Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 89, 2019, с. 33–58

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 89, 2019, p. 33–58
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-04

УДК 512.64

Блочная форма сингулярного пучка операторов и метод ее получения

М.С. Филипковская

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
Харьков, пл. Свободы 4, 61022, Украина
Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина
НАН Украины, Харьков, пр. Науки 47,61103, Украина
filipkovskaya@ilt.kharkov.ua

Описана блочная форма сингулярного пучка операторов, состоящая из сингулярного и регулярного блоков, где выделены нулевые и обратимые блоки. Показаны метод получения блочной формы сингулярного пучка и соответствующих прямых разложений пространств, а также способы построения проекторов на подпространства из прямых разложений. Проекторы позволяют найти вид блоков. Даны примеры блочных представлений сингулярных пучков для различных случаев.
Ключевые слова: пучок операторов; пучок матриц; сингулярный; регулярный блок; блочная форма; структура.

Філіпковська М.С. **Блокова форма сингулярного жмутка операторів і метод її отримання.** Описано блокову форму сингулярного жмутка операторів, що складається з сингулярного і регулярного блоків, де виділено оборотні та нульові блоки. Показано метод отримання блокової форми сингулярного жмутка та відповідних прямих розкладань просторів, а також способи побудови проекторів на підпростори з прямих розкладань. Проектори дозволяють знайти вигляд блоків. Надано приклади блокових зображень сингулярних жмутків для різних випадків.
Ключові слова: жмуток операторів; жмуток матриць; сингулярний; регулярний блок; блокова форма; структура.

M.S. Filipkovska. **A block form of a singular pencil of operators and a method of obtaining it.** A block form of a singular operator pencil, which consists of singular and regular blocks, where invertible blocks and zero blocks are separated out, is described. A method of obtaining the block form of a singular pencil and the corresponding direct decompositions of spaces, and also methods for the construction of projectors onto subspaces from the direct decompositions, are shown. The projectors enable one to obtain the form of the blocks. Examples of the block representations of singular pencils are given for various cases.
Keywords: operator pencil; matrix pencil; singular; regular block; block form; structure.
2010 Mathematics Subject Classification 47A05, 15A22, 47N20.

1. Введение

Рассмотрим пару линейных операторов A, B, образующих пучок $\lambda A + B$. Пучок операторов может быть регулярным или сингулярным (см. определения ниже). Сингулярный пучок может содержать блок (компоненту), являющийся регулярным пучком. При решении различных задач возникает необходимость привести пучок операторов, т.е. одновременно привести два оператора, к некоторой специальной форме. В [1] описано приведение сингулярного пучка вещественных матриц к каноническому квазидиагональному виду, который обычно называют канонической формой Вейерштрасса-Кронекера. В разделе 3 статьи описано приведение сингулярного пучка операторов к блочной форме, состоящей из сингулярного и регулярного блоков, где выделены нулевые блоки, а также блоки, которые являются обратимыми операторами. В разделе 4 даны примеры блочных представлений для сингулярных пучков различных типов.

Основная трудность при получение блочной формы заключается в том, чтобы найти прямые разложения пространств, относительно которых сингулярный пучок будет иметь требуемый вид, и построить проекторы, которые позволят найти вид блоков этой формы. Заметим, что прямые разложения пространств, приводящие пучок к требуемой блочной форме, порождают соответствующие проекторы, и обратное утверждение также верно. В разделе 3 подробно описаны методы построения этих разложений пространств и проекторов. Представленная в статье блочная форма (блочная структура) сингулярного пучка была кратко описана в [2] (для вещественных операторов) и использовалась в качестве вспомогательного результата. В отличие от работы [2], в настоящей работе особое внимание уделено методу нахождения блочной структуры, а также способам построения проекторов. Подробно рассмотрены случай $rk(\lambda A + B) = n < m$ и общий случай $rk(\lambda A + B) < n, m$ (см. раздел 3), приведены необходимые пояснения и обоснования. Доказана теорема 1 и приведены примеры нахождения блочных структур операторов для сингулярных пучков различных типов. Блочная структура пучка и проекторы, позволяющие выделить требуемый блок, применяются в [2] для сведения сингулярного полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения (дифференциально-операторного уравнения) к эквивалентной системе из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений (см. раздел 5). Это нужно, чтобы доказать теоремы об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу сингулярного полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения [2].

В [9] приводилось разложение сингулярного пучка на регулярную и чисто сингулярную компоненты, аналогичное (2), в комплексных банаховых пространствах. Однако было замечено, что это разложение, названное RS-расщеплением пучка, может не иметь места в бесконечномерных пространствах. Также в [9] были рассмотрены блочные представления сингулярной компоненты пучка для двух частных случаев, которые в терминах настоящей работы соответствуют случаям, когда $rk(\lambda A + B) = m < n$ и $rk(\lambda A + B) = n < m$, и блочным представлениям (9) и (15) для них. Существование этих блочных представлений в бесконечномерных пространствах также являлось предположением. Поскольку блочные представления (соответствующие разложению пучка на регулярную и сингулярную компоненты и разложениям сингулярной компоненты в двух указанных случаях) аналогичны, в настоящей статье используются обозначения, введенные в [9] для подпространств из прямых разложений и проекторов, соответствующих этим блочным представлениям.

