Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н. Каразiна
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 517.977 № 1120, 2014, с.75–84

Стабилизация систем со степенной нелинейностью

М. О. Бебия
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
m.bebiya@karazin.ua

В работе рассматривается задача стабилизации для нелинейной неуправляемой по первому приближению системы $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\ldots$, $\dot{x}_{n-1} = x_{n-2}$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}$. Построение стабилизирующего управления проводится на основании метода функции Ляпунова, дается описание области притяжения.
Ключевые слова: нелинейная стабилизация, нелинейные системы, метод функции Ляпунова.

Бебiя М. О., **Стабiлiзацiя систем зi степеневою нелiнiйнiстю.** У роботi розглядається задача стабiлiзацiї для нелiнiйної некерованої за першим наближенням системи $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\ldots$, $\dot{x}_{n-1} = x_{n-2}$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}$. Побудова стабiлiзуючого керування проводиться на основi методу функцiї Ляпунова, наведено опис областi притягання.
Ключовi слова: нелiнiйна стабiлiзацiя, нелiнiйнi системи, метод функцiї Ляпунова.

M. O. Bebiya, **Stabilization of systems with power nonlinearity.** The stabilization problem for nonlinear uncontrollable with respect to the first approximation system $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\ldots$, $\dot{x}_{n-1} = x_{n-2}$, $\dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}$ is considered in this work. The construction of stabilizing control is based on Lyapunov function method, attraction domain is described.
Key words: nonlinear stabilization, nonlinear systems, Lyapunov function method.

2010 Mathematics Subject Classification 93D15.

1. Введение

Задача стабилизации нелинейных управляемых систем является одной из центральных задач теории управления. Вопросы стабилизации нелинейных систем по первому приближению являются достаточно хорошо изученными [1, 2]. Особый интерес представляют системы, нестабилизируемые по первому приближению [3]. Одними из основных методов исследования подобных задач являются метод замены фазовых координат [4, 5], позволяющий привести систему к одной из канонических форм, и метод построения стабилизирующего управления с применением функций Ляпунова [6, 7, 8, 9]. В данной статье решена задача стабилизации для одной нелинейной нестабилизируемой по первому приближению системы, названной в работе системой со степенной нелинейностью. Построение стабилизирующего управления проводится на основании метода функции Ляпунова, которую удаётся найти в виде квадратичной формы.

2. Основные результаты

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим управляемую систему со степенной нелинейностью

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_i = x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = x_{n-1}^{2k+1}, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Нелинейная система (1) является неуправляемой по первому приближению. Задача стабилизации для системы (1) заключается в построении управления $u(t,x)$ такого, что нулевая точка покоя этой системы будет асимптотически устойчива.

Управление, решающее задачу стабилизации для системы (1), будем искать в виде

$$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n + a_{n+1}x_{n-1}^{2k+1}, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$, $\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}$. Для получения условий на коэффициенты a_i, при которых управление (2) стабилизирует систему (1), воспользуемся методом функции Ляпунова, которую будем искать в виде квадратичной формы

$$V = (Fx, x), \tag{3}$$

где $F - (n \times n)$ – положительно определенная матрица.

Продифференцировав (3) в силу системы (1), получим

$$\dot{V} = ((A^*F + FA)x, x) + 2(F\widetilde{e}_n, x)x_{n-1}^{2k+1}, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{e}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$A^*F + FA = -W, \tag{6}$$

где $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – некоторая заданная действительная неотрицательно определенная симметрическая матрица, матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ имеет вид (5), $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – неизвестная матрица.

Замечание 1. *Уравнение (6) не может иметь положительно определенного решения F ни при какой заданной положительно определенной матрице W, поскольку матрица A является вырожденной, в отличие от хорошо изученного в теории устойчивости случая, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.*

Введем следующие обозначения $W_{n-1} = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$, $A_{n-1} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$, $F_{n-1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$. Тогда уравнение (6) распадается на матричное уравнение порядка (n-1) вида $A^*_{n-1}F_{n-1} + F_{n-1}A_{n-1} = -W_{n-1}$ и систему уравнений

$$\begin{cases} f_{11}a_n + f_{1n}a_1 + f_{2n} = -w_{1\,n} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_{1\,n-2}a_n + f_{1n}a_{n-2} + f_{n-1n} = -w_{n-2\,n} \\ f_{1\,n-1}a_n + f_{1n}a_{n-1} = -w_{n-1\,n} \\ 2a_n f_{1n} = -w_{nn}. \end{cases} \tag{7}$$

Сформулируем и докажем утверждения, позволяющие ответить на вопросы о разрешимости и нахождении решения уравнения (6) относительно матрицы F в классе положительно определенных матриц.

