Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.954 № 1120, 2014, с.64–74

Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое

А. А. Макаров, Д. А. Левкин

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
mak-family@yandex.ru
artur.lav@3g.ua

Рассматривается многоточечная краевая задача в полислое, выясняются условия корректности такой задачи, доказывается существование корректной задачи для любых уравнений указанного класса, а также выясняется какими псевдодифференциальными операторами можно возмущать данную задачу, чтобы она оставалась корректной.
Ключевые слова: теория псевдодифференциальных уравнений, краевая задача, метод преобразования Фурье.

Макаров О. А., Левкін Д. А., **Багатоточечна крайова задача для псевдодіференціальних рівнянь у полішарі.** Розглядається багатоточечна крайова задача в полішарі, з'ясовуються умови коректності такого завдання, доводиться існування коректної задачі для будь-яких рівнянь зазначеного класу, а також з'ясовується якими псевдодіференціальними операторами можна збурювати дану задачу, щоб вона залишалася коректною.
Ключові слова: теорія псевдодіференціальних рівнянь, крайова задача, метод перетворення Фур'є.

A.A. Makarov, D.A. Levkin, **Multipoint boundary value problem for pseudodifferential equations in multilayer.** Multipoint boundary value problem is considered in the multilayer, clarified conditions for the correctness of such a problem, we prove the existence of any well-posed problem for equations of this class, as well as what turns pseudodifferential operators can perturb the task to keep it correctly.
Keywords: theory of pseudo-differential equations, boundary value problem, the Fourier transform method.
2000 Mathematics Subject Classification 35S10.

Нелокальным краевым задачам для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в последнее время уделяется большое внимание. С одной стороны, это вызвано тем, что такие задачи возникают как математические модели реальных процессов, а с другой стороны — тем, что для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач в слое.

Подробный обзор таких работ представлен в монографии [1]. В работах [2]— [4] рассматривалась двухточечная краевая задача для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений и были получены условия корректности такой задачи в различных пространствах функций, а также факт существования корректной двухточечной задачи для любого дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В работе [5] эти результаты перенесены на бислой при дополнительном условии непрерывности решения на границе бислоя (условие трансмиссии).

В данной работе рассматривается многоточечная краевая задача в полислое и для нее доказывается теорема об условиях корректности (Теорема 1), кроме того доказывается теорема о существовании корректной краевой задачи (Теорема 2).

Определяется также понятие параболической краевой задачи (аналог понятия параболического по Шилову Г. Е. уравнения) и выясняется при каких условиях на символ оператора существует параболическая краевая задача (Теорема 4). Доказывается, что параболическую задачу можно возмущать подчиненными псевдодифференциальными операторами (Теорема 5).

Основная часть

Рассматриваются следующие краевые задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad x \in \mathbb{R}^m \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_n\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t), \quad t_{n-1} \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1}$$

$$B_0\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0) + B_1\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t_1) + \cdots + B_n\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x) \tag{2}$$

и задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad x \in \mathbb{R}^m \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_n\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \quad t_{n-1} \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{3}$$

$$B_0\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0)+B_1\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t_1)+\dots+B_n\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T)=0. \qquad (4)$$

Здесь $A_k\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ и $B_k\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ — псевдодифференциальные операторы с символами из пространства бесконечно дифференцируемых функций степенного роста $C^{\infty}_{-\infty}$, а решения $u(x,t)$ предполагаются непрерывными по t во всем слое и дифференцируемыми при $t \neq t_k$.

Рассмотрение будем вести в пространствах Соболева-Слободецкого (см. [6, с.12]) H^s_l, а также в их проективном пределе $S=\bigcap\limits_{s,l} H^s_l$ — пространстве Л. Шварца.