В статье будут использоваться следующие обозначения: E_X — единичный (тождественный) оператор в пространстве X; A^{-1} — обратный оператор к A (см. определение, например, в [3, с. 20]); $\mathcal{A}^{(-1)}$ — полуобратный оператор к $\mathcal{A}$ (см. определение в [6, с. 331]); $rk(A)$ — ранг оператора (матрицы) A; $Ker(A)$ — ядро (нуль-пространство) оператора A; $\mathcal{R}(A)$ — область значений (образ) оператора A; $L(X,Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y; $L(X,X) = L(X)$; δ_{ij} — символ Кронекера; X' — пространство, сопряженное к X; A^T — транспонированный оператор (матрица), т.е. сопряженный оператор, которому соответствует транспонированная матрица; A^* — эрмитово-сопряженный оператор (матрица), т.е. сопряженный оператор, которому соответствует эрмитово-сопряженная матрица.

В статье будут использоваться следующие классические определения. Пространство X распадается в прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$ подпространств $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$, если $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ и $X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = X$. Это определение эквивалентно следующему: $X = X_1 \dot{+} X_2$, если каждый вектор $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

2. Предварительные сведения

Пусть A, B — линейные операторы, отображающие $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Рассмотрим пучок операторов $\lambda A + B$, где λ — комплексный параметр.

Рангом пучка матриц $\lambda A + B$ называется наибольший из порядков миноров пучка, не равных тождественно нулю (см. [1, с. 321] или [1, с. 137]), т.е. если ранг пучка равен r, то матрица $\lambda A + B$ имеет минор порядка r, который при некотором λ_0 не равен нулю, а миноры порядка большего, чем r, либо тождественно равны нулю, либо не существуют. Очевидно, ранг пучка матриц $\lambda A + B$ равен максимальному количеству линейно независимых столбцов (или строк) пучка, т.е. максимальному количеству столбцов (или строк) пучка, которые при некотором λ_0 являются линейно независимым набором векторов. Ясно, что *ранг пучка операторов* $\lambda A + B$ и ранг соответствующего пучка матриц совпадают.

Определение 1 *Пучок* $\lambda A + B$ *называется* регулярным*, если* $n = m = rk(\lambda A + B)$ *(или* $n = m$ *и* $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$ [1, с. 319]*), в остальных случаях, т.е. при* $n \neq m$ *или* $n = m$ *и* $rk(\lambda A + B) < n$*, пучок называется* сингулярным *или* нерегулярным.

Это определение эквивалентно следующему. Пучок операторов $\lambda A+B\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ является *регулярным*, если множество его регулярных точек $\rho(A,B)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid (\lambda A+B)^{-1}\in L(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^n)\}$ не пусто, и *сингулярным*, если $\rho(A,B)=\emptyset$.

Если $\lambda A+B$ — пучок операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, то в случае необходимости вещественные операторы A, B заменяются на их комплексные расширения $\hat{A}$, $\hat{B}$, действующие из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Здесь комплексное пространство $\mathbb{C}^k$, состоящее из всех пар (x,y), $x,y\in\mathbb{R}^k$, записываемых в виде $(x,y)=x+iy$, является комплексификацией вещественного пространства $\mathbb{R}^k$ $(k=n,m)$. Матрицы операторов A, B относительно некоторых базисов в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ совпадают с матрицами их комплексных расширений $\hat{A}$, $\hat{B}$ относительно тех же базисов в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ и $\hat{A}(x+iy)=A(x+iy)$, $\hat{B}(x+iy)=B(x+iy)$. Очевидно, ранги пучка $\lambda A+B$ и его комплексного расширения $\lambda\hat{A}+\hat{B}$ также совпадают.

Для вещественных операторов определение 1 эквивалентно следующему. Пучок $\lambda A+B$ операторов A, $B\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является *регулярным*, если множество регулярных точек $\rho(\hat{A},\hat{B})$ его комплексного расширения $\lambda\hat{A}+\hat{B}\in L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$ не пусто, и *сингулярным*, если $\rho(\hat{A},\hat{B})=\emptyset$. Ясно, что для регулярных точек λ существует резольвента $(\lambda A+B)^{-1}$. Эти точки называются регулярными точками пучка $\lambda A+B$.

3. Нахождение блочной структуры сингулярного пучка операторов и построение соответствующих прямых разложений пространств и проекторов

В этом разделе рассматриваются линейные операторы A, $B\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Однако вместо вещественных операторов можно рассматривать комплексные, т.е. A, $B\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$. Тогда при получении блочной структуры пучка операторов нужно учесть замечание 1.