Лемма 1. *Пусть матрица W_{n-1} положительно определена, тогда матрица*

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n-1} & w_{1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{1n-1} & \cdots & w_{n-1n-1} & w_{n-1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} \\ w_{1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & w_{n-1n-1}\frac{a_n}{a_{n-1}} & w_{n-1n-1}\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

является неотрицательно определённой.

Доказательство. Обозначим через $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ миноры матрицы (8), образованные элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ и столбцов с номерами $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$. Покажем, что главные миноры матрицы (8) неотрицательны. Действительно,

$$M^{i_1,\ldots,i_k}_{i_1,\ldots,i_k} > 0, \;\; 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n-1\,,$$

поскольку матрица W_{n-1} положительно определена.

$$M^{i_1,\ldots,i_k,n-1,n}_{i_1,\ldots,i_k,n-1,n} = 0, \;\; 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n-2\,,$$

поскольку две последние строки и два последних столбца матрицы (8) линейно зависимы. При этом

$$M^{i_1,\ldots,i_k,n}_{i_1,\ldots,i_k,n} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} M^{i_1,\ldots,i_k,n-1}_{i_1,\ldots,i_k,n-1} > 0, \;\; 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n-2.$$

Тогда, согласно критерию неотрицательной определенности (см. [10]), матрица (8) будет неотрицательно определена. Лемма доказана.

Замечание 2. *Если матрица W_{n-1} является неотрицательно определенной, то матрица (8) также неотрицательно определена.*

Доказательство Замечания 2 повторяет доказательство Леммы 1 с заменой строгих неравенств на нестрогие.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет вид (5), матрица W_{n-1} положительно определена. Тогда для того, чтобы матричное уравнение (6) имело положительно определенное решение F при некоторой неотрицательно определенной матрице W, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы A_{n-1} имели отрицательные действительные части и при этом матрица W имела вид (8).*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть матрица W_{n-1} положительно определена, тогда для разрешимости уравнения

$$A^*_{n-1}F_{n-1} + F_{n-1}A_{n-1} = -W_{n-1} \tag{9}$$

относительно матрицы F_{n-1} в классе положительно определённых матриц необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы A_{n-1} имели отрицательные действительные части.

Из системы уравнений (7) и матричного уравнения (9) можно выделить следующую подсистему

$$\begin{cases} 2f_{1n-1}a_{n-1} = -w_{n-1n-1} \\ f_{1n-1}a_n + f_{1n}a_{n-1} = -w_{n-1n} \\ 2a_nf_{1n} = -w_{nn}. \end{cases}$$

Откуда получаем, что

$$f_{1n-1} = -\frac{w_{n-1n-1}}{2a_{n-1}},\ f_{1n} = -\frac{w_{nn}}{2a_n},\ w_{n-1n} = \frac{a_n}{2a_{n-1}}w_{n-1n-1} + \frac{a_{n-1}}{2a_n}w_{nn}. \tag{10}$$

Пусть $M^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$ – это миноры матрицы W из (6), образованные элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ и столбцов с номерами $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$. Тогда $M^{i_1,\dots,i_k}_{i_1,\dots,i_k} \ge 0,\ 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, поскольку матрица W неотрицательно определена.

Учитывая (10), получаем

$$M^{n-1n}_{n-1n} = w_{n-1n-1}w_{nn} - w^2_{n-1n} = -\left(\frac{a_n}{2a_{n-1}}w_{n-1n-1} - \frac{a_{n-1}}{2a_n}w_{nn}\right)^2 \ge 0. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) следует, что

$$w_{nn} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}w_{n-1n-1},\ w_{n-1n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}w_{n-1n-1}. \tag{12}$$

Рассмотрим следующие главные миноры третьего порядка

$$M_{i,n-1,n}^{i,n-1,n} = \begin{vmatrix} w_{ii} & w_{in-1} & w_{in} \\ w_{in-1} & w_{n-1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}} w_{n-1n-1} \\ w_{in} & \frac{a_n}{a_{n-1}} w_{n-1n-1} & \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} w_{n-1n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= -w_{n-1n-1}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} w_{in-1} - w_{in}\right)^2 \geq 0,\ i = \overline{1, n-2}\,, \tag{13}$$

поскольку матрица W неотрицательно определена. Тогда, учитывая что $w_{n-1n-1} > 0$, ввиду положительной определённости матрицы W_{n-1}, из (13) получаем

$$w_{in} = \frac{a_n}{a_{n-1}} w_{in-1},\ i = \overline{1, n-2}. \tag{14}$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть матрица W имеет вид (8), при этом матрица W_{n-1} положительно определена, а собственные значения матрицы A_{n-1} имеют отрицательные действительные части. Тогда матричное уравнение (9) имеет единственное положительно определенное решение $F_{n-1} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n-1}$.