Понадобятся также пространства

$$C\left([0,T],\ H^s_l\right)=\left\{u(x,t): \quad \|u\|=\sup_{0\le t\le T}\|u\|^{(s)}_{(l)}<\infty\right\}.$$

Определение 1. Краевая задача (1), (2) называется корректно разрешимой из пространства $H^{s_1}_{l_1}$ в пространство $C\left([0;T],H^{s_2}_{l_2}\right)$, если для любой функции $\varphi(x)\in H^{s_1}_{l_1}$ существует единственное решение $u(x,t)\in C\left([0;T],H^{s_2}_{l_2}\right)$ такое, что выполняется оценка $\|u(x,t)\|\le C\,\|\varphi(x)\|$, где положительная константа C зависит только от чисел s_1, s_2, l_1, l_2.

Определение 2. Краевая задача (3), (4) называется корректно разрешимой из пространства $C\left([0;T],H^{s_1}_{l_1}\right)$ в пространство $C\left([0;T],H^{s_2}_{l_2}\right)$, если для любой функции $f(x,t)\in C\left([0;T],H^{s_1}_{l_1}\right)$ существует единственное решение $u(x,t)\in C\left([0;T],H^{s_2}_{l_2}\right)$ такое, что выполняется оценка $\|u(x,t)\|\le C\,\|f(x,t)\|$, где положительная константа C зависит только от чисел s_1, s_2, l_1, l_2.

Замечание. Приведенные определения означают, что разрешающий оператор является непрерывным в указанных пространствах. Если для любых s_1 и l_1 существуют s_2 и l_2 такие, что данные краевые задачи корректно разрешимы в указанных пространствах, то это означает корректную разрешимость в пространстве $C\left([0;T];\,S\right)$ (см. [6, с. 15]).

Напомним, что преобразование Фурье переводит пространство H^s_l в пространство H^l_s, пространство S — в себя, а мультипликаторы в пространстве S принадлежат пространству $C^{\infty}_{-\infty}$ (см. [6, с. 51]).

Подействуем преобразованием Фурье (по пространственным переменным) на уравнения (1) - (2). Получим двойственную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{u}(s,t)}{\partial t}=A_1\left(s\right)\widetilde{u}(s,t), \quad 0\le t\le t_1, \quad s\in\mathbb{R}^m \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial\widetilde{u}(s,t)}{\partial t}=A_n\left(s\right)\widetilde{u}(s,t), \quad t_{n-1}\le t\le T, \quad s\in\mathbb{R}^m \end{cases} \qquad (5)$$

$$B_0\,(s)\,\widetilde{u}(s,0) + B_1\,(s)\,\widetilde{u}(s,t_1) + \cdots + B_n\,(s)\,\widetilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi}(s). \qquad (6)$$

Аналогично действуя преобразованием Фурье на уравнения (3) - (4), получим двойственную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = A_1\,(s)\,\widetilde{u}(s,t) + \widetilde{f}(s,t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad s \in \mathbb{R}^m \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = A_n\,(s)\,\widetilde{u}(s,t) + \widetilde{f}(s,t), \quad t_{n-1} \le t \le T, \quad s \in \mathbb{R}^m \end{cases} \qquad (7)$$

$$B_0\,(s)\,\widetilde{u}(s,0) + B_1\,(s)\,\widetilde{u}(s,t_1) + \cdots + B_n\,(s)\,\widetilde{u}(s,T) = 0. \qquad (8)$$

Здесь

$$\widetilde{u}(s,t) = F_x\,u(x,t), \ \ \widetilde{f}(s,t) = F_x\,f(x,t), \ \ \widetilde{\varphi}(s) = F_x\,\varphi(x,t);$$

$A_k(s)$, $B_k(s)$ — символы соответствующих псевдодифференциальных операторов.

Будем искать решение задачи (5) - (6) в следующем виде

$$\widetilde{u}(s,t) = \begin{cases} \exp(t\,A_1(s))\varphi_1(s), & t \in [0,t_1] \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \exp((t - t_{n-1})A_n(s))\varphi_n(s), & t \in [t_{n-1},T] \end{cases}$$

Из условия непрерывности получим

$$\varphi_k(s) = \exp\left(t_1 A_1(s) + (t_2 - t_1)A_2(s) + \ \ldots \ + (t_{k-1} - t_{k-2})A_{k-1}(s)\right) \cdot \varphi_1(s).$$