Всегда можно выбрать базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ так, чтобы сингулярный пучок операторов ($m\times n$-матриц) имел квазидиагональный вид, состоящий из сингулярного и регулярного блоков [1]. Следовательно, существуют разложения пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ в прямые суммы подпространств

$$\mathbb{R}^n = X_s\dot{+}X_r,\quad \mathbb{R}^m = Y_s\dot{+}Y_r, \tag{1}$$

относительно которых сингулярный пучок $\lambda A+B$ операторов A, $B\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ принимает блочный вид

$$\lambda A+B=\begin{pmatrix}\lambda A_s+B_s & 0\\ 0 & \lambda A_r+B_r\end{pmatrix},\quad A_s,\, B_s\colon X_s\to Y_s,\quad A_r,\, B_r\colon X_r\to Y_r, \tag{2}$$

где сингулярный блок λA_s+B_s является чисто сингулярным пучком (т.е. в нем нельзя выделить регулярный блок), регулярный блок λA_r+B_r является регулярным пучком, A, $B\colon X_s\to Y_s$ и A, $B\colon X_r\to Y_r$. Прямые разложения пространств (т.е. разложения пространств в прямые суммы подпространств)

(1) порождают две пары взаимно дополнительных проекторов (см. определение в [3, с. 22])

$$S\colon \mathbb{R}^n \to X_s,\ P\colon \mathbb{R}^n \to X_r, \quad F\colon \mathbb{R}^m \to Y_s,\ Q\colon \mathbb{R}^m \to Y_r, \tag{3}$$

т.е. $S^2 = S$, $P^2 = P$, $F^2 = F$, $Q^2 = Q$, $E_{\mathbb{R}^n} = S+P$, $E_{\mathbb{R}^m} = F+Q$, $SP = PS = 0$, $FQ = QF = 0$, причем проекторы таковы, что

$$FA = AS, \quad FB = BS, \qquad QA = AP, \quad QB = BP, \tag{4}$$

т.е. пара сингулярных подпространств X_s, Y_s и пара регулярных подпространств X_r, Y_r *инвариантны* относительно операторов A, B (A, $B\colon X_s \to Y_s$ и A, $B\colon X_r \to Y_r$). Таким образом, операторы A и B *приводятся* (разлагаются) *парами* (X_s, X_r), (Y_s, Y_r) (по аналогии с понятием приводимости из [4, п. 40]) *или прямыми разложениями* (1) (по аналогии с [5, п. 3]) и являются прямыми суммами операторов A_s, A_r и B_s, B_r:

$$A = \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_r \end{pmatrix} \colon X_s \dot{+} X_r \to Y_s \dot{+} Y_r, \quad B = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix} \colon X_s \dot{+} X_r \to Y_s \dot{+} Y_r. \tag{5}$$

Заметим, что верно и обратное утверждение: две пары взаимно дополнительных проекторов (3) (удовлетворяющих (4)) порождают прямые разложения пространств (1) (такие, что операторы A, B приводятся парами (X_s, X_r), (Y_s, Y_r)). Операторы из блочных представлений (5) имеют вид $A_s = A|_{X_s}$, $A_r = A|_{X_r}$, $B_s = B|_{X_s}$, $B_r = B|_{X_r}$. Введем их расширения (продолжения) на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\mathcal{A}_s = FA, \quad \mathcal{A}_r = QA, \quad \mathcal{B}_s = FB, \quad \mathcal{B}_r = QB. \tag{6}$$

Тогда

$$A_s = \mathcal{A}_s|_{X_s}, \quad A_r = \mathcal{A}_r|_{X_r}, \quad B_s = \mathcal{B}_s|_{X_s}, \quad B_r = \mathcal{B}_r|_{X_r} \tag{7}$$

и операторы (6) $\mathcal{A}_s, \mathcal{B}_s, \mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ действуют так, что $\mathcal{A}_s, \mathcal{B}_s \colon X_s \to Y_s$, $\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r\colon X_r \to Y_r$ и $X_r \subset Ker(\mathcal{A}_s)$, $X_r \subset Ker(\mathcal{B}_s)$, $X_s \subset Ker(\mathcal{A}_r)$, $X_s \subset Ker(\mathcal{B}_r)$. Способы построения подпространств из разложений (1) и соответствующих проекторов описаны ниже.

Рассмотрим ядро (нуль-пространство) $Ker(\lambda A + B) = \{x(\lambda) \mid (\lambda A + B)\, x(\lambda) \equiv 0\}$ и область значений (образ) $\mathcal{R}(\lambda A+B) = \{y(\lambda) \mid \exists\, x : (\lambda A+B)\, x = y(\lambda)\}$ пучка $\lambda A + B$. Размерности ядра и области значений пучка $\lambda A + B$ равны соответственно размерностям ядра и области значений комплексного расширения $\lambda \hat{A} + \hat{B}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое фиксированное число. Поскольку $\dim Ker(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = \dim \mathbb{C}^n - \dim \mathcal{R}(\lambda \hat{A} + \hat{B}) = n - rk(\lambda \hat{A} + \hat{B})$, то $\dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. Ранг $rk(\lambda A + B)$ по определению есть постоянное число, следовательно, $\dim Ker(\lambda A+B) = n - rk(\lambda A+B)$ — также постоянное число.