Из (7) и (14) следует, что

$$f_{1n} = -\frac{a_n w_{n-1n-1}}{2a_{n-1}^2},\ f_{in} = -\frac{a_n}{a_{n-1}} w_{i-1n-1} - f_{1i-1} a_n - a_{i-1} f_{1n},\ i = \overline{2, n-1}. \tag{15}$$

При выборе $f_{in},\ i = \overline{1, n-1}$ из условия (15) предпоследнее уравнение из (7) также будет удовлетворено, что следует из доказательства необходимости. Таким образом, матрица

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n-1} & \cdots & f_{n-1n} \\ f_{1n} & \cdots & \xi \end{pmatrix} \tag{16}$$

является решением матричного уравнения (6) при любом ξ. Заметим, что при достаточно большом ξ матрица (16) будет положительно определена.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть матрица A имеет вид (5), матрица W_{n-1} положительно определена, матрица F_{n-1} является единственным положительно определенным решением уравнения (9). Тогда матрица*

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ f_{1n-1} & \cdots & f_{n-1n-1} & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1} & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{n-1n-1} & \xi \end{pmatrix} \tag{17}$$

при

$$\xi > \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1} \tag{18}$$

является положительно определенным решением уравнения (6) с правой частью вида (8).

Доказательство. При сделанных предположениях единственное положительно определенное решение уравнения (9) можно выписать в виде

$$F_{n-1} = \int\limits_0^\infty e^{A^*_{n-1}t} W_{n-1} e^{A_{n-1}t} dt \gg 0.$$

Из (10) и (12) следует, что $f_{1n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{1n-1}$.
Из (7), (9), (12) и (14) следует, что

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}(f_{1i}a_{n-1} + a_i f_{1n-1} + f_{i+1n-1}) = f_{1i}a_n + a_i f_{1n} + f_{i+1n},\ i = \overline{1, n-2}.$$

Откуда, с учетом вида f_{1n}, получаем

$$f_{i+1n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} f_{i+1n-1},\ i = \overline{1, n-2}.$$

Тогда матрица F из (16) приобретает вид (17). Определитель матрицы (17) имеет вид

$$\Delta(F) = \xi \cdot \Delta(F_{n-1}) - \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1} \cdot \Delta(F_{n-1}).$$

Тогда, учитывая положительную определенность матрицы F_{n-1}, получаем, что определитель $\Delta(F) > 0$ при $\xi > \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} f_{n-1n-1}$. Что доказывает положительную определенность матрицы (17) при выполнении условия (18).
Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть матрица $W_{\lambda_{min}}$ – квадратная матрица вида*

$$W_{\lambda_{min}} = \begin{pmatrix} \lambda_{min} & 0 & \cdots & 0 & b_1 x_{n-1}^k \\ 0 & \lambda_{min} & \cdots & 0 & b_2 x_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{min} & b_{n-2} x_{n-1}^k \\ b_1 x_{n-1}^k & b_2 x_{n-1}^k & \cdots & \cdots & 2b_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тогда при $n \geq 3$ определитель матрицы (19) равен

$$\Delta(W_{\lambda_{min}}) = 2\lambda_{min}^{n-2} b_{n-1} - \lambda_{min}^{n-3}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-2}^2) x_{n-1}^{2k}. \tag{20}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Проверим справедливость формулы (20) при $n = 3$. Действительно,

$$\Delta(W_{\lambda_{min}}) = \begin{vmatrix} \lambda_{min} & b_1 x_2^k \\ b_1 x_2^k & 2b_2 \end{vmatrix} = 2\lambda_{min} b_2 - b_1^2 x_2^{2k}.$$

Допустим формула (20) верна для $n = m$, докажем что она верна для $n = m+1$. Заметим, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 x_m^k \\ \lambda_{min} & 0 & \cdots & 0 & b_2 x_m^k \\ 0 & \lambda_{min} & \cdots & 0 & b_3 x_m^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{min} & b_{m-1} x_m^k \end{vmatrix} = (-1)^m \lambda_{min}^{m-2} b_1 x_m^k. \qquad (21)$$

Раскроем определитель матрицы $W_{\lambda_{min}}$ по первому столбцу. Тогда с учетом индуктивного предположения и (21) получим, что

$$\Delta(W_{\lambda_{min}}) = 2\lambda_{min}^{m-1} b_m - \lambda_{min}^{m-2}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{m-1}^2) x_m^{2k}.$$

Лемма доказана.

