

Дослідження потенційної енергії формозміни в прямокутній плиті, на яку тисне опуклий штамп

Т. О. Штефан, О. В. Величко

*Запорізький національний технічний університет,
ул. Жуковського, 64, 69063, Запоріжжя, Україна
tayana2000@rambler.ru,*

*Таврійський державний агротехнологічний університет
пр. Б. Хмельницького, 18, 72316, м. Мелітополь,
Запорізька обл., Україна
velichko_ev@i.ua*

Розглядається стаціонарна задача про просторову деформацію штампом плити у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Досліджується вплив геометричних та механічних параметрів плити на поведінку функції потенційної енергії формозміни. Чисельні результати наведено для штампу, поверхня якого є синусоїдальною в двох вимірах.

Ключові слова: плита, штамп, просторова деформація, четверта гіпотеза міцності, потенційна енергія, зона пластичності.

Штефан Т.А., Величко Е.В., **Исследование потенциальной энергии формоизменения в прямоугольной плите, на которую давит выпуклый штамп.** Рассматривается стационарная задача про пространственную деформацию прямоугольного параллелепипеда штампом. Исследуется влияние геометрических и механических параметров плиты на поведение функции потенциальной энергии формоизменения. Численные результаты приведены для штампа, поверхность которого является синусоидальной в двух измерениях.

Ключевые слова: плита, штамп, пространственная деформация, четвертая гипотеза прочности, потенциальная энергия, зона пластичности.

T. A. Shtefan, H. V. Velichko, **Research the potential energy of forming a rectangular plate, which pushes convex stamp.** We consider the stationary problem of spatial deformation cuboid stamp. The influence of geometrical and mechanical parameters of the slab on the behavior of the potential energy function. Numerical results are shown for the stamp which surface is sinusoidal in two dimensions.

Keywords: plate, stamp, spatial deformation, the fourth hypothesis is strength, potential energy, the zone of plasticity.

2000 Mathematics Subject Classification 74G65.

ВСТУП

Плити представляють собою важливі елементи різноманітних інженерних споруд, тому дослідженню особливостей їх деформацій присвячено багато робіт, деякі з яких наведені в роботі [1]. Оцінка міцності елементів машин і споруд є важливою задачею інженерного розрахунку. При аналізі міцності інженерних конструкцій одним із основних інструментів для теоретичних розрахунків є теорія пружності [2]. Наприклад, в роботі [3] викладено суть авторських робіт, присвячених розрахунку на міцність опору матеріалів детермінованими методами при відомому напруженому стані. Після визначення компонент напружень в точках деформованого тіла в залежності від типу матеріалу використовують одну із гіпотез міцності. На практиці найчастіше застосовується четверта (енергетична) гіпотеза міцності, сутністю якої є твердження про те, що руйнування структури матеріалу споруди відбувається в тих областях, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення [4]. Явний вираз для функції енергії формозміни можна записати лише в деяких найпростіших випадках. Наприклад, для деформації нескінченного в одному напрямку паралелепіпеда, який знаходиться в умовах плоскої деформації, можна записати відповідний вираз для функції потенційної енергії формозміни, використовуючи результати роботи [5]. Зазвичай при розв'язанні задач теорії пружності обмежуються або виразами для компонент тензору напружень, або графіками для поведінки компонент тензору напружень, при побудові яких використанні визначені в процесі розв'язку їх значення в вузлах деякої сітки [6]. Визначення критичних, з точки зору гіпотез міцності, областей конструкцій є окремою задачею механіки. В даній роботі на основі аналітичних розв'язків мішаної задачі теорії пружності для плити у вигляді прямокутного паралелепіпеда проведено чисельний аналіз поведінки функції, яка описує потенційну енергію формозміни залежно від геометричних та пружних параметрів задачі. В роботі [7] розглядається стаціонарна задача про плоску деформацію прямокутного паралелепіпеда штампом, причому нижня межа тіла вільна від навантажень. Отримано аналітичний вигляд для напружень і переміщень точок паралелепіпеда та досліджено вплив геометричних і механічних характеристик на поведінку величини енергій формозміни, яка застосовується у четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності. Для просторової деформації плити синусоїдальним штампом така задача вперше розглянута в цій публікації. Виявлені механічні ефекти можуть бути перенесені на інші подібні конструкції.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.