В случае, когда $rk(\lambda A+B) = m < n$, существует разложение сингулярного пространства

$$X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \tag{8}$$

в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} & B_{und} \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s, \tag{9}$$

где оператор $A_{gen}\colon X_{s_1} \to Y_s$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$ (если $X_{s_1} \neq 0$), и $B_{gen}\colon X_{s_1} \to Y_s$, $B_{und}\colon X_{s_2} \to Y_s$. Прямое разложение (8) пространства $X_s = S\,\mathbb{R}^n$ порождает пару взаимно дополнительных проекторов (мы расширяем эти проекторы на $\mathbb{R}^n$) $S_i\colon \mathbb{R}^n \to X_{s_i}$, $i = 1, 2$, $S_1 + S_2 = S$, $S_i S_j = \delta_{ij} S_i$, таких, что $AS_2 = 0$. Введем операторы

$$\mathcal{A}_{gen} = AS_1, \quad \mathcal{B}_{gen} = BS_1, \quad \mathcal{B}_{und} = BS_2, \tag{10}$$

$\mathcal{A}_{gen}$, $\mathcal{B}_{gen}$, $\mathcal{B}_{und} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $AS_1 = FA$). Тогда

$$A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}}, \quad B_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \tag{11}$$

и операторы (10) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen}\colon X_{s_1} \to Y_s$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen}\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen} X_{s_1} = Y_s$), $\mathcal{B}_{gen}\colon X_{s_1} \to Y_s$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{und}\colon X_{s_2} \to Y_s$ и $X_{s_1} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und})$. Для построения сингулярных подпространств X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2} найдем максимальное количество линейно независимых решений $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda), \ldots,$ $x_N(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A + B)x = 0. \tag{12}$$

Достаточно рассмотреть решения, являющиеся многочленами от λ:

$$x_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{k_j} (-1)^i \lambda^i x_{ji}, \quad j = \overline{1, N},\ x_{ji} \neq 0,\ i = \overline{0, k_j}, \tag{13}$$

где $k_j \geq 0$ — степень $x_j(\lambda)$. Ясно, что столбцы $x_1(\lambda), \ldots,$ $x_N(\lambda)$ являются линейно независимыми, если ранг матрицы, составленной из этих столбцов, равен N. Поскольку набор столбцов $\{x_1(\lambda), \ldots, x_N(\lambda)\}$ образует базис $Ker(\lambda A + B)$, то $N = \dim Ker(\lambda A + B) = n - rk(\lambda A + B)$. Подставляя $x_j(\lambda)$ в (12) и приравнивая коэффициенты при λ к нулю, получаем набор равенств [1, с. 322]

$$Bx_{j0} = 0,\ Bx_{j1} = Ax_{j0},\ \ldots\ ,\ Bx_{jk_j} = Ax_{jk_j-1},\ Ax_{jk_j} = 0.$$

Очевидно, если $k_j = 0$, т.е. $x_j(\lambda) \equiv x_{j0}$ — постоянное решение, то $Bx_{j0} = 0$ и $Ax_{j0} = Ax_{jk_j} = 0$. Среди всех решений уравнения (12) можно выбрать набор линейно независимых решений $\{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ с наименьшими возможными степенями k_1, k_2, …, k_N (этот набор не определяется однозначно, но любые два таких набора решений имеют одинаковые наборы степеней с точностью до перестановок; очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{N} k_j \leq m$, $\sum\limits_{j=1}^{N} k_j + N \leq n$, и можно выбрать набор так, чтобы $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_N$). Тогда системы векторов $\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1, i=0}^{N, k_j}$,

$\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j} = \{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$ линейно независимы и являются базисами пространств $X_s = Lin\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $Y_s = Lin\{B\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j} = Lin\{A\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$. Если все $k_j = 0$ $(j = \overline{1,N})$, то $Y_s = \{0\}$, $X_{s_2} = X_s$, $X_{s_1} = \{0\}$ и $A_s = 0$, $B_s = 0$, а блочная структура пучка имеет вид $\lambda A + B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}$ (столбцы сингулярного пучка матриц, приведенного к каноническому квазидиагональному виду [1, с. 327–328], также состоят из нулей, если соответствующие новые базисные векторы совпадают с постоянными решениями уравнения (12)). Заметим, что если взять произвольный максимальный набор линейно независимых решений $\{x_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ уравнения (12), то линейные оболочки систем $\{x_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $\{Bx_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j}$ также образуют пространства X_s, Y_s соответственно, однако эти системы могут содержать линейно зависимые векторы (т.е. из систем $\{x_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j}$, $\{Bx_{ji}\}_{j=1,i=1}^{N,k_j}$ всегда можно выбрать подсистемы, которые являются базисами X_s, Y_s соответственно). Далее, можно выбрать базисы для подпространств X_{s_1}, X_{s_2} и, соответственно, для X_s, Y_s (возможно, нужно будет изменить базисы в X_s, Y_s) так, чтобы относительно прямого разложение (8) операторы A_s, B_s имели блочную структуру (9). Ясно, что $X_{s_2} = Ker(A_s)$ и X_{s_1} является прямым дополнением к X_{s_2} ($\dim X_{s_1} = rk(A_s) = rk(\mathcal{A}_s)$). Для набора линейно независимых решений $\{\hat{x}_j(\lambda)\}_{j=1}^N$ (с наименьшими возможными степенями) эти подпространства имеют вид $X_{s_2} = Lin\{\hat{x}_{jk_j}\}_{j=1}^N$, $X_{s_1} = Lin\{\hat{x}_{ji}\}_{j=1,i=0}^{N,k_j-1}$ (следовательно, $\dim X_{s_2} = N$, $\dim X_{s_1} = \sum\limits_{j=1}^{N} k_j$). Также, используя вид полученных пространств X_s, Y_s, можно построить регулярные пространства X_r, Y_r из прямых разложений (1). Вид полученных пространств X_s, Y_s, X_r, Y_r, X_{s_1}, X_{s_2} используется для построения соответствующих проекторов с указанными выше свойствами.