Вернемся к рассмотрению равенства (4). Возьмем произвольную матрицу W вида (8), удовлетворяющую условиям Леммы 1. Пусть матрица F является произвольным положительно определенным решением уравнения (6). Тогда равенство (4) примет вид

$$\dot{V} = -(Wx, x) + 2(F\widetilde{e}_n, x) x_{n-1}^{2k+1}. \qquad (22)$$

Обозначим $I_{n,2} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, 0)$ – матрица размерности $(n \times n)$. Пусть $\lambda_{min} > 0$ – минимальное собственное значение матрицы W_{n-1}, I_{n-1} – единичная матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$, $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда, поскольку матрица W_{n-1} положительно определена, будет верна следующая оценка

$$(W_{n-1} y, y) \geq (\lambda_{min} I_{n-1} y, y), \ \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Откуда следует, что $-((W_{n-1} - \lambda_{min} I_{n-1}) y, y) - \lambda_{min} x_{n-1}^2 \leq 0$.
Тогда с учетом Замечания 2 получаем, что

$$-((W - \lambda_{min} I_{n,2}) x, x) \leq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \qquad (23)$$

Обозначим $b = -F\widetilde{e}_n$, тогда

$$b_i = -(f_{1i} a_{n+1} + f_{in}), \ i = \overline{1, n}. \qquad (24)$$

Выберем a_{n+1} так, чтобы $b_n = 0$. Тогда

$$a_{n+1} = -\frac{f_{nn}}{f_{1n}}. \qquad (25)$$

Заметим, что из (10) следует, что f_{1n-1} и f_{1n} положительны при $a_{n-1}, \ a_n < 0$, тогда $a_{n+1} < 0$. При этом из (17) и (18) следует, что $b_{n-1} = f_{nn} \frac{a_{n-1}}{a_n} - f_{n-1n-1} \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0$.

Замечание 3. *При* $n = 2$ *из (22), (24) и (25) имеем, что*

$$\dot{V} = -(Wx, x) - 2b_1 x_1^{2k+2} < 0, \ \|x\| \neq 0;$$

и областью притяжения точки покоя системы (1) с управлением (2) является все пространство.

Из равенства (22) следует, что при $n \geq 3$

$$\dot{V} = -((W - \lambda_{min} I_{n,2})x, x) - (\lambda_{min} I_{n,2} x, x) + 2(F\widetilde{e}_n, x)x_{n-1}^{2k+1}. \qquad (26)$$

Учитывая (20), заметим, что матрица (19) положительно определена при $\lambda_{min} > 0$ и

$$x_{n-1}^{2k} < \lambda_{min} \frac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \cdots + b_{n-2}^2}. \qquad (27)$$

Из равенства (26) с учетом неравенства (23) получаем, что

$$\dot{V} = -((W - \lambda_{min} I_{n,2} x, x) - (W_{\lambda_{min}} \widehat{x}, \widehat{x}) < 0, \ \|x\| \neq 0, \qquad (28)$$

где матрица $W_{\lambda_{min}}$ имеет вид (19), b_i задаются в (24), $\lambda_{min} > 0$ – минимальное собственное значение матрицы W_{n-1} и $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^{k+1})$, $n \geq 3$.

Докажем справедливость неравенства (28). При выполнении условия (27), производная функции Ляпунова (28) представляет собой сумму двух неположительных слагаемых, которые не могут обращаться в нуль одновременно при $\|x\| \neq 0$. Действительно, пусть $(W_{\lambda_{min}} \widehat{x}, \widehat{x}) = 0$, тогда $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ и $-((W - \lambda_{min} I_{n,2})x, x) = -w_{n-1n-1} \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} x_n^2 < 0$, $x_n \neq 0$, поскольку $w_{n-1n-1} > 0$ в силу положительной определённости матрицы W_{n-1}. Тогда нулевая точка покоя системы (1) асимптотически устойчива.

