что функция $v(t)$ является неотрицательной и невозрастающей, поэтому она имеет предел $\lim_{t\to\infty} v(t) = \eta \geq 0$, причем $v(t) \geq \eta$ для всех $t \in R_+$.

Покажем, что $\eta = 0$. Предположим противное: пусть $\eta > 0$, тогда из неравенства (2) следует, что

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq b^{-1}(\eta). \tag{8}$$

Для удобства обозначим $c = c(b^{-1}(\eta))$.

Пусть выполнены условия А теоремы, тогда, учитывая неравенства (3)-(5), (8), получим

$$0 \leq v(\tau_k) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt = v(t_0) + \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \leq$$

$$\leq v(t_0) - c\sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} dt = v_0 - c\sum_{i=1}^{k} a_i(\tau_i - \tau_{i-1}) \leq v_0 - c\theta \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то при больших κ правая часть неравенства становится отрицательной. Полученное противоречие доказывает, что $\eta = 0$. В силу неравенства (2) получим, что $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Пусть выполнены условия В теоремы, тогда в силу (7), (8) имеем

$$v(\tau_k + 0) - v(\tau_k) \leq -a_k c.$$

Откуда

$$0 \leq v(\tau_k + 0) \leq v(\tau_k) - a_k c \quad (k \in N).$$

Из условия (6) получим

$$v(\tau_k) \leq v(\tau_{k-1} + 0) \quad (k \in N).$$

Используя полученные неравенства, имеем

$$0 \leq v(\tau_k+0) \leq v(\tau_{k-1}+0) - a_k c \leq v(\tau_{k-2}+0) - a_k c - a_{k-1} c \leq \cdots \leq v(t_0) - c\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то правая часть неравенства становится отрицательной при больших κ. Полученное противоречие доказывает, что $\eta = 0$. Из неравенства (2) следует, что $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Таким образом, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Пример 1. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений.

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - x_1 x_2^3, \qquad x_1(\tau_k + 0) = \sqrt{\frac{k-1}{k}} x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2, \quad x_2(\tau_k + 0) = \sqrt{\frac{k-1}{k}} x_1;$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = x_1^2 + x_2^2$.

Нетрудно проверить, что выполнены все условия теоремы 1, а именно:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1x_2^2 - x_1^2x_2^3 - x_1x_2^2 + x_1^2x_2^3) \equiv 0.$$

$$\Delta V_k = \frac{k-1}{k}x_2^2 + \frac{k-1}{k}x_1^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1/k(x_1^2 + x_2^2) \le 0.$$

Коэффициенты в последнем выражении образуют гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который, как известно, расходится. Поэтому нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

Замечание 1. В приведенных примерах $\tau_k(x)$ – любые функции, удовлетворяющие условиям постановочной части (раздел 1) и соответствующим теоремам.

В следующей теореме не требуется существования бесконечно малого высшего предела.

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условию*

$$a(\|x\|) \le V(t,x) \quad \textit{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad a \in \mathcal{K},$$

и, либо условиям А:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le -a_k c(V) \quad \textit{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \ (k \in N),$$

$$V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \le 0 \ \ (k \in N),$$

$$\inf_{k \in N}(\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) \ge \theta > 0, \quad (x \in \Omega),$$

либо условиям В:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le 0 \quad \textit{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], (k \in N)$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \le -a_k c(V) \ \ (k \in N).$$

Если $a_k \ge 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_i$ расходится, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 18.1 [1, с. 132] нулевое решение системы (1) устойчиво.

Подобно доказательству теоремы 1 можно показать, что функция $v(t)$ имеет предел $\lim_{t\to\infty} v(t) = \eta \ge 0$. Чтобы доказать, что $\eta = 0$, предположим противное: пусть $\eta > 0$.