В случае, если $rk(\lambda A + B) = n < m$, существует разложение сингулярного пространства

$$Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \tag{14}$$

в прямую сумму подпространств таких, что

$$A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} \\ 0 \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} \\ B_{ov} \end{pmatrix} : X_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \tag{15}$$

где оператор $A_{gen} \colon X_s \to Y_{s_1}$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$ (если $X_s \neq \{0\}$), $B_{gen} \colon X_s \to Y_{s_1}$, $B_{ov} \colon X_s \to Y_{s_2}$. Прямое разложение (14) пространства $Y_s = F\,\mathbb{R}^m$ порождает пару взаимно дополнительных проекторов (которые мы расширяем на $\mathbb{R}^m$) $F_i \colon \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}$, $i = 1, 2$, $F_1 + F_2 = F$, $F_i F_j = \delta_{ij} F_i$, таких, что $F_2 A = 0$. Введем операторы

$$\mathcal{A}_{gen} = F_1 A, \quad \mathcal{B}_{gen} = F_1 B, \quad \mathcal{B}_{ov} = F_2 B, \tag{16}$$

$\mathcal{A}_{gen}$, $\mathcal{B}_{gen}$, $\mathcal{B}_{ov} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $F_1 A = FA$). Тогда

$$A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_s}, \quad B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s}, \quad B_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s} \tag{17}$$

и операторы (16) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen}\colon X_s \to Y_{s_1}$ и $X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen}\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen}X_s = Y_{s_1}$), $\mathcal{B}_{gen}\colon X_s \to Y_{s_1}$ и $X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{ov}\colon X_s \to Y_{s_2}$ и $X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{ov})$. Для построения сингулярных подпространств X_s, Y_s, Y_{s_1}, Y_{s_2} найдем линейно независимые решения $y_1(\lambda),\dots, y_M(\lambda)$ уравнения

$$(\lambda A^T + B^T)y = 0, \qquad (18)$$

где $\lambda A^T + B^T$ — транспонированный пучок и $M = \dim Ker(\lambda A^T + B^T) = m - rk(\lambda A + B)$ (поскольку $rk(\lambda A + B) = rk(\lambda A^T + B^T)$). Как и выше, достаточно рассмотреть решения вида $y_j(\lambda) = \sum\limits_{l=0}^{m_j}(-1)^l\lambda^l y_{jl}$, $j = \overline{1,M}$, $y_{jl} \neq 0$, $l = \overline{0,m_j}$, где $m_j \ge 0$ — степень $y_j(\lambda)$. Подставляя $y_j(\lambda)$ в (18) и приравнивая коэффициенты при λ к нулю, получаем набор равенств $B^T y_{j0} = 0$, $B^T y_{j1} = A^T y_{j0}, \dots,$ $B^T y_{jm_j} = A^T y_{jm_j-1}$, $A^T y_{jm_j} = 0$. Если $m_j = 0$, то $B^T y_{j0} = A^T y_{j0} = A^T y_{jm_j} = 0$. Далее, строим сингулярные подпространства $\hat{X}_s = \hat{X}_{s_1}\dot{+}\hat{X}_{s_2}$, $\hat{Y}_s$, $\hat{X}_{s_2} = Ker(A_s^T)$, $\hat{X}_{s_1}$ для пучка $\lambda A^T + B^T$ так, как это делалось в предыдущем случае для пучка $\lambda A + B$. Если все $m_j = 0$, то $\hat{Y}_s = \{0\}$, $\hat{X}_{s_2} = \hat{X}_s$ и сингулярные блоки A_s, B_s (15) таковы, что $A_s^T = 0$, $B_s^T = 0$. Поскольку $A^T, B^T\colon (\mathbb{R}^m)' \to (\mathbb{R}^n)'$, то сингулярные подпространства, построенные для $\lambda A^T + B^T$, совпадают с сопряженными подпространствами $Y'_{s_i} = \hat{X}_{s_i}$, $i = 1,2$, $Y'_s = \hat{X}_s$, $X'_s = \hat{Y}_s$, где X_s, Y_s, Y_{s_i} из разложений (1), (14). Ясно, что сопряженное пространство $(\mathbb{R}^k)'$ можно заменить на $\mathbb{R}^k$, однако их базисы могут не совпадать, и поэтому мы оставляем обозначение $(\mathbb{R}^k)'$ в этом разделе. Если $\hat{Y}_s = \{0\}$, $\hat{X}_{s_2} = \hat{X}_s$, то блочная структура пучка принимает вид $\lambda A + B = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda A_r + B_r \end{pmatrix}$ и $X_s = \{0\}$, $Y_{s_2} = Y_s$, $Y_{s_1} = \{0\}$. Используя вид сингулярных подпространств, можно построить регулярные подпространства $\hat{Y}_r$, $\hat{X}_r$ для прямых разложений $(\mathbb{R}^m)' = \hat{X}_s\dot{+}\hat{X}_r = Y'_s\dot{+}Y'_r$, $(\mathbb{R}^n)' = \hat{Y}_s\dot{+}\hat{Y}_r = X'_s\dot{+}X'_r$ ($X'_r = \hat{Y}_r$, $Y'_r = \hat{X}_r$) и три пары взаимно дополнительных проекторов $\hat{S}_i\colon (\mathbb{R}^m)' \to \hat{X}_{s_i}$, $i = 1,2$, $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2\colon (\mathbb{R}^m)' \to \hat{X}_s$, $\hat{P}\colon (\mathbb{R}^m)' \to \hat{X}_r$, $\hat{F}\colon (\mathbb{R}^n)' \to \hat{Y}_s$, $\hat{Q}\colon (\mathbb{R}^n)' \to \hat{Y}_r$ таких, что $A^T\hat{S}_2 = 0$, $\hat{S}^T A = A\hat{F}^T$, $\hat{S}^T B = B\hat{F}^T$, $\hat{P}^T A = A\hat{Q}^T$, $\hat{P}^T B = B\hat{Q}^T$. Из свойств $\hat{S}_i$ следует, что транспонированные (сопряженные) проекторы $F_i = \hat{S}_i^T\colon \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}$, $i = 1,2$, ($Y_{s_2} = (Ker(A_s^T))'$, $F_1 + F_2 = F$) являются взаимно дополнительными проекторами такими, что $F_2 A = 0$, и порождают прямое разложение (14), относительно которого A_s, B_s имеют блочную структуру (15). Из свойств $\hat{S}$, $\hat{P}$ и $\hat{F}$, $\hat{Q}$ следует, что транспонированные (сопряженные) проекторы $S = \hat{F}^T$, $P = \hat{Q}^T$ и $F = \hat{S}^T$, $Q = \hat{P}^T$ являются двумя парами взаимно дополнительных проекторов (3) таких, что (4), и порождают разложения пространств (1) в прямые суммы подпространств таких, что операторы A и B приводятся парами (X_s, X_r), (Y_s, Y_r) (пучок $\lambda A + B$ имеет блочный вид (2)). Используя вид проекторов (или сопряженных подпространств), можно восстановить подпространства из разложений (1), (14).

