Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 1061, 2013, с.4–16

Взаємодія смерчових течій у випадку моделі шорсткуватих куль

В. Д. Гордевський, О. О. Гукалов

Харківський національний університет ім.В.Н.Каразина
пл.Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
gordevskyy2006@yandex.ru, gukalex@ukr.net,

Досліджено взаємодію двох смерчових течій у газі з шорсткуватих куль. Використано бімодальний розподіл з максвелівськими модами спеціального вигляду. Отримані різні умови, які є достатніми для мінімізації інтегрального відхилу між частинами рівняння Бріана-Піддака.
Ключові слова: шорсткуваті кулі, бімодальний розподіл, смерчі, чисто інтегральний відхил.

Гордевский В. Д., Гукалов А. А., **Взаимодействие смерчевых потоков для случая модели шероховатых сфер.** Исследовано взаимодействие двух смерчевых потоков в газе из шероховатых сфер. Использовано бимодальное распределение с максвелловскими модами специального вида. Получены различные условия, достаточные для минимизации интегральной невязки между частями уравнения Бриана-Пиддака.
Ключевые слова: шероховатые сферы, бимодальное распределение, смерчи, чисто интегральная невязка.

V. D. Gordevskyy, A. A. Gukalov, **Interaction of the eddy flows in the Bryan-Pidduck model.** The interaction between the two eddy streams of a gas of rough spheres is investigated. A bimodal distribution with a Maxwellian modes of a special form is used. Different sufficient conditions for the minimization of the integral discrepancy between the sides of the Bryan-Piddack equation is obtained.
Keywords: Rough spheres, bimodal distribution, eddies, pure integral discrepancy.
2000 Mathematics Subject Classification 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

1. Вступ

У цій статті розглядається модель шорсткуватих куль [1], яка вперше була введена у 1894р. Бріаном; методи, що були розвинуті для загальних сферичних молекул, які не обертаються, у 1922р. були розповсюджені на модель Бріана Піддаком. Перевага цієї моделі перед усіма іншими моделями, що припускають зміну стану обертання молекул, полягає у тому, що тут не потрібно ніяких додаткових змінних, які визначають орієнтацію молекули у просторі.

Вказані молекули є абсолютно пружними та абсолютно шорсткуватими, що означає наступне: при зіткненні двох молекул, точки, що зтикаються не мають у загальному випадку однакової швидкості. Передбачається, що дві сфери зачіпляють одна одну без ковзання. У початковий момент сфери деформують одна одну, а потім енергія деформації повертається назад у кінетичну енергію поступального та обертального руху без жодних втрат. У результаті відносна швидкість сфер у точці їх зіткнення змінюється при ударі на обернену.

Рівняння Больцмана для моделі шорсткуватих куль (або рівняння Бріана-Піддака) має вигляд [1-4]:

$$D(f) = Q(f,f); \tag{1}$$

$$D(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$Q(f,f) \equiv \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot$$

$$\cdot \Big[f(t, V_1^*, x, \omega_1^*) f(t, V^*, x, \omega^*) - f(t, V, x, \omega) f(t, V_1, x, \omega_1) \Big]. \tag{3}$$

Тут d – діаметр молекули, який пов'язаний з моментом інерції I наступним співідношенням:

$$I = \frac{bd^2}{4}, \tag{4}$$

де b – параметр, $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right]$, який характеризує ізотропний розподіл речовини всередині молекули;
t – час; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$ – просторова координата; $V = (V^1, V^2, V^3)$ та $w = (w^1, w^2, w^3) \in R^3$ – лінійна та кутова швидкості молекули відповідно; $\frac{\partial f}{\partial x}$ — градієнт функції f по змінній x; Σ – одинична сфера у просторі R^3; α — одиничний вектор із R^3, що спрямований вздовж лінії, яка з'єднує центри молекул, які зіштовхуються;

$$B\left(V - V_1, \alpha\right) = |(V - V_1, \alpha)| - (V - V_1, \alpha) \tag{5}$$

— член зіткнення.