Если выполнены условия А теоремы, то

$$0 \le v(\tau_k) \le v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt = v(t_0) + \sum_{i=1}^{k}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \le$$

$$\leq v(t_0) - c(\eta)\sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} dt \leq v_0 - c(\eta)\theta \sum_{i=1}^{k} a_i. \qquad (9)$$

Если выполнены условия B теоремы, то, аналогично доказательству теоремы 1, получим

$$0 \leq v(\tau_k + 0) \leq v(\tau_{k-1} + 0) - c(\eta)a_k \leq \cdots \leq v(t_0) - c(\eta)\sum_{i=1}^{k} a_i. \qquad (10)$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то правая часть неравенств (9), (10) становится отрицательной при больших к. Полученное противоречие доказывает, что $\eta = 0$, поэтому $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

В доказанных теоремах производная (скачки) функции Ляпунова сколь угодно близки к нулю, но остаются определенно отрицательными. Докажем теорему об асимптотической устойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям*

$$a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad a, b \in \mathcal{K},$$

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq 0 \quad \text{для} \quad t \neq \tau_i(x),$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \leq 0 \quad (i \in N).$$

Если при этом вдоль решений выполнено хотя бы одно из условий:

A: для любого натурального p существует $s > p$ ($s \in N$) такое, что $\Delta V_s \leq -c(\|x\|)$, $c \in \mathcal{K}$;

либо

B: существует $\gamma > 0$ такое, что для любого $T > 0$ найдется $t_* > T$ такое, что

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -c(\|x\|) \quad \text{при } t \in [t_*, t_* + \Delta t], \quad \text{где} \quad \Delta t \geq \gamma > 0, \quad c \in \mathcal{K}, \qquad (11)$$

то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Нулевое решение системы (1) устойчиво, что следует из теоремы 18.1 [1, с.132]. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что, поскольку функция $v(t)$ – невозрастающая, то существует предел $\lim_{t\to\infty} v(t) = \eta \geq 0$. Предположим, что $\eta > 0$, тогда из неравенства (2) получим оценку (8).

Пусть выполнено условие (A) теоремы. Тогда существует подпоследовательность $\{\Delta V_{i_s}\}$, которую мы в дальнейшем будем обозначать $\{\Delta V_s\}$, такая, что $\Delta V_s \leq -c(\|x\|)$ $(s \in N)$. Подобно доказательству теоремы 1 получим

$$0 \leq v(\tau_s + 0) \leq v(\tau_{s-1} + 0) - c \leq \cdots \leq v(t_0) - cs, \qquad (12)$$

где $c = c(b^{-1}(\eta))$.

Пусть выполнено условие (B). Положим $T = t_0$. По условию теоремы существует такое $t_1 > T$, что на $[t_1, t_1+\gamma]$ выполняется условие (11). Полагая $T = t_1$, найдем интервал $[t_2, t_2+\gamma]$, на котором производная функции $V(t,x)$ по времени также будет отрицательной. Продолжая процесс, получим последовательность интервалов $[t_s, t_s+\gamma]$, в каждом из которых имеет место неравенство (11). Интегрируя это неравенство вдоль решения в пределах от t_0 до $t_s+\gamma$, получим

$$0 < v(t_s+\gamma) \le v(t_0) + \int_{t_0}^{t_s+\gamma} v'(t)dt =$$

$$= v(t_0) + \sum_{i=1}^{s} \int_{t_i}^{t_i+\gamma} v'(t)dt \le v(t_0) - cs\gamma. \tag{13}$$

Получили противоречие, поскольку правые части неравенств (12), (13) отрицательны при больших s. Это означает, что $\eta = 0$, откуда следует, что имеет место предельное соотношение $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Теорема доказана.

Пример 2. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений.

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 \sin^2 t + x_2(x_2-x_1)^3, \quad \Delta x_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 \sin^2 t - x_1(x_2-x_1)^3, \quad \Delta x_2 = -x_2 + x_1;$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = x_1^2 + x_2^2$.

Нетрудно проверить, что выполнены все условия теоремы 3, а именно:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2\sin^2 t(x_1^4 + x_2^4) \le 0.$$

$$\Delta V_i = (x_1 + \Delta x_1)^2 + (x_2 + \Delta x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) \equiv 0.$$

Производная $\dot{V} = 0$ при $\sin t = 0$, $t = \pi k$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. Возьмем произвольное $\epsilon \in (0,1)$. Тогда $|\sin t| > \epsilon$ при $t \in (\arcsin\epsilon + \pi k, \pi - \arcsin\epsilon + \pi k)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, и

$$\dot{V} \le -2\epsilon^2(x_1^4 + x_2^4) < 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

3. Неустойчивость. Докажем ряд теорем о неустойчивости нулевого решения импульсной системы (1), используя свойства расходящихся рядов.