В общем случае, если $rk(\lambda A + B) < n$ и $rk(\lambda A + B) < m$, существуют разложения сингулярных пространств

$$X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}, \quad Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \tag{19}$$

в прямые суммы подпространств таких, что

$$\begin{gathered} A_s = \begin{pmatrix} A_{gen} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \\ B_s = \begin{pmatrix} B_{gen} & B_{und} \\ B_{ov} & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}, \end{gathered} \tag{20}$$

где оператор $A_{gen} \colon X_{s_1} \to Y_{s_1}$ имеет обратный $A_{gen}^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$ (если $X_{s_1} \neq \{0\}$), $B_{gen} \colon X_{s_1} \to Y_{s_1}$, $B_{und} \colon X_{s_2} \to Y_{s_1}$, $B_{ov} \colon X_{s_1} \to Y_{s_2}$. Прямые разложения сингулярных пространств порождают две пары взаимно дополнительных проекторов

$$S_i \colon \mathbb{R}^n \to X_{s_i}, \quad F_i \colon \mathbb{R}^m \to Y_{s_i}, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

$S_1 + S_2 = S,\ F_1 + F_2 = F,\ S_i S_j = \delta_{ij} S_i,\ F_i F_j = \delta_{ij} F_i,$ таких, что

$$AS_2 = 0, \quad F_2 A = 0, \quad F_2 B S_2 = 0. \tag{22}$$

Введем операторы

$$\mathcal{A}_{gen} = F_1 A, \quad \mathcal{B}_{gen} = F_1 B S_1, \quad \mathcal{B}_{und} = F_1 B S_2, \quad \mathcal{B}_{ov} = F_2 B S_1, \tag{23}$$

$\mathcal{A}_{gen}, \mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{und}, \mathcal{B}_{ov} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (заметим, что $F_1 A = A S_1 = F A$). Тогда

$$A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}\big|_{X_{s_1}}, \ B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}\big|_{X_{s_1}}, \ B_{und} = \mathcal{B}_{und}\big|_{X_{s_2}}, \ B_{ov} = \mathcal{B}_{ov}\big|_{X_{s_1}} \tag{24}$$

и операторы (23) действуют так, что $\mathcal{A}_{gen} \colon X_{s_1} \to Y_{s_1}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$ (т.е. $\mathcal{A}_{gen}\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_{gen} X_{s_1} = Y_{s_1}$), $\mathcal{B}_{gen} \colon X_{s_1} \to Y_{s_1}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $\mathcal{B}_{und} \colon X_{s_2} \to Y_{s_1}$ и $X_{s_1} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und})$, $\mathcal{B}_{ov} \colon X_{s_1} \to Y_{s_2}$ и $X_{s_2} \dot{+} X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{ov})$. Заметим, что поскольку проекторы S_1 и F_1 являются единичными операторами в X_{s_1} и Y_{s_1} соответственно, то оператор $A_{gen}^{-1} \colon Y_{s_1} \to X_{s_1}$ будет обратным по отношению к $A_{gen} \colon X_{s_1} \to Y_{s_1}$, если $A_{gen}^{-1} A_{gen} = S_1|_{X_{s_1}}$ и $A_{gen} A_{gen}^{-1} = F_1|_{Y_{s_1}}$. Тогда расширение (продолжение) $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ оператора A_{gen}^{-1} на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющее свойствам

$$\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \mathcal{A}_{gen} = S_1, \quad \mathcal{A}_{gen} \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = F_1, \quad \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = S_1 \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}, \tag{25}$$