Розглядається плита у вигляді прямокутного паралелепіпеда. Матеріал плити є ізотропним невагомим однорідним і характеризується модулем зсуву μ та коефіцієнтом Пуассона ν . Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат знаходився в одній з вершин плити, вісі направлені вздовж його ребер, причому вісь Oz направлено вниз. Вважаємо, що плита займає область $D \times [0, h]$, де $D : (x, y) \in [0, A] \times [0, B]$. Для

зручності будемо застосовувати представлення $A = \frac{\pi}{a}$, $B = \frac{\pi}{b}$. На верхню межу плити ($z = 0$) тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею плити на всій ділянці D . Відповідні граничні умови мають вигляд:

$$u(x, y, 0) = 0, v(x, y, 0) = 0, w(x, y, 0) = f(x, y), (x, y) \in D. \quad (1)$$

Тут $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні, яка співпадає з нижньою межею штампу в кінцевому положенні, де $D : (x, y) \in [0, A] \times [0, B]$.

Будемо вважати, що нижня межа вільна від навантажень, тобто:

$$\tau_{yz}(x, y, h) = 0, \tau_{xz}(x, y, h) = 0, \sigma_z(x, y, h) = 0. \quad (2)$$

За аналогією з [5] будемо вважати, що на бокових межах виконуються наступні умови:

$$w(0, y, z) = w(x, 0, z) = 0, w(A, 0, z) = w(0, B, z) = 0. \quad (3)$$

Ставиться задача про отримання явного аналітичного виразу для функції потенційної енергії формозміни плити та дослідження її на максимум. Для цього потрібно отримати аналітичний розв'язок задачі лінійної теорії пружності з межовими умовам (1)-(3).

2. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Оскільки функція $w(x, y, z)$ повинна задовольняти умовам (3), то будемо шукати її у вигляді подвійного тригонометричного ряду за синусами:

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby). \quad (4)$$

У цьому випадку розвинення функцій $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{xz}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), v = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby), \\ \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \\ \sigma_z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{nk}(z) \cos(kax) \cos(nby), \\ \tau_{xz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), \tau_{yz} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby). \end{aligned} \quad (5)$$

З урахуванням рівнянь рівноваги та закону Гука отримано загальний вигляд для функцій, які входять в розвинення (5):

$$U_{nk} = \frac{ak(A_{nk} + zpB_{nk}) \operatorname{ch} pz + ak(C_{nk} + zpD_{nk}) \operatorname{sh} pz + bnE_{nk} \operatorname{ch} pz + bnF_{nk} \operatorname{sh} pz}{p^2},$$

$$V_{nk} = \frac{bn(A_{nk} + zpB_{nk}) \operatorname{ch} pz + bn(C_{nk} + zpD_{nk}) \operatorname{sh} pz - akE_{nk} \operatorname{ch} pz - akF_{nk} \operatorname{sh} pz}{p^2},$$

$$W_{nk} = \frac{A_{nk} \operatorname{sh} pz + B_{nk}((4\nu - 3) \operatorname{ch} pz + pz \operatorname{sh} pz) + C_{nk} \operatorname{ch} pz + D_{nk}((4\nu - 3) \operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz)}{p}.$$