Теорема 4. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая в области $R_+ \times\ B_h$ условию*

$$V(t,x) \le b(\|x\|), \quad (t,x) \in R_+ \times\ B_h, \quad b \in \mathcal{K} \tag{14}$$

и условиям A:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \ge a_k\ c(\|x\|) \quad \text{для} \ \ t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \ (k \in N), \ c \in \mathcal{K}, \tag{15}$$

$$\Delta V_k = V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0 \quad (k \in N), \tag{16}$$

$$\inf_{k\in N}(\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in B_h), \tag{17}$$

или условиям B:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 0 \quad \textit{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \ (k \in N), \tag{18}$$

$$\Delta V_k \geq a_k \ c(\|x\|) \quad (k \in N) \quad\ c \in \mathcal{K}, \tag{19}$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x, для которых $V(t,x) > 0$. Если $a_k \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_i$ расходится, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Указанная в теореме область B_h представляет собой h-окрестность нуля: $B_h = \{x : \|x\| < h \ (0 < h < H)\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ - сколь угодно мало. По условию, в окрестности $\|x\| < \alpha$ найдется такая точка x_0, что $V(t_0, x_0) > 0$. Обозначим $V(t_0, x_0) = V_0$. Докажем, что траектория $x(t)$, выходящая из выбранной таким образом точки x_0, с течением времени выйдет за пределы области B_h.

В силу условий (15),(16) или (18),(19) функция $v(t)$ – неубывающая, следовательно, $v(t) \geq v(t_0) = V_0 > 0$ при всех $t > t_0$. Из неравенства (14) получим

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \geq b^{-1}(V_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \tag{20}$$

Так как функция $V(t,x)$ имеет бесконечно малый высший предел (неравенство (14)), то она будет ограничена:

$$V(t,x) \leq M \quad (M > 0) \quad \text{для} \ \ (t,x) \in R_+ \times B_h. \tag{21}$$

Если выполнены условия A, то, учитывая (20), получим

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq a_k \ c(b^{-1}(V_0)).$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль траектории, используя неравенства (15)-(17), (21)

$$M \geq v(\tau_k) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt = V_0 + \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \geq$$

$$\geq V_0 + c(b^{-1}(V_0)) \sum_{i=1}^{k} a_i(\tau_i - \tau_{i-1}) \geq V_0 + c(b^{-1}(V_0))\theta \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то найдется такое κ, что правая часть неравенства будет больше заданного числа M. Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область B_h за конечное время.

Если имеют место условия B, то из неравенства (19) получим

$$v(\tau_k + 0) - v(\tau_k) \geq a_k \ c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N).$$

Откуда

$$v(\tau_k+0) \geq v(\tau_k) + a_k\ c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N). \tag{22}$$

Из условия (18) имеем

$$v(\tau_k) \geq v(\tau_{k-1}+0) \quad (k \in N). \tag{23}$$

Используя неравенства (22), (23), получим

$$v(\tau_k+0) \geq v(\tau_{k-1}+0) + a_k\ c(b^{-1}(V_0)) \quad (k \in N).$$

Применяя полученную итерационную формулу, для любого натурального k получим следующую цепочку неравенств:

$$M \geq v(\tau_k+0) \geq v(\tau_{k-1}+0) + a_k\ c(b^{-1}(V_0)) \geq$$

$$\geq v(\tau_{k-2}+0) + c(b^{-1}(V_0))(a_k + a_{k-1}) \geq \cdots \geq v(t_0) + c(b^{-1}(V_0)) \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то найдется такое κ, что правая часть неравенства будет больше заданного числа M. В силу ограниченности функции $V(t,x)$ заключаем, что решение $x(t,t_0,x_0)$ покидает множество B_h за конечное время. Теорема доказана.

Пример 3. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений

$$\dot{x}_1 = 1/tx_1^3 + x_1x_2^2, \qquad \Delta x_1 = -x_1 + x_2;$$

$$\dot{x}_2 = 1/tx_2^3 - x_1^2x_2, \qquad \Delta x_2 = -x_2 + x_1;$$

$$\tau_k = k,\ k \in N.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$.