является полуобратным оператором для $\mathcal{A}_{gen}$, т.е. $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \colon Y_{s_1} \to X_{s_1}$, $Y_{s_2} \dot{+} Y_r = Ker(\mathcal{A}_{gen}^{(-1)})$ ($\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} \mathbb{R}^m = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} Y_{s_1} = X_{s_1}$) и $A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_{s_1}}$ (см. определение в [6, с. 331]). Ясно, что $S_1 \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} F_1$. Оператор $\mathcal{A}_{gen}$ является полуобратным для $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$. Заметим, что $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}_{gen}$, т.к. $\mathcal{A}_s = FA = F_1A$, и $A_{gen} = \mathcal{A}_s|_{X_{s_1}}$, поэтому можно аналогичным образом определить полуобратный оператор $\mathcal{A}_s^{(-1)} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ для $\mathcal{A}_s$. В общем случае, для построения сингулярных пространств и соответствующих проекторов необходимо найти $N = n - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (12) и $M = m - rk(\lambda A + B)$ линейно независимых решений уравнения (18). Далее, используя вид сингулярных пространств, полученных при анализе решений уравнений (12), (18), строим сингулярные пространства X_s, Y_s, X_{s_1}, X_{s_2}, Y_{s_1}, Y_{s_2} и соответствующие проекторы с учетом их свойств, позволяющих получить блочную структуру (20). Очевидно, базис $X_{s_2} = Ker(A_s)$ состоит из векторов, полученных при анализе решений (12), и строится так же, как базис X_{s_2} в случае $rk(\lambda A + B) = m < n$, а базис $Y_{s_2} = (Ker(A_s^T))'$ состоит из векторов, полученных при анализе решений (18), и строится так же, как базис Y_{s_2} в случае $rk(\lambda A+B) = n < m$. Базис X_{s_1} состоит из векторов, которые находятся так же, как базисные векторы X_{s_1} в случае $rk(\lambda A + B) = m < n$, и векторов, которые находятся так же, как базисные векторы X_s в случае $rk(\lambda A + B) = n < m$. Базис Y_{s_1} состоит из векторов, которые находятся так же, как базис Y_{s_1} при $rk(\lambda A + B) = n < m$, и векторов, которые находятся так же, как базис Y_s при $rk(\lambda A + B) = m < n$. Базисы пространств X_s, Y_s, являющихся прямыми суммами (19), состоят из объединения базисов их слагаемых. Исходя из вида сингулярных пространств X_s, Y_s строятся регулярные пространства X_r, Y_r из прямых разложений (1).

Общее максимальное количество $d(\lambda A + B) = n + m - 2\,rk(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A + B) + \dim Ker(\lambda A^T + B^T)$ линейно независимых решений уравнения (12) и линейно независимых решений уравнения (18) назовем *общим дефектом пучка* $\lambda A + B$ (в [2] оно было названо просто дефектом). Максимальное количество линейно независимых решений уравнения (12), т.е. размерность ядра пучка $\dim Ker(\lambda A + B)$, назовем *дефектом пучка* $\lambda A + B$. Для пучка ранга $rk(\lambda A + B) = m < n$ общий дефект равен $d(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A+B) = n - rk(\lambda A+B)$. Если пучок имеет ранг $rk(\lambda A+B) = n < m$, его общий дефект равен $d(\lambda A + B) = \dim Ker(\lambda A^T + B^T) = m - rk(\lambda A + B)$. Общие дефекты исходного и транспонированного пучков совпадают, а если $n = m$, то их дефекты также совпадают. Дефект и общий дефект регулярного пучка равны нулю.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Для операторов* $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *образующих сингулярный пучок* $\lambda A + B$, *существуют (и всегда могут быть построены) прямые разложения пространств*

$$\mathbb{R}^n = X_s \dot{+} X_r = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \dot{+} X_r, \quad \mathbb{R}^m = Y_s \dot{+} Y_r = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} \dot{+} Y_r, \tag{26}$$

относительно которых A, B *имеют блочную структуру* (5) *и их сингулярные блоки* A_s, B_s *имеют структуру* (20), *где оператор* A_{gen} *обратим (если*

$X_{s_1} \neq \{0\}$), при этом если $rk(\lambda A+B) = m < n$, то структура сингулярных блоков принимает вид (9) *и в разложениях* (26) $Y_{s_1} = Y_s$, $Y_{s_2} = \{0\}$, *а если $rk(\lambda A + B) = n < m$, то структура сингулярных блоков принимает вид* (15) *и в разложениях* (26) $X_{s_1} = X_s$, $X_{s_2} = \{0\}$. *Прямые разложения пространств* (26) *порождают пары взаимно дополнительных проекторов* (3), (21) (*со свойствами* (4), (22)), *где $F_1 = F$, $F_2 = 0$, если $rk(\lambda A+B) = m < n$, и $S_1 = S$, $S_2 = 0$, если $rk(\lambda A+B) = n < m$. Операторы из блочных представлений* (5), (20), (9) *и* (15) *имеют вид* (7), (24), (11) *и* (17) *соответственно. Расширение $\mathcal{A}_{gen}$ оператора A_{gen}, введенное в* (23), (10) *и* (16), *имеет полуобратный оператор $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$, удовлетворяющий свойствам* (25), *где $F_1 = F$, если $rk(\lambda A + B) = m < n$, и $S_1 = S$, если $rk(\lambda A + B) = n < m$.*

Метод построения подпространств из разложений (26) и соответствующих проекторов (3), (21) описан выше.