Если подставить полученное решение в условие (6), то получим

$$\begin{gathered} (B_0(s) + B_1(s)\exp(t_1 A_1(s)) + \ldots + \\ +B_n(s)\exp\left(t_1 A_1(s) + (t_2 - t_1)A_2(s) + \ldots \ + (T - t_{n-1})A_n(s)\right)) \cdot \varphi_1 = \widetilde{\varphi}(s). \end{gathered}$$

Если функция

$$\begin{gathered} \Delta(s) = B_0\,(s) + B_1\,(s)\exp(t_1 A_1(s)) + \ldots + \\ +B_n\,(s)\exp\left(t_1 A_1(s) + (t_2 - t_1)A_2(s) + \ldots \ + (T - t_{n-1})A_n(s)\right) \ne 0, \end{gathered}$$

то $\varphi_1(s) = \widetilde{\varphi}(s)/\Delta(s)$, а решение краевой задачи имеет вид

$$\widetilde{u}(s,t) = Q(s,t)\,\widetilde{\varphi}(s),$$

где

$$Q(s,t) = \begin{cases} \exp(t\,A_1(s))\Big/\Delta(s)\ , & 0 \le t \le t_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \exp\left((t - t_{n-1})A_n(s) + \ldots + t_1 A_1(s)\right)\Big/\Delta(s)\ , & t_{n-1} \le t \le T \end{cases}$$

Эта функция называется *разрешающей функцией* задачи (5), (6).

Чтобы задача (1), (2) была корректно разрешимой из пространства S в пространство $C\left([0,T],S\right)$, необходимо и достаточно, чтобы задача (5), (6) была корректно разрешимой в тех же пространствах. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $Q(s,t)\in C_{-\infty}^{\infty} \quad \forall t\in[0,T]$ (см. [2]).

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Задача (1), (2) корректно разрешима из пространства S в пространство $C\left([0,T],S\right)$ тогда и только тогда, когда $Q(s,t)\in C_{-\infty}^{\infty}$ $\forall t\in[0,T]$, то есть*

$$\forall k\in\mathbb{N}^m \quad \exists p_k, \quad \exists C_k>0 \ : \quad \left|D^kQ(s,t)\right|\le C_k(1+|s|)^{p_k}.$$

Покажем, что для любого уравнения (1) существуют $B_k(s)\in C_{-\infty}^{\infty}$ такие, что задача (1), (2) корректно разрешима из пространства S в пространство $C\left([0,T],S\right)$.

Теорема 2. *Для любых $A_k(s)\in C_{-\infty}^{\infty}$* существуют $B_k(s)\in C_{-\infty}^{\infty}$ *такие, что краевая задача (1), (2) корректно разрешима из пространства S в пространство $C\left([0,T],S\right)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем

$$\begin{aligned}&B_0(s)=1, \qquad B_1(s)=\exp\left(-i\,t_1\operatorname{Im}A_1(s)\right), \quad \dots \quad, \\ &B_n(s)=\exp\left(-i\ \left(t_1\operatorname{Im}A_1(s)+(t_2-t_1)\operatorname{Im}A_2(s)+\ldots+(T-t_{n-1})\operatorname{Im}A_n(s)\right)\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Все эти функции принадлежат пространству $C_{-\infty}^{\infty}$, так как $|B_k(s)|=1$ $\forall s\in\mathbb{R}^m$, а дифференцированием по s получим $|D^pA_k(s)|\le C_{k,p}(1+|s|)^{p_k}$.

Тогда

$\Delta(s)=1+\exp(t_1\operatorname{Re}A_1(s))+\ldots+\exp\left(t_1\operatorname{Re}A_1(s)+\ldots+(T-t_{n-1})\operatorname{Re}A_n(s)\right)\ge 1.$

Оценим разрешающую функцию $Q(s,t)$.

При $t\in[0;t_1]$ $\qquad |Q(s,t)|=|\exp(tA_1(s))|\Big/\Delta(s)=|\exp(t\operatorname{Re}A_1(s))|\Big/\Delta(s)$.

Если $\operatorname{Re}A_1(s)<0$, то $|Q(s,t)|<\exp(t\,A_1(s))\le 1$.