Нетрудно проверить, что выполнены все условия A теоремы 4, а именно:

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 1/tx_1^4 + x_1^2x_2^2 + 1/tx_2^4 - x_1^2x_2^2 = 1/t(x_1^4 + x_2^4).$$

Поскольку на каждом интервале непрерывности $t \in (\tau_{k-1};\tau_k],\ (k \in N)$, то $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{k}$, поэтому

$$\dot{V} = 1/t(x_1^4 + x_2^4) \geq 1/k(x_1^4 + x_2^4),\ t \in (\tau_{k-1};\tau_k],\ (k \in N).$$

$$\Delta V_k = x_2^2 + x_1^2 - x_1^2 - x_2^2 \equiv 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы неустойчиво.

Заметим, что для установления неустойчивости решения достаточно потребовать ограниченность функции Ляпунова не во всей области B_h, а только в некоторой ее части.

Обозначим $\Pi = \{(t,x) \in R_+ \times B_h : V(t,x) > 0\}$ – множество точек, в которых функция Ляпунова положительна.

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая в области $R_+ \times B_h$ условиям A:*

$$\dot V_{(1)}(t,x) \geq a_k\ \varphi(V(t,x)) \quad для \quad t \in (\tau_{k-1}(x);\tau_k(x)],\ (k \in N), \tag{24}$$

$$\Delta V_k \geq 0 \ \ (k \in N), \tag{25}$$

$$\inf_{k \in N}(\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in B_h), \tag{26}$$

или условиям B:

$$\dot V_{(1)}(t,x) \geq 0 \quad для \quad t \in (\tau_{k-1}(x);\tau_k(x)],\ (k \in N), \tag{27}$$

$$\Delta V_k \geq a_k\ \varphi(V(\tau_k,x)) \ \ (k \in N), \tag{28}$$

где функция $\varphi:\ R_+ \to R_+$ непрерывна, $\varphi(0)=0$ и $\varphi(s)>0$ при $s>0$.

Если функция $V(t,x)$ может принимать положительные значения в любой окрестности начала координат, ограничена в области Π, $a_k \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_i$ расходится, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Согласно условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0,x_0) > 0$. Докажем, что решение $x(t)$, выходящее из точки x_0, со временем выйдет за пределы области Π.

В силу условий A или B функция $v(t)$ будет неубывающей, поэтому $v(t) \geq v(t_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$. Это означает, что точки $(t,x(t)) \in \Pi$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно, при всех $t \geq t_0$ значения функции $V(t,x)$ будут ограничены:

$$V(t,x) \leq M \ \ (M = const > 0). \tag{29}$$

Пусть

$$c = \inf_{V_0 \leq s \leq a_0} \varphi(s),\ \text{где}\ \ a_0 = \sup_{(t,x)\in\Pi} V(t,x). \tag{30}$$

Очевидно, что $c > 0$.

Допустим, что выполнены условия A. Учитывая последнее выражение, получим

$$\dot V_{(1)}(t,x) \geq a_k\ \varphi(V(t,x)) \geq a_k c.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль решения с учетом неравенств (24) - (26), (29)

$$M \geq v(\tau_k) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt = V_0 + \sum_{i=1}^{k}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \geq$$

$$\geq V_0 + c\sum_{i=1}^{k} a_i(\tau_i - \tau_{i-1}) \geq V_0 + c\theta\sum_{i=1}^{k} a_i. \tag{31}$$

При больших *к* правая часть неравенства будет больше заданного числа M.

Пусть имеют место условия B. Из неравенства (27) получим

$$v(\tau_{k-1}+0) - v(\tau_k) \leq 0 \quad (k \in N),$$

а условие (28) с учетом (30) примет вид

$$v(\tau_k+0) - v(\tau_k) \geq a_k c \quad (k \in N).$$

Тогда получим

$$M \geq v(\tau_k+0) \geq v(\tau_k+0) + \Sigma_{i=1}^{k}(v(\tau_{i-1}+0) - v(\tau_i)) \geq$$

$$\geq v(t_0) + \Sigma_{i=1}^{k}(v(\tau_i+0) - v(\tau_i)) \geq V_0 + c\sum_{i=1}^{k} a_i. \tag{32}$$

При больших *к* правая часть неравенства будет больше заданного числа M. В силу ограниченности функции $V(t,x)$ в области П, из неравенств (31), (32) вытекает, что решение $x(t,t_0,x_0)$ оставляет эту область за конечное время, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Теоремы 4, 5 обобщают теоремы о неустойчивости решений импульсных систем [8], [1, с. 139], доказанные традиционным образом (без использования расходящихся рядов). Эти теоремы являются частным случаем теорем 4, 5, если в качестве расходящегося ряда использовать ряд, все члены которого тождественно равны единице.