Після визначення коефіцієнтів $U_{nk}(z)$, $V_{nk}(z)$ та $W_{nk}(z)$ визначаємо функції $S_{nk}(z)$, $R_{nk}(z)$, $Q_{nk}(z)$, $T_{nk}(z)$, $M_{nk}(z)$ та $N_{nk}(z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{4\mu} S_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} a^2 k^2 (\nu-1) \operatorname{ch} pz + C_{nk} a^2 k^2 (\nu-1) \operatorname{sh} pz + \\
&\quad + p B_{nk} (a^2 k^2 (\nu-1) z \operatorname{ch} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{sh} pz) + \\
&\quad + p D_{nk} (a^2 k^2 (\nu-1) z \operatorname{sh} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{ch} pz); \\
\frac{p^2}{4\mu} R_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} b^2 n^2 (\nu-1) \operatorname{ch} pz + C_{nk} b^2 n^2 (\nu-1) \operatorname{sh} pz + \\
&\quad + p B_{nk} (b^2 n^2 (\nu-1) z \operatorname{ch} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{sh} pz) + \\
&\quad + p D_{nk} (b^2 n^2 (\nu-1) z \operatorname{sh} pz + \nu(2\nu-1) p \operatorname{ch} pz); \\
\frac{p^2}{4\mu} Q_{nk}(1-2\nu) &= A_{nk} (\nu-1) p^2 \operatorname{ch} pz + C_{nk} (\nu-1) p^2 \operatorname{sh} pz + \\
&\quad + p B_{nk} ((\nu-1) p^2 z \operatorname{ch} pz + (2\nu^2 - 5\nu + 2) p \operatorname{sh} pz) + \\
&\quad + p D_{nk} ((\nu-1) p^2 z \operatorname{sh} pz + (2\nu^2 - 5\nu + 2) p \operatorname{ch} pz); \\
\frac{p^2}{4\mu} T_{nk}(1-2\nu) &= akbn(\nu-1)((A_{nk} + B_{nk}z)p \operatorname{ch} pz + (C_{nk} + D_{nk}z)p \operatorname{sh} pz); \\
\frac{p^2}{4\mu} M_{nk}(1-2\nu) &= ak(\nu-1)(A_{nk}p \operatorname{sh} pz + B_{nk}p(pz \operatorname{sh} pz + (2\nu-1) \operatorname{ch} pz) + \\
&\quad + C_{nk}p \operatorname{ch} pz + D_{nk}p(pz \operatorname{ch} pz + (2\nu-1) \operatorname{sh} pz)); \\
\frac{p^2}{4\mu} N_{nk}(1-2\nu) &= bn(\nu-1)(A_{nk}p \operatorname{sh} pz + B_{nk}p(pz \operatorname{sh} pz + (2\nu-1) \operatorname{ch} pz) + \\
&\quad + C_{nk}p \operatorname{ch} pz + D_{nk}p(pz \operatorname{ch} pz + (2\nu-1) \operatorname{sh} pz)).
\end{aligned}$$

Тут A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} , D_{nk} , E_{nk} , F_{nk} – довільні константи, $p^2 = a^2 k^2 + b^2 n^2$. Зауважимо, що для кожної з гармонік константа p є своєю. Значення довільних констант визначаються з межових умов (1), (2). Наведемо остаточні формули:

$$\begin{cases} A_{nk} = E_{nk} = F_{nk} = 0, \\ B_{nk} = p f_{nk} \frac{\operatorname{ch}^2 ph + 1 - 2\nu}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ C_{nk} = p f_{nk} \frac{4\nu^2 - 6\nu + 2 - p^2 h^2}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ D_{nk} = p f_{nk} \frac{ph - \operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph}{(4\nu - 3) \operatorname{ch}^2 ph - p^2 h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}. \end{cases} \quad (6)$$

Тут f_{nk} – коефіцієнт розкладу функції $z = f(x, y)$ в ряд Фур'є:

$$f_{nk} = \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b} dx dy,$$

де область інтегрування $D : (x, y) \in [0, \frac{\pi}{a}] \times [0, \frac{\pi}{b}]$.

3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ФОРМОЗМІНИ.

Застосуємо отриманні результати для дослідження поведінки функції енергії формозміни. В четвертій гіпотезі міцності [4] використовується вираз

$$\sigma^{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

який визначає енергію формозміни. Цей вираз можна записати через компоненти тензора напружень у довільній декартовій системі координат:

$$\sigma^{II} = F(x, y, z) = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}.$$

З урахуванням розвинень (5) можна отримати розклад для функції потенціальної енергії формозміни. Оскільки вираз виявляється занадто громіздким, обмежимося дослідженням енергії, залишивши в розкладах (5) лише перші гармоніки. В цьому випадку

$$\begin{aligned} F^2(x, y, z) = & (S_{11}^2 + R_{11}^2 + Q_{11}^2 - 3S_{11}R_{11} - 3S_{11}Q_{11} - 3R_{11}Q_{11}) \sin^2 ax \sin^2 by + \\ & + 3T_{11}^2 \cos^2 ax \cos^2 by + 3M_{11}^2 \cos^2 ax \sin^2 by + 3N_{11}^2 \sin^2 ax \cos^2 by. \end{aligned} \quad (7)$$

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Розглянемо прямокутну плиту розмірами $A \times B \times h$, яка деформується штампом, поверхня якого описується рівнянням $f(x, y) = \alpha \sin ax \sin by$. При розрахунках вважалось, що $A = \pi$ (і, відповідно, $a = 1$), товщина плити $h = \frac{\pi}{2}$, а параметр B буде змінним. Замість функції потенційної енергії формозміни будемо розглядати пропорційну їй безрозмірну функцію $\tilde{F}(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{\alpha \mu a}$. На рисунках 1-3 зображені типові графіки функції потенційної енергії формозміни на верхній межі плити (при $z = 0$), при вказаних значеннях коефіцієнта Пуассона та геометричних параметрів плити.