Замечание 4. *Найдем* $c > 0$, *при котором эллипсоид* $(Fx, x) = c$ *будет вписан в полосу* $|x_{n-1}| < \rho^{\frac{1}{2k}}$, $\rho = \lambda_{min} \frac{2b_{n-1}}{b_1^2 + \cdots + b_{n-2}^2}$. *Тогда множество*

$$\Phi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \ (Fx, x) \leq c = \frac{\rho^{\frac{1}{k}}}{(F^{-1} e_{n-1}, e_{n-1})} \right\}, \qquad (29)$$

где e_{n-1}*– (n-1)-й столбец единичной матрицы, принадлежит области притяжения точки покоя системы (1) с управлением (2) при* $n \geq 3$.

На основании доказанных утверждений может быть сформулирована основная теорема, позволяющая решить задачу стабилизации для системы (1).

Теорема 3. *Пусть управление* $u(x)$ *имеет вид (2),* $a_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$ *такие, что собственные значения матрицы* A_{n-1} *имеют отрицательные действительные части,* W_{n-1}*– произвольная положительно определенная матрица, а матрица* F *является произвольным положительно определенным решением уравнения (6) с правой частью вида (8),* a_{n+1} *выбирается из условия (25). Тогда управление (2) решает задачу стабилизации для системы (1), при этом область притяжения точки покоя в случае* $n \geq 3$ *содержит множество (29) и совпадает со всем пространством при* $n = 2$.

3. Пример

Рассмотрим систему (1) при $n = 3$, $k = 2$

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2^5.$$

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -4$, $W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, тогда согласно Теореме 2 положительно определенное решение уравнения (6) при $f_{33} = 25$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 25 \end{pmatrix}$$

и в качестве функции Ляпунова можно взять квадратичную форму (3). Тогда согласно (2) и (25) стабилизирующее управление принимает вид

$$u(x) = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - \frac{25}{2}x_2^5.$$

При этом $\rho = 0.0323\ldots$ и область притяжения нулевой точки покоя будет содержать множество

$$\Phi = \left\{ \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3 + 3x_2^2 + 25x_3^2 \leq 0.24412\ldots \right\}.$$

В качестве начальной точки возьмем $x_0 = (0.1,\ 0.2,\ -0.1)^*$. В этом случае график $\|x(t)\|$ имеет вид рис. 1.

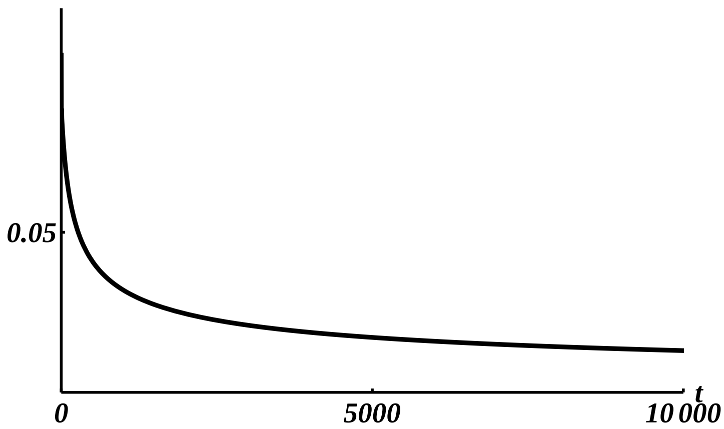

Рис. 1: График $\|x(t)\|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / М.: Наука, 1966. — с. 475-514.

2. Коробов В.И. Метод функции управляемости / М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. — 576 с.

3. Kawski M. Stabilization of nonlinear systems in the plane / SCL. — 1989. — 12. — P. 169-175.

4. Zuber I.E., Gelig A.Kh. Synthesis of robust stabilizing control for nonlinear systems / St-Peterburgs, ENOC—2008. — P. 4.

5. Khalil N.K. Nonlinear systems / Prentice Hall. New York, 2002. — 734 p.

6. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление / М.: Наука, 2002. — 273 с.

7. Wu Y., Zheng. X. Robust stabilization of uncertain nonholonomic systems with strong nonlinear drifts / J. Control Theory and Appl. — 2008. — Vol. 6. — No. 4, P. 427-430.

8. Jiang Z., Lin X., Wang Y. Stabilization of nonlinear time-varying systems : a control Lyapunov function approach / Jrl Syst Sci and Complexity — 2009. — Vol. 22. — No.4, P. 683-696.

9. Nguang S., Fu M. Global quadratic stabilization of a class of nonlinear systems / Int. J. Robust Nonlinear Control — 1998. — Vol. 8. — No.6, P. 483-497.

10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / М.: Наука, 1966. — 577 с.

Статья получена: 22.05.2014; окончательный вариант: 15.08.2014; принята: 25.08.2014.