Если $\operatorname{Re}A_1(s)\ge 0$, то $|Q(s,t)|<\exp((t-t_1)A_1(s))\le 1$.

Аналогично, при $t\in[t_{k-1};t_k]$

$$|Q(s,t)|=|\exp\left(t_1A_1(s)+\ldots+(t_{k-1}-t_{k-2})A_{k-1}(s)+(t-t_{k-1})A_k(s)\right)|\Big/\Delta(s)=$$
$$=\exp\left(t_1\operatorname{Re}A_1(s)+\ldots+(t-t_{k-1})\operatorname{Re}A_k(s)\right)\Big/\Delta(s)\,.$$

Если $\operatorname{Re}A_k(s)<0$, то

$$\begin{aligned}|Q(s,t)|&<\frac{\exp\left(t_1\operatorname{Re}A_1(s)+\ldots+(t-t_{k-1})\operatorname{Re}A_k(s)\right)}{\exp\left(t_1\operatorname{Re}A_1(s)+\ldots+(t_{k-1}-t_{k-2})\operatorname{Re}A_{k-1}(s)\right)}= \\ &=\exp((t-t_{k-1})\operatorname{Re}A_k(s))\le 1.\end{aligned} \tag{10}$$

Если $\operatorname{Re}A_k(s)\ge 0$, то

$$\begin{aligned}&|Q(s,t)|<\exp\left((t-t_{k-1})\operatorname{Re}A_k(s)-(t_k-t_{k-1})\operatorname{Re}A_k(s)\right)= \\ &=\exp((t-t_k)\operatorname{Re}A_k(s))\le 1.\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, мы доказали, что $|Q(s,t)| \le 1$ при $\forall s \in \mathbb{R}^m; \quad \forall t \in [0;T]$.

Оценим производные разрешающей функции.

При $t \in [t_{k-1}; t_k]$

$$\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s_j} =$$
$$= \left(t_1 \frac{\partial A_1(s)}{\partial s_j} + (t - t_{k-1}) \frac{\partial A_1(s)}{\partial s_j} \right) \cdot \exp(t_1 A_1(s) + \ldots + (t - t_{k-1}) A_k(s)) \Big/ \Delta(s) -$$
$$- \frac{\partial \Delta(s)}{\partial s_j} \cdot \exp\left(t_1 A_1(s) + \ldots + (t - t_{k-1}) A_k(s)\right) \Big/ \Delta^2(s) .$$

Так как первая скобка в первом слагаемом удовлетворяет степенной оценке, то и все первые слагаемые тоже удовлетворяют степенной оценке.

Оценим $\dfrac{\partial \Delta(s)}{\partial s_j} \Big/ \Delta(s)$.

Так как каждое слагаемое этой функции

$$\frac{\partial}{\partial s_j} \cdot \exp\left(t_1 \operatorname{Re} A_1(s) + \ldots + (t_k - t_{k-1}) \operatorname{Re} A_k(s)\right) \Big/ \Delta(s) =$$
$$= \left(t_1 \frac{\partial \operatorname{Re} A_1(s)}{\partial s_j} + (t_k - t_{k-1}) \frac{\partial \operatorname{Re} A_1(s)}{\partial s_j} \right) \cdot$$
$$\cdot \exp\left(t_1 \operatorname{Re} A_1(s) + \ldots + (t_k - t_{k-1}) \operatorname{Re} A_k(s)\right) \Big/ \Delta(s)$$

удовлетворяет степенной оценке, то все функции $\dfrac{\partial \Delta(s)}{\partial s_j} \Big/ \Delta(s)$ удовлетворяют степенной оценке, следовательно $Q(s,t) \in C_{-\infty}^{\infty}$.

Теорема доказана.

Замечание. Если вместо многоточечного условия (2) рассматривать двухточечное условие $B\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,0) + C\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,T) = \varphi(x)$, то данная краевая задача может быть некорректной при любых $B(s)$ и $C(s)$ из пространства $Q(s,t) \in C_{-\infty}^{\infty}$.