Замечание 1 *Для операторов $A, B\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ теорема 1 останется верна, а при построении прямых разложений вида* (26) *для комплексных пространств $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ и соответствующих проекторов нужно везде заменить транспонирование на эрмитово сопряжение.*

Замечание 2 *В теореме 1 обратное утверждение относительно проекторов также верно, а именно: существуют пары взаимно дополнительных проекторов* (3), (21) (*со свойствами* (4), (22)), *которые порождают прямые разложения пространств* (26).

Заметим, что если $X_r = \{0\}$, $Y_r = \{0\}$, то $\lambda A + B = \lambda A_s + B_s$ является чисто сингулярным пучком и регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ отсутствует.

Рассмотрим регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ операторов $A_r, B_r\colon X_r \to Y_r$ ($\dim X_r = \dim Y_r$), действующих в конечномерных пространствах. Предположим, что существуют константы C_1, $C_2 > 0$ такие, что

$$\left\|(\lambda A_r + B_r)^{-1}\right\| \leq C_1, \quad |\lambda| \geq C_2. \tag{27}$$

Условие (27) [7] означает, что либо точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ (это эквивалентно тому, что $\lambda = \infty$ является устранимой особой точкой резольвенты $(\lambda A_r + B_r)^{-1}$), либо $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$ (т. е. в точке $\mu = 0$ существует резольвента $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ и, следовательно, оператор A_r обратим). Если A_r вырожден и точка $\mu = 0$ является простым полюсом резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$, т. е. выполнено (27), то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса 1*. Заметим, что если $A_r = 0$ и существует B_r^{-1}, то $\lambda A_r + B_r \equiv B_r$ можно считать регулярным пучком индекса 1. Если A_r невырожден, т. е. $\mu = 0$ является регулярной точкой пучка $A_r + \mu B_r$, то будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком *индекса 0*. Таким образом, если $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок и выполнено (27), то $\lambda A_r + B_r$ имеет индекс 0 или 1 и мы будем говорить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок *индекса не выше 1*.

В общем случае, индексом регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$ называется наибольшая длина цепочки из собственного и присоединенных векторов пучка $A_r + \mu B_r$ в точке $\mu = 0$ [8, Пункт 6.2] или порядок полюса резольвенты $(A_r + \mu B_r)^{-1}$ в точке $\mu = 0$ (эквивалентность этих определений следует из [8, Пункт 2.3]).

Для регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$, удовлетворяющего (27), существуют две пары взаимно дополнительных проекторов $\tilde{P}_j\colon X_r \to X_j$ и $\tilde{Q}_j\colon Y_r \to Y_j$, $j = 1, 2$ (см. [5], [9]), $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = E_{X_r}$, $\tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 = E_{Y_r}$, $\tilde{P}_i\tilde{P}_j = \delta_{ij}\tilde{P}_i$, $\tilde{Q}_i\tilde{Q}_j = \delta_{ij}\tilde{Q}_i$, которые могут быть конструктивно определены по формулам аналогичным (5), (6) из [7] или

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \underset{\mu=0}{Res}\left(\frac{(A_r + \mu B_r)^{-1}A_r}{\mu}\right),\ \tilde{P}_2 = E_{X_r} - \tilde{P}_1,\\ \tilde{Q}_1 &= \underset{\mu=0}{Res}\left(\frac{A_r(A_r + \mu B_r)^{-1}}{\mu}\right),\ \tilde{Q}_2 = E_{Y_r} - \tilde{Q}_1. \end{aligned} \tag{28}$$

Эти проекторы порождают прямые разложения

$$X_r = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2 \tag{29}$$

такие, что A_r, $B_r\colon X_j \to Y_j$, $j = 1, 2$ (пары подпространств X_1, Y_1 и X_2, Y_2 инвариантны относительно A_r, B_r), т.е.

$$\tilde{Q}_j A_r = A_r \tilde{P}_j, \quad \tilde{Q}_j B_r = B_r \tilde{P}_j, \tag{30}$$

и операторы $A_j = A_r|_{X_j} : X_j \to Y_j$, $B_j = B_r|_{X_j} : X_j \to Y_j$, $j = 1, 2$, таковы, что $A_2 = 0$ ($\tilde{Q}_2 A_r = 0$) и существуют $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ (если $X_1 \neq \{0\}$) и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ (если $X_2 \neq \{0\}$) [7, Разделы 2, 6]. Следовательно, относительно прямых разложений (29) операторы A_r, B_r имеют блочную структуру

$$A