Лінійні (V^*, V_1^*) та кутові (w^*, w_1^*) швидкості молекул після зіткнення виражаються через відповідні швидкості до зіткнення наступним чином:

$$
\begin{aligned}
V^* &= V - \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
V_1^* &= V_1 + \frac{1}{b+1}\left(b(V_1 - V) - \frac{bd}{2}\alpha \times (\omega + \omega_1) + \alpha(\alpha, V_1 - V)\right),\\
\omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\},\\
\omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)}\left\{\alpha \times (V - V_1) + \frac{d}{2}\left[\alpha(\omega + \omega_1, \alpha) - \omega - \omega_1\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Як відомо, загальний вигляд максвелівських розв'язків рівняння Больцмана для моделі твердих куль був отриманий в роботах [5-7], їх опис та дослідження можно також знайти у [8-10]. Аналогічна задача для моделі Бріана-Піддака була остаточно розв'язана тільки у роботі [11]. Зокрема, там отримано явний вигляд максвелівського розподілу, що описує смерчоподібний рух газу для цієї моделі.

Пошук явних наближених розв'язків кінетичних рівнянь, які мали б бімодальну структуру, здійснювався низкою авторів. Зокрема, для моделей взаємодії між молекулами, що нас цікавлять, цьому питанню були присвячені праці [12-13].

У роботі [4] було досліджено взаємодію двох "гвинтів" (стаціонарних неоднорідних максвеліанів) у газі із шорсткуватих куль, наша ж задача полягає у тому, щоб дослідити взаємодію двох "смерчів" (нестаціонарних неоднорідних максвеліанів) для моделі Бріана-Піддака. У статті [14] таке питання було досліджено для рівномірно-інтегрального відхилу; зараз ми розглянемо чисто інтегральний відхил.

Будемо використовувати наступний відхил, який вперше був запропонований у [4]:

$$
\Delta_1 = \int_R dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left|D(f) - Q(f,f)\right|. \tag{7}
$$

Далі, розглянемо бімодальний розподіл:

$$
f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{8}
$$

де функції $\varphi_i = \varphi_i(t,x), i = 1,2$, а максвелліани $M_i, i = 1,2$ відповідають смерчоподібному руху та мають наступний вигляд [11]:

$$
M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i\left(\left(V - \overline{V}_i\right)^2 + I\omega^2\right)}, \tag{9}
$$

$$
\rho_i = \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \tag{10}
$$

$$
r_i^2 = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i \times (x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t)\right]^2; \tag{11}
$$

тут ρ_i– густина газу, ρ_{0i}– довільна додатня константа, $\overline{\omega}_i$ – кутова швидкість потока газу у цілому; $\overline{V}_i(t,x) = \widehat{V}_i + [\overline{\omega}_i \times (x - x_{0i} - \overline{u}_{0i}t)]$ – масова швидкість; $x_{0i}, \overline{x}_{0i}$ – точки, через які проходять вісі швидкості та густини [4,8] відповідно, у момент часу $t = 0$:

$$x_{0i} = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i\right], \quad \overline{x}_{0i} = \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i \times (\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i})\right], \tag{12}$$

$\overline{u}_{0i}$ – довільний вектор, що перпендикулярний до $\overline{\omega}_i$ (поступальна швидкість цих осей);
$\beta_i = \frac{1}{2T}$ – обернена температура газу;
$\widehat{V}_i$ – лінійна швидкість руху газу вздовж вісі обертання.

В наступному розділі приведені результати, що дають різні достатні умови мінімізації відхилу (7) за рахунок відповідного вибору коефіцієнтних функцій φ_i та параметрів розподілу.

2. Основні результати

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

$$\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_{0i}\beta_i^{-m_i}, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$\left[\overline{\omega}_{0i} \times \left(\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

де $m_i \geqslant \frac{1}{2}$ *та* $\overline{\omega}_{0i} \in R^3$ *довільні та фіксовані. Нехай функції* $\varphi_i, i = 1, 2$ *у розподілі* (8) *не залежать від* $\beta_i, i = 1, 2$ *та такі, що добуток виразів*

$$\begin{gathered}\varphi_i; \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}; \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|; \quad \varphi_i\Big|[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i}t)]\Big|; \\ \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\left[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i}t)\right]\right| \quad i = 1, 2.\end{gathered} \tag{15}$$

на множники $exp\{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2\}$ *належать простору* $L_1(R^4)$ *при усіх* $\beta_i > 0, i = 1, 2$.