Контрпример. Рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le t \le 1, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 1 \le t \le 2 .$$

Так как $\Delta(s) = B(s) + C(s)\exp(s^2 - s^2) = B(s) + C(s)$, то

$$Q(s,t) = \begin{cases} \exp\left(ts^2\right) \Big/ \left(B(s) + C(s)\right), & t < 1, \\ \exp\left((2-t)s^2\right) \Big/ \left(B(s) + C(s)\right), & t > 1 \end{cases}$$

и при любых $B(s)$, $C(s) \in C_{-\infty}^{\infty}$ эта функция растет экспоненциально, то есть не может принадлежать пространству $C_{-\infty}^{\infty}$.

Определение 3. Задача (1), (2) называется *параболической*, если разрешающая функция удовлетворяет оценке

$$|Q(s,t)| \leq C \ \exp\left(-b\rho(t)|s|^h\right)$$

с некоторыми $b > 0$, $h > 0$. Здесь $\rho(t) = \min\limits_{0 \leq k \leq n} |t - t_k|$.

Выясним, при каких условиях на $A_k(s)$ существует параболическая краевая задача.

Теорема 3. *Если существуют положительные* c, b, h *такие, что* $|\operatorname{Re} A_k(s)| \geq b|s|^h - c$, $\forall s \in \mathbb{R}^m$, *то существуют параболические краевые задачи* (1), (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем те же $B_k(s)$ как и при доказательстве Теоремы 2, см. (9).

Из доказанных там неравенств (10), (11) следует, что при $t \in [t_{k-1}; t_k]$

$$|Q(s,t)| \leq \exp\left(-\rho(t) \operatorname{Re} A_k(s)\right).$$

Учитывая условия данной теоремы, получим

$$|Q(s,t)| \leq C_1 \ \exp\left(-\rho(t) \ b|s|^h\right).$$

Теорема доказана.

Замечание. Как и в работе [5], можно показать, что условие неограниченности $\operatorname{Re} A_k(s)$ является необходимым для параболичности краевой задачи.

Повторяя рассуждения работы [3], можно доказать, что решения параболической краевой задачи будут бесконечно дифференцируемыми по x при $\forall \varphi(x) \in L^{\,2}$, причем это условие является характеристическим для параболических задач.

Перейдем к рассмотрению краевой задачи для неоднородного уравнения (3), (4).

Определим понятие функции Грина для двойственной краевой задачи (7), (8).

Определение 4. Функция $G(t, \tau, s)$, определенная на множестве $[0,T] \times [0,T] \times R^m$, называется функцией Грина задачи (7), (8), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall \tau \in [0,T]$ удовлетворяет однородному уравнению (5);
2) $\forall \tau \in [0,T]$ удовлетворяет однородным краевым условиям (8);
3) $G(\tau + 0, \tau, s) - G(\tau - 0, \tau, s) = 1$.

Выясним, как связана функция Грина с разрешающей функцией $Q(s,t)$.
Лемма. *Если у задачи* (5), (6) *существует разрешающая функция* $Q(s,t)$ *то у задачи* (7), (8) *существует функция Грина, причем*

$$G(t,\tau,s)=\begin{cases} -\sum\limits_{k:\ \ t_k>\tau} B_k(s)Q(s,t-\tau+t_k), & t\le\tau \\ \sum\limits_{k:\ \ t_k\le\tau} B_k(s)Q(s,t-\tau+t_k), & t>\tau \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $Q(s,t)$ удовлетворяет уравнению (5), то условие 1) выполнено.

Проверим выполнение условия 2):

$$\sum_{k=0}^{n} B_k(s)\ G(t_k,\tau,s)=-\sum_{k:\ \ t_k\le\tau} B_k(s)\sum_{j:\ \ t_j>\tau} B_j\ Q(s,t_k+t_j-\tau)+$$

$$+\sum_{k:\ \ t_k>\tau} B_k(s)\sum_{j:\ \ t_j\le\tau} B_j\ Q(s,t_k+t_j-\tau)=0,$$

так как если во второй повторной сумме поменять порядок суммирования, то получим первую сумму.