Докажем теорему о неустойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

Теорема 6. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая в области $R_+ \times B_h$ условиям (14), (16), (18). Если функция $V(t,x)$ может принимать положительные значения в любой окрестности начала координат, и вдоль решений выполнено хотя бы одно из условий:*

A: для любого натурального p существует $s > p$ $(s \in N)$ такое, что

$$\Delta V_s \geq c(\|x\|), \quad c \in \mathcal{K}; \tag{33}$$

B: существует $\eta > 0$ такое, что для любого $T > 0$ найдется $t_* > T$ такое, что

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq c(\|x\|) \quad \text{при } t \in [t_*, t_* + \Delta t], \text{ где } \Delta t \geq \eta > 0, \quad c \in \mathcal{K}, \tag{34}$$

то тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. По условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Покажем, что решение $x(t, t_0, x_0)$ со временем выйдет за пределы области B_h.

В силу условий теоремы функция $v(t)$ будет неубывающей в области B_h, поэтому $v(t) \geq v(t_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$. Из неравенства (14) следует оценка (20). Так как функция $V(t, x)$ имеет бесконечно малый высший предел, то она будет ограничена (неравенство (21)).

Пусть выполнено условие (A) теоремы. Тогда существует подпоследовательность $\{\Delta V_{k_s}\}$, которую мы в дальнейшем будем обозначать $\{\Delta V_s\}$, такая, что $\Delta V_s \geq c(\|x\|)$ $(s \in N)$.

Для этой подпоследовательности, подобно доказательству теоремы 4, получим

$$M \geq v(\tau_s + 0) \geq v(\tau_{s-1} + 0) + c(b^{-1}(V_0)) \geq$$

$$\geq v(\tau_{s-2} + 0) + 2c(b^{-1}(V_0)) \geq \cdots \geq v(t_0) + sc(b^{-1}(V_0)).$$

Правая часть последнего неравенства становится неограниченной при больших s, значит нулевое решение системы (1) покинет множество B_h за конечное время.

Пусть выполнено условие (B). Положим $T = t_0$. По условию теоремы существует такое $t_1 > T$, что на $[t_1, t_1 + \eta]$ выполняется условие (34). Полагая $T = t_1$, найдем интервал $[t_2, t_2 + \eta]$, на котором производная функции $V(t, x)$ по времени также будет положительной. Продолжая процесс, получим последовательность интервалов $[t_s, t_s + \eta]$, в каждом из которых имеет место неравенство (34). Интегрируя это неравенство вдоль решения в пределах от t_0 до $t_s + \eta$, получим

$$M \geq v(t_s + \eta) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{t_s+\eta} v'(t)dt \geq$$

$$\geq v(t_0) + \sum_{i=1}^{s} \int_{t_i}^{t_i+\eta} v'(t)dt \geq V_0 + sc(b^{-1}(V_0))\eta.$$

Правая часть полученного неравенства при больших s становится больше заданного числа M. Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область B_h за конечное время. Следовательно, решение системы (1) – неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288с.

2. Коробов В.И. Метод функции управляемости. – М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2007. – 576с.

3. Гладилина Р.И. Об устойчивости тривиального решения периодических систем с импульсным воздействием // Механика твердого тела. – 2001. – N 31. – С.76-82.

4. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. мат. журнал. – 2003. – **55**, N 8. – С.1035-1043.

5. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Мат. заметки. – 2004. – **76**, N 1. – С.44-51.

6. Гладилина Р.И. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости импульсных систем // Динамические системы: межвед. научн. сборник. ТНУ. – 2009. – Вып. 26. – С.25-30.

7. Гладилина Р.И. Необходимые условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений с ипульсными воздействиями на поверхностях // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С.31-41.

8. Гургула С.И., Перестюк Н.А. Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика – 1982. – N 31. – С.9-14.

9. Игнатьев А.О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. – 2003. – **194**, N 10. – С.117-132.

10. Мартынюк А.А., Слынько В.И. Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика – 2004. – **40**, N 2. – С. 134-144.

11. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения – М.: Физматгиз, 1959. – 211с.