Із симетрії задачі очевидно, що максимум потенціальної енергії формозміни на верхній межі знаходиться або в центрі верхньої межі, або у її межових точках, які знаходяться в середині бокових ребер. Це підтверджується рисунками 1-3. При заданих граничних умовах (1)-(3) відношення значень функції потенційної енергії формозміни на середині ребер верхньої грані дорівнює відношенню лінійних розмірів плити.

На рисунках 4-6 зображено графіки функції енергії формозміни на нижній межі плити (при $z = h$) при тих же параметрах, що і на верхній межі.

На нижній межі плити локальні максимуми знаходяться в точці $x = \frac{A}{2}$, $y = \frac{B}{2}$ і в кутових точках плити, причому значення локальних максимумів в кутових точках спадають. Збільшення довжини плити призводить

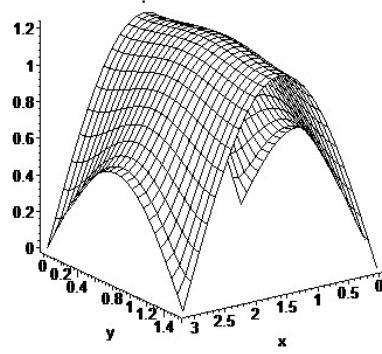


Рис. 1: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0, 4$; $B = \frac{\pi}{2}$.

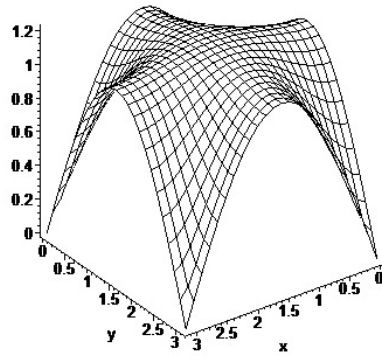


Рис. 2: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0, 2$; $B = \pi$.

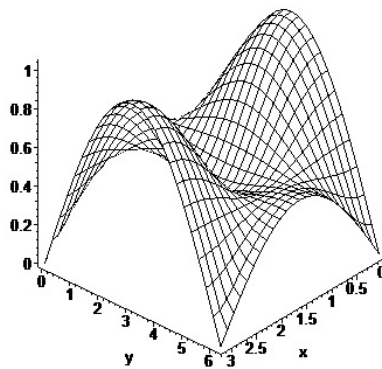


Рис. 3: Функція $\tilde{F}(x, y, 0)$ при $\nu = 0, 4$; $B = 2\pi$.

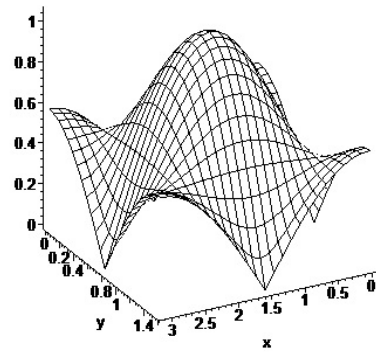


Рис. 4: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0,4$; $B = \frac{\pi}{2}$.

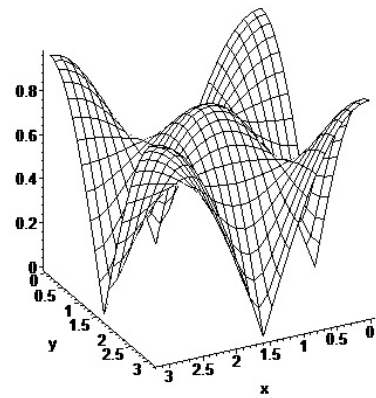


Рис. 5: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0,2$; $B = \pi$.

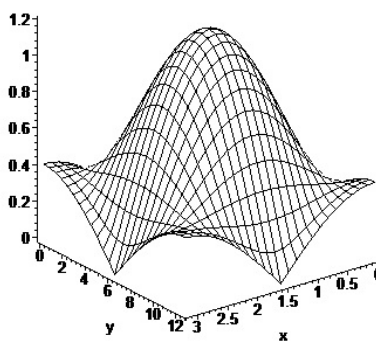


Рис. 6: Функція $\tilde{F}(x, y, h)$ при $\nu = 0,4$; $B = 4\pi$.