Осталось проверить последнее условие:

$$G(\tau+0,\ \tau,s)-G(\tau-0,\ \tau,s)=$$
$$=\sum_{k:\ \ t_k\le\tau} B_k(s)Q(s,t_k)+\sum_{k:\ \ t_k>\tau} B_k(s)Q(s,t_k)=\sum_{k=0}^{n} B_k(s)Q(s,t_k)=1.$$

Лемма доказана.
Теорема 4. *Если корректно разрешима краевая задача* (1), (2) *из пространства* S *в пространство* $C([0;T];S)$, *то корректно разрешима задача* (3), (4) *в пространстве* $C([0;T];S)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия данной теоремы следует, в силу Теоремы 1, что функция $Q(s,t)\in C_{-\infty}^{\infty}\quad \forall t\in[0;T]$. Из леммы следует, что функция Грина $G(t,\tau,s)\in C_{-\infty}^{\infty}$.

А поскольку решение задачи (7), (8) имеет вид (см. [7, с. 41]):

$$\widetilde{u}(s,t)=\int_0^T G(t,\tau,s)\ \widetilde{f}(s,t)\ d\tau,$$

то подынтегральная функция $\forall\tau\in[0;T]$ принадлежит пространству $C([0;T];S)$, и после интегрирования по τ также принадлежит этому пространству.

Применив обратное преобразование Фурье по переменным s, получим решение задачи (1), (2)

$$u(x,t) = \int\limits_0^T K\left(\frac{\partial}{i\partial x},\ t,\ \tau\right) f(x,\tau)\ d\tau,$$

где $K\left(\frac{\partial}{i\partial x},\ t,\ \tau\right)$ — псевдодифференциальный оператор с символом $G(t,\tau,s)$, и это решение принадлежит пространству $C([0;T];S)$.
Теорема доказана.

Покажем, что параболическую краевую задачу можно возмущать подчиненным псевдодифференциальным оператором. Для этого нам понадобится теорема работы [3] Макарова А. А.

Теорема A. *Пусть функция Грина двойственной краевой задачи* (7), (8) *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^T \sup_s (1+|s|)^m |G(t,\tau,s)|\ d\tau \le C.$$

Тогда, если символ псевдодифференциального оператора $R(s,t,x) \in S^m$, *то есть удовлетворяет неравенствам* $\left|D_s^\alpha D_x^\beta R(s,t,x)\right| \le C_{\alpha\beta}(1+|s|)^m$ (см. [6, гл. V]), *то краевая задача для возмущенного уравнения*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,t) + \varepsilon R\left(\frac{\partial}{i\partial x},\ t,\ x\right) u(x,t) + f(x,t)$$

с однородным краевым условием будет корректно разрешима из пространства $C\left([0;T];H^s\right)$ *в пространство* $C\left([0;T];H^{s-q}\right)$ *с некоторым* q *при достаточно малых по модулю* ε.

Теорема 5. *Если краевая задача* (1), (2) *параболическая, т.е. разрешающая функция* $|Q(s,t)| \le C\exp\left(-b\rho(t)|s|^h\right)$, *то краевая задача для возмущенного уравнения*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_k\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,t) + \varepsilon R\left(\frac{\partial}{i\partial x},\ t,\ x\right) u(x,t) + f(x,t),$$

$$t_{k-1} \le t \le t_k, \quad k = 1,n$$

с однородными краевыми условиями корректно разрешима из пространства $C\left([0;T];H^s\right)$ *в пространство* $C\left([0;T];H^{s-q}\right)$ *при* $R(t,x,s) \in S^m$, *где* $m < h$, $|\varepsilon| < \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий Теоремы A.
Как следует из вида функции $G(t,\tau,s)$ и оценки на $Q(s,t)$

$$|G(t,\tau,s)| \le \sum_{k=0}^n |B_k(s)\ Q(s,t-\tau+t_k)| \le C\exp\left(-b\rho\left(|t-\tau|\right)\ |s|^h\right).$$

Мы воспользовались тем, что в однородном краевом условии (8) можно считать $|B_k(s)| \leq 1, \quad \forall k = 0, n$. Тогда

$$\sup_s (1+|s|)^m |G(s,t,\tau)| \leq$$
$$\leq \sup_{|s|} C(1+|s|)^m \exp\left(-b\rho\left(|t-\tau|\right)\cdot|s|^h\right) \leq C_1\rho(|t-\tau|)^{-\frac{m}{n}}.$$

Так как $\dfrac{m}{n} < 1$, то $\int\limits_0^T \rho(|t-\tau|)^{-\frac{m}{n}} d\tau$ сходится, а значит, условие Теоремы A выполнено.