Тоді існує таке Δ_1'*, що*

$$\Delta_1 \leq \Delta_1', \tag{16}$$

причому:

1) якщо

$$m_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2\,, \tag{17}$$

то

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty, \\ i=1,2}} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right| \mu_i(t,x) +$$

$$+4d^2\rho_{01}\rho_{02}\pi\left|\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \varphi_1\varphi_2\mu_1(t,x)\mu_2(t,x), \tag{18}$$

де

$$\mu_i(t,x) = exp\{[\overline{\omega}_{0i} \times (x - u_{0i}t)]^2\}, \quad i = 1,2\,; \tag{19}$$

2) якщо

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1,2\,, \tag{20}$$

то виконується (18) при

$$\mu_i(t,x) = 1, \quad i = 1,2. \tag{21}$$

Доведення. Спочатку підставимо розподіл (8) у ліву частину рівняння (1), користуючись її представленням (2), та враховуючі, що максвеліани M_i є точними розв'язками рівняння Бріана-Піддака.

$$\begin{aligned} D(f) &= M_1 D(\varphi_1) + \varphi_1 D(M_1) + M_2 D(\varphi_2) + \varphi_2 D(M_2) = \\ &= M_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + M_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Далі, підставимо нашу функцію f, що має вид (8), у праву частину рівняння Больцмана для шорсткуватих куль, користуючись формулою (3) і тим, що максвеліан при підстановці дає нуль.

$$\begin{aligned} Q(f,f) &= \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \Big[(\varphi_1 M_1(V_1^*, \omega_1^*) + \\ &+ \varphi_2 M_2(V_1^*, \omega_1^*)) \cdot (\varphi_1 M_1(V^*, \omega^*) + \varphi_2 M_2(V^*, \omega^*)) - (\varphi_1 M_1(V_1, \omega_1) + \\ &+ \varphi_2 M_2(V_1, \omega_1)) \cdot (\varphi_1 M_1(V, \omega) + \varphi_2 M_2(V, \omega)) \Big] = \\ &= \frac{d^2}{2} \varphi_1 \varphi_2 \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \Big[M_1(V_1^*, \omega_1^*) M_2(V^*, \omega^*) + \\ &+ M_2(V_1^*, \omega_1^*) M_1(V^*, \omega^*) - M_1(V_1, \omega_1) M_2(V, \omega) - M_2(V_1, \omega_1) M_1(V, \omega) \Big] = \\ &= \varphi_1 \varphi_2 \Big(Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \Big). \end{aligned}$$

Як вказано у [9,10], інтеграл зіткнень для довільних функцій f та g, аналогічний виразу (3), тобто його білінійне узагальнення, можна представити в наступному вигляді:

$$Q(f,g) = G(f,g) - fL(g), \tag{22}$$

де зменшуване $G(f,g)$ називається прибутковим членом інтеграла зіткнень і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} G(f,g) = \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dV_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\sum} d\alpha B(V - V_1, \alpha) \cdot \\ \cdot f(t,x,V_1^*,\omega_1^*) g(t,x,V^*,\omega^*), \end{aligned} \tag{23}$$

а від'ємник $L(g)$ – витратний член вигляду

$$L(g)=\frac{d^2}{2}\int_{R^3}dV_1\int_{R^3}d\omega_1\int_{\sum}d\alpha B(V-V_1,\alpha)g(t,x,V_1,\omega_1). \tag{24}$$

У роботі [14] було показано, що:

$$\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega Q\left(M_i,M_j\right)=0. \tag{25}$$

Отже має місце наступна рівність:

$$\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega G(M_i,M_j)=\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega M_iL(M_j). \tag{26}$$

Таким чином, можна оцінити модуль різниці між частинами рівняння (1):

$$\begin{gathered}|D(f)-Q(f,f)|=|M_1D(\varphi_1)+M_2D(\varphi_2)-\varphi_1\varphi_2\left(Q(M_1,M_2)+Q(M_2,M_1)\right)=\\=|M_1D(\varphi_1)+M_2D(\varphi_2)-\varphi_1\varphi_2\left[G(M_1,M_2)-M_1L(M_2)+\right.\\\left.+G(M_2,M_1)-M_2L(M_1)\right]|\leqslant M_1|D(\varphi_1)|+M_2|D(\varphi_2)|+\\+\varphi_1\varphi_2\cdot(G(M_1,M_2)+G(M_2,M_1)+M_1L(M_2)+M_2L(M_1))=\\=M_1(|D(\varphi_1)|+\varphi_1\varphi_2L(M_2))+M_2(|D(\varphi_2)|+\varphi_1\varphi_2L(M_1))+\\+\varphi_1\varphi_2(G(M_1,M_2)+G(M_2,M_1)).\end{gathered}$$

Далі проінтегруємо останню оцінку по усьому простору лінійних та кутових швидкостей:

$$\begin{gathered}\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega|D(f)-Q(f,f)|\leqslant\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{2}\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega M_i(|D(\varphi_i)|+\varphi_i\varphi_jL(M_j))+\\+2\varphi_1\varphi_2\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega G(M_1,M_2)=\\=\sum_{i=1}^{2}\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega|D(\varphi_i)|M_i+4\varphi_1\varphi_2\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega G(M_1,M_2).\end{gathered}$$

Використаємо доведену у роботі [4] наступну формулу:

$$\begin{gathered}\int_{R^3}dV\int_{R^3}d\omega G(M_1,M_2)=\\=\frac{d^2\rho_1\rho_2}{\pi^2}\int_{R^3}dq\int_{R^3}dq_1e^{-q^2-q_1^2}\cdot\left|\frac{q}{\sqrt{\beta_1}}-\frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}}+\overline{V}_1-\overline{V}_2\right|.\end{gathered} \tag{27}$$

Враховуючі формулу (27), продовжимо викладку:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 I^{3/2} e^{-\beta_i \left((V - \overline{V}_i)^2 + I\omega^2 \right)} +$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Далі, обчислимо інтеграл по кутовим швидкостям:

$$\int_{R^3} d\omega e^{-\beta_i I \omega^2} = \left(\frac{\pi}{\beta_i I} \right)^{3/2}.$$

Таким чином, будемо мати наступну оцінку:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dV \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (V - \overline{V}_i)^2} +$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|,$$

а якщо застосувати заміну $\beta_i (V - \overline{V}_i)^2 = p^2$, ми отримаємо наступне:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\overline{V}_i + \frac{p}{\sqrt{\beta_i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i \cdot \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} +$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_1 \rho_2}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Тепер, підставивши вираз для густини із формули (10), маємо:

$$\int_{R^3} dV \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f,f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} +$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{d^2 \rho_{01} \rho_{02} e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2}}{\pi^2} \cdot$$
$$\cdot \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Завдяки умові (15) та беручі до уваги вигляд масової швидкості газу, можна проінтегрувати останню нерівність по просторовій координаті x, а далі – по часу t. Будемо мати:

$$\Delta_1 \leqslant \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2}}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} +$$
$$+ \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx 4\varphi_1 \varphi_2 \frac{d^2 \rho_{01} \rho_{02} e^{\beta_1 \overline{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \overline{\omega}_2^2 r_2^2}}{\pi^2} \cdot$$
$$\cdot \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|. \tag{28}$$

Тепер, згадуючі вирази для r_i^2 та $\overline{x}_{0i}$, що описуються формулами (11), (12) та враховуючі умови теореми (13), (14), маємо наступний вигляд оцінки:

$$\Delta_1 \leqslant \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \cdot$$
$$\cdot \frac{\rho_{0i} e^{\beta_i \left[\overline{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i} \times (x - \overline{u}_{0i} t) \right]^2} e^{-p^2}}{\pi^{3/2}} +$$
$$+ \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \frac{4\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} e^{\beta_1 \left[\overline{\omega}_{01} \beta_1^{-m_1} \times (x - \overline{u}_{01} t) \right]^2 + \beta_2 \left[\overline{\omega}_{02} \beta_2^{-m_2} \times (x - \overline{u}_{02} t) \right]^2} \cdot$$
$$\cdot \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Таким чином, ми бачимо, що:

$$e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} = e^{\beta_i^{1-2m_i} [\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)]^2},$$

тоді

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty, \\ i=1,2}} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} = \left[\begin{array}{ll} e^{[\overline{\omega}_{0i} \times (x - \overline{u}_{0i} t)]^2}, & m_i = \frac{1}{2}; \\ 1, & m_i > \frac{1}{2}. \end{array} \right. = \mu_i(t, x). \tag{29}$$

Перейдемо до границі у нерівності при $\beta_i \to +\infty, \quad i = 1, 2$, а у правій частині нерівності зробимо перехід до границі під знаком інтеграла. Це можливо у зв'язку з припущенням (15) та рівномірною відносно $\beta_i, \quad i = 1, 2$ збіжністю усіх, що є, інтегралів на довільному околі нескінченності завдяки наявності швидко спадаючих за змінними q та q_1 експонент. Таким чином отримуємо:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty, \\ i=1,2}} \Delta_1' = \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \frac{\rho_{0i} \mu_i(t, x)}{\pi^{3/2}} e^{-p^2} +$$
$$+4 \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \frac{\varphi_1 \varphi_2 d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \mu_1(t, x) \mu_2(t, x) \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 \left| \widehat{V}_1 - \widehat{V}_2 \right| e^{-q^2 - q_1^2}.$$

Обчислюючи тепер інтеграли за змінними p, q та q_1, здобудемо:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty,\\ i=1,2}} \Delta_1^{'} = \sum_{i=1}^{2} \rho_{0i} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \right| \mu_i(t,x) +$$
$$+4d^2\rho_{01}\rho_{02}\pi \left|\widehat{V}_1 - \widehat{V}_2\right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx\varphi_1\varphi_2\mu_1(t,x)\mu_2(t,x).$$

Таким чином, було показано, що у випадку (17) отримаємо результати (18), (19), а коли розглядається варіант (20), то знову має місце рівність (18) при (21). **Теорему доведено.**

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови (13), (14) Теореми 1, а також*

$$m_i \geqslant \frac{1}{2}, \quad i = 1,2, \tag{30}$$

а функції $\varphi, i = 1,2$ *мають вигляд фінітних "плато" [15, 16] таких, що:*

$$V\left[(supp\varphi_i)_{G_x}\right] \to 0, \quad i = 1,2, \tag{31}$$

$$\widehat{V}_i^k \cdot V\left[(supp\varphi_i)_{G_k}\right] \to 0, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,3, \tag{32}$$

де під G_x *та* $G_k, k = 1,2,3$ *розуміються проекції множини* $G \subset R^4$ *на гіперплощині* $t = 0$ і $x^k = 0, k = 1,2,3$ *відповідно, а під* $V-$ *об'єм вказаних проекцій. Нехай, крім того, виконується хоча б одна з вимог:*

$$\widehat{V}_1 = \widehat{V}_2, \tag{33}$$
$$supp\varphi_1 \cap supp\varphi_2 = \emptyset, \tag{34}$$
$$d \to 0. \tag{35}$$

Тоді:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty,\\ i=1,2}} \Delta_1 = 0. \tag{36}$$

Доведення. Умова (15) Теореми 1 виконується завдяки фінітності функцій φ_i, а враховуючі, що умови (13), (14) теж накладаються, бачимо, що співвідношення (18) справедливо з функціями $\mu_i(t,x)$, $i = 1,2$ вигляду (19) або (21), причому в обох випадках усі інтеграли, що входять до (18), збігаються завдяки зазначеній фінітності. Далі, враховуючі виконання умов (31), (32), як показано у [15], можна пересвідчитись, що інтеграли від виразів

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \widehat{V}_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}$$

прямують до нуля. Легко бачити, що останій доданок теж стає нескінчено малим завдяки наявності хоча б однієї з умов (33)-(35). Таким чином твердження (36) виконується. **Наслідок доведено.**

Теорема 2. *Нехай знову виконується умова (13) Теореми 1, а також має місце розклад:*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)e^{-\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}, \quad i = 1,2, \tag{37}$$

причому вирази (15) з підстановкою ψ_i *замість* φ_i, $\quad i = 1,2$ *належать простору* $L_1(R^4)$.

Тоді має місце оцінка (16), причому у випадку (17) виконується співвідношення (18) з додаванням до правої частини ще одного доданка вигляду:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{2}\rho_{0i}\left|\left[\overline{\omega}_{0i}\times\left(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i}\right)\right]\right|\int_{R^1}dt\int_{R^3}dx\psi_i, \tag{38}$$

причому функції (19) зберігаються, а у другому випадку (20) співвідношення (18) зберігається без змін разом з функціями (21).

Доведення. Знов будемо спиратися на оцінку (28), яка була отримана при доведенні Теоремі 1. Обчислення похідних функцій φ_i, $\quad i = 1,2$ було детально наведено у роботі [14], ми лише приведемо кінцевий результат:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = e^{-\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i\left\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})-\overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t-(\overline{\omega}_i\times\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i})\right\}\right), \tag{39}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = e^{-\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left\{\overline{\omega}_i(\overline{\omega}_i,x)-\overline{\omega}_i^2(x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right\}\right). \tag{40}$$

Далі, підставимо ці похідні до підінтегральної функції у нерівності (28):

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|e^{\beta_i\overline{\omega}_i^2 r_i^2} = \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+\right.\\ &\quad +2\beta_i\psi_i\cdot\left\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})-\overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t-(\overline{\omega}_i\times\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i})+\right.\\ &\quad +\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i+[\overline{\omega}_i\times(x-\overline{u}_{0i}t)],\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)-\\ &\quad \left.\left.-\;\overline{\omega}_i^2\left(x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t,\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i+[\overline{\omega}_i\times(x-\overline{u}_{0i}t)]\right)\right\}\right|.\end{aligned}$$

Скористуємось властивостями скалярного, векторного та змішаного добутків. Тоді отримаємо наступне:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+2\beta_i\psi_i\left\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i})-\overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t-(\overline{\omega}_i\times\widehat{V}_i,\overline{u}_{0i})+\right.\right.\\ &\quad +\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i,\overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i,x)-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}+\widehat{V}_i,x-\overline{x}_{0i}-\overline{u}_{0i}t\right)-\\ &\quad \left.\left.-\;\overline{\omega}_i^2\left([\overline{\omega}_i\times(x-\overline{u}_{0i}t)],x-\overline{u}_{0i}t-\frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\left[\overline{\omega}_i\times(\widehat{V}_i-\overline{u}_{0i})\right]\right)\right\}\right|.\end{aligned}$$

Для подальших перетворень використаємо наступну формулу із векторної алгебри, справедливу для чотирьох довільних векторів a, b, c, d із простору R^3 :

$$\Big([a,b],[c,d]\Big) = (a,c)(b,d) - (a,d)(b,c).$$

Тоді маємо:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\Big\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t - (\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}) + \right.$$
$$+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i, \overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \widehat{V}_i, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i}t\right) +$$
$$\left. + \overline{\omega}_i^2(x - \overline{u}_{0i}t, \widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}) - (\overline{\omega}_i, \widehat{V}_i)(\overline{\omega}_i, x)\Big\}\right|,$$

і знову користуючись властивостями скалярного добутка, отримуємо:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\Big\{\overline{\omega}_i^2(x,\overline{u}_{0i}) - \overline{u}_{0i}^2\overline{\omega}_i^2 t - (\overline{\omega}_i \times \widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}) + \right.$$
$$+\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, \overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i}t\right) -$$
$$-\overline{\omega}_i^2\left(\widehat{V}_i, x - \overline{u}_{0i}t\right) - \frac{1}{\overline{\omega}_i^2}\Big[\overline{\omega}_i \times (\widehat{V}_i - \overline{u}_{0i})\Big] + \overline{\omega}_i^2\left(x, \widehat{V}_i\right) - \overline{\omega}_i^2(x, \overline{u}_{0i}) -$$
$$\left. - \overline{\omega}_i^2 t\left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i\right) + \overline{\omega}_i^2\overline{u}_{0i}^2 t\Big\}\right|.$$

Після спрощень будемо мати:

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\Big\{(\widehat{V}_i, \overline{\omega}_i \times \overline{u}_{0i}) + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, \overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i, x) - \right.$$
$$-\overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i}t\right) - \overline{\omega}_i^2\left(\widehat{V}_i, x\right) + \overline{\omega}_i^2 t\left(\widehat{V}_i, \overline{u}_{0i}\right) -$$
$$\left. - (\widehat{V}_i, \overline{\omega}_i \times \overline{u}_{0i}) + \overline{\omega}_i^2\left(x, \widehat{V}_i\right) - \overline{\omega}_i^2 t\left(\overline{u}_{0i}, \widehat{V}_i\right)\Big\}\right|,$$

тобто

$$\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i\right)\frac{\partial\psi_i}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + 2\beta_i\psi_i\left\{\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, \overline{\omega}_i\right)(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2\left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i}t\right)\right\}\right|.$$

Далі знову повернемось до нерівності (28) та зробимо підстановку функції φ_i та її похідних, тобто вирази (37), (39), (40), враховуючі отримане представлення для частини підінтегральної функції у першому доданку правої частини нерівності. Таким чином:

$$\Delta_1 \leqslant \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 2\beta_i \psi_i \left\{ \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, \overline{\omega}_i \right) (\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}}, x - \overline{x}_{0i} - \overline{u}_{0i} t \right) \right\} \right| \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} e^{-p^2} +$$

$$+4 \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_1 \psi_2 \frac{d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Отже, ми отримали наступний вигляд для $\Delta_1^{'}$:

$$\Delta_1^{'} = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} dp \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \left(\frac{p}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{V}_i \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{\beta_i} \psi_i \left\{ (p, \overline{\omega}_i)(\overline{\omega}_i, x) - \overline{\omega}_i^2 (p, x - \overline{u}_{0i} t) + (p, \overline{\omega}_i, \widehat{V}_i - \overline{u}_{0i}) \right\} \right| \rho_{0i} e^{\beta_i \overline{\omega}_i^2 r_i^2} e^{-p^2} +$$

$$+ \frac{4 d^2 \rho_{01} \rho_{02}}{\pi^2} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_1 \psi_2 \int_{R^3} dq \int_{R^3} dq_1 e^{-q^2 - q_1^2} \left| \frac{q}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{q_1}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{V}_1 - \overline{V}_2 \right|.$$

Далі, виконуючі граничний перехід у останній рівності, обгрунтування якого аналогічно тому, що і в попередній теоремі, і згадуючі (29), ми отримуємо необхідне твердження. **Теорему доведено.**

Наслідок 2. *Нехай виконані усі умови теореми 2, причому функції* $\psi_i, i = 1, 2$ *задовольняють тим же вимогам, які накладаються на функції* $\varphi_i, i = 1, 2$ *у наслідку 1. Тоді, якщо справедливо (20), або (17) разом з (14), то при виконанні хоча б однієї із вимог (33)-(35) має місце рівність (36).*

Доведення проводиться за схемою, аналогічною схемі доведення наслідка 1, з заміною функцій φ_i на $\psi_i, i = 1, 2$, з тією лише різницею, що тепер, як бачимо з твердження теореми 2, вірно або (19) або (21), а додатковий член вигляду (38), що виникає у припущенні (17), автоматично анулюється завдяки вимозі самоузгодженості смерчів (14). **Наслідок доведено.**

Література

1. С.Чепмен, Т.Каулинг. Математическая теория неоднородных газов, пер. с англ. Е.В.Малиновской, М. : 1960г. – гл. 11 – С. 240–249

2. Cercignani C, Lampis M. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres. J. Statist. Phys. 1988; **53**, P. 655–672.

3. Gordevsky V.D. Explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the model of rough spheres – Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine(2000), **4**, P. 10–13 (Ukrainian).

4. Gordevskyy V.D. Approximate Billow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation − Math. Meth. Appl. Sci. – 2000. – **23**. – P. 1121–1137.

5. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М. : ИИЛ, (пер. с франц.). 1960. – 118 с.

6. Grad H. On the kinetic theory of racefied gases.//Comm. Pure and Appl. Math., – 1949. – **2**, №4 – P. 331–407.

7. Фридлендер О.Г. Локально-максвелловские решения уравнения Больцмана //Прикладная математика и механика.-1965. -**29**, №5. – С. 973–977.

8. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. – 2004. – **27**. – P. 231–247.

9. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М. : Мир, 1978. – 495 с.

10. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М. : Наука, 1967. – 440 с.

11. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Максвелловские распределения в модели шероховатых сфер // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**. – №5. – С. 629–639.

12. Gordevskyy V.D. An approximate biflow solution of the Boltzmann equation. Theoret. Math. Phys. 1998; **114**. – №1. – P. 126–136.

13. Gordevskyy V.D., Sysoyeva Yu.A. Interaction between non-uniform flows in a gas of rough spheres // Matem. fiz., analiz, geom. – 2002. – **9**. – №2. – P. 285–293.

14. Гордевский В.Д., Гукалов А.А. Взаимодействие смерчевых потоков в модели Бриана-Пиддака // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iм. В.Н. Каразiна. Сер. Математика, прикладна математика i механiка. - 2011. - №990, С. 27-41.

15. Gordevsky V.D. Trimodal approximate solutions of the non-linear Boltzmann equation // Math. Meth. Appl. Sci. - 1998. - Vol. 21. P. 1479-1494

16. Гордевский В.Д. Вихри в газе из твердых сфер // Теор. и мат. физика. - 2003. -Т. 135, **2**. - С. 303-314.