до збільшення значення локального максимуму функції потенційної енергії формозміни в середині нижньої межі.

В таблиці 1 представлені положення точок глобального максимуму функції енергії $\tilde{F}(x, y, z)$, а в таблиці 2 наведені значення глобального максимуму вказаної функції в екстремальних точках.

Таблиця 1. Положення глобального максимуму функції $\tilde{F}(x, y, z)$.

$\nu \setminus B$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π
0,2	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 0.08)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.24)$	$(0, \pi, 0.24)$	$(0, 2\pi, 0.24)$
0,3	$(\frac{\pi}{2}, 0, 0.31)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.39)$	$(0, \pi, 0.39)$	$(0, 2\pi, 0.31)$
0,4	$(\frac{\pi}{2}, 0, 0.39)$	$(0, \frac{\pi}{2}, 0.47)$	$(0, \pi, 0.47)$	$(0, 2\pi, \frac{\pi}{2})$

Таблиця 2. Значення глобального максимуму функції $\tilde{F}(x, y, z)$.

$\nu \setminus B$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π	6π
0,2	2,39	1,22	1,23	1,22	1,22
0,3	2,22	1,25	1,26	1,25	1,24
0,4	2,37	1,33	1,33	1,33	1,34

Як бачимо з таблиць, при збільшенні ширини плити B при незмінному коефіцієнті Пуассона максимальне значення функції потенційної енергії змінюється незначно. При збільшенні коефіцієнта Пуассона ν при незмінній ширині плити максимальне значення функції $\tilde{F}(x, y, z)$ змінюється немонотонно, а екстремальна точка може переміщуватися із середини плити в її межові точки.

ВИСНОВКИ.

У представленій роботі розглянута просторова задача деформації плити, яка є прямокутним паралелепіпедом, штампом синусоїдальної форми. Проведено пошук найбільш небезпечних в сенсі міцності областей плити згідно четвертої гіпотези міцності. У роботі досліджується вплив геометричних та механічних параметрів плити у формі прямокутного паралелепіпеда на положення локального максимуму функції потенційної енергії формозміни. У якості математичного апарату застосовується розклад функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди. В результаті чисельних досліджень виявлено, що максимум потенціальної енергії формозміни на верхній межі знаходиться або в центрі верхньої межі або на її межових точках, що знаходяться в середині бокових ребер (в залежності від лінійних параметрів плити та значення коефіцієнта Пуассона). При заданих граничних умовах на серединах ребер верхньої грані значення функції потенційної енергії формозміни пропорційні лінійним параметрам плити. На нижній межі плити локальні максимуми знаходяться в середній точці або в кутових точках плити, причому значення в всіх чотирьох кутових точках співпадають. Висота точки, в

якій знаходиться глобальний максимум, та саме значення максимуму функції енергії формозміни немонотонно залежить від лінійних розмірів плити і від коефіцієнту Пуассона. Розроблений математичний апарат дозволяє провести систематичний аналіз впливу форми штамп, розмірів плити та коефіцієнту Пуассона матеріалу плити на поведінку функції, яка описує потенційну енергію формозміни, що і планується зробити в подальшому.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kosmodamianskii A.S. Accumulation of Internal Energy in Multiply Connected Bodies / A.S. Kosmodamianskii // International applied mechanics. – 2002. – Vol. 38, No 4. – **8**. – P. 399-422.
2. Піскунов В.Г., Феодоренко Ю.М., Шевченко В.Ю. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності // К.: Вища школа. – 1994. – **9**. – 655 с.
3. Павлов В.С. Вдосконалення розрахунків на міцність в машинобудуванні. / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2012. – № 1. – С. 51-65.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. 7-е изд. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
5. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 490 с.
6. Угодчиков А.Г., Длугач М.И., Степанов А.Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. – Казань: Изд. Казанского ун-та, 1970. – 528 с.
7. Штефан Т.О., Величко О.В. Дослідження енергії формозміни в плиті, яка деформується штампом // Новітні матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – **1**. – С.45-51.

Стаття одержана: 12.06.2013; перероблений варіант: 10.11.2013;
прийнята: 29.11.2013.