Теорема доказана.

В работе [3] показано, что условие параболичности является необходимым для того, чтобы краевая двухточечная задача была корректной для возмущенного псевдодифференциального уравнения.

Полученную теорему можно рассматривать как обобщение на краевую задачу результатов работы [8], относящихся к задаче Коши для псевдодифференциальных уравнений.

В заключение приведем пример параболической многоточечной краевой задачи.

Если для уравнений из контрпримера взять краевое условие

$$u(x,0) + u(x,1) + u(x,2) = \varphi(x),$$

то разрешающая функция

$$Q(s,t) = \begin{cases} \exp\left(ts^2\right)\Big/\left(2+\exp s^2\right), & 0 \leq t < 1, \\ \exp\left((2-t)\ s^2\right)\Big/\left(2+\exp s^2\right), & 1 < t \leq 2\ . \end{cases}$$

Для этой функции выполнено условие параболичности

$$Q(s,t) \leq \exp\left(-\rho(t)s^2\right),$$

где $\rho(t) = \min\left\{t,\ |t-1|,\ 2-t\right\}$.

Значит, выполнены условия Теоремы 5, и данную краевую задачу можно возмущать любым псевдодифференциальным оператором первого порядка с достаточно малыми коэффициентами, например,

$R\left(t, x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\ u(t,x) = \cos x \cdot \dfrac{\partial u(x+a,\ t)}{\partial x}$.

Таким образом, краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\ \cos x\ \dfrac{\partial u(x+a,\ t)}{\partial x} + f(x,t)\ , & 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\ \cos x\ \dfrac{\partial u(x+a,\ t)}{\partial x} + f(x,t)\ , & 1 < t \leq 2 \\ u(x,0) + u(x,1) + u(x,2) = 0 \end{cases}$$

корректно разрешима из пространства $C\,([0,T],\ H^{\,s})$ в пространство $C\,([0,T],\ H^{\,s\,-\,q})$ при достаточно малых по модулю ε.

Заключение

Если трактовать рассмотренную нами задачу в полислое как многоточечную краевую задачу для псевдодифференциальных уравнений с кусочно-постоянными по t символами, то это позволяет надеяться получить аналогичные результаты для псевдодифференциальных уравнений с переменными по t символами с интегральным краевым условием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. / Пташник Б.Й., Ількив В.С., Кмить І.Я., Поліщук В.М. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.

2. Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений. / Дифференциальные уравнения, – 1994. – Т. 30. – № 1. – С. 144 – 150.

3. Макаров А.А. Параболические краевые задачи для систем псевдодифференциальных уравнений в бесконечном слое. / Дифференциальные уравнения, – 1996. – Т. 32. – № 5. – С. 636 – 642.

4. Фардигола Л.В. О нелокальной двухточечной краевой задаче в слое для уравнений с переменными коэффициентами. / Сибирский матем. журн., – 1997. – Т. 38. – № 2. – С. 424 – 438.

5. Макаров А.А. Краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений в бислое. / Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка" , – 2000. – № 475. – Вип. 49. – С. 259 – 265.

6. Волевич Л.Р. Обобщенные функции и уравнения в свертках. / Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. – М. : Наука, 1994. – 336 с.

7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, – 1961. – 528 с.

8. Макаров А.А., Левкин Д.А. Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов. / Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка" , – 2011. – № 990. – Вип. 64. – С. 42 – 47.

Статья получена: 20.02.2014; окончательный вариант: 21.05.2014; принята: 28.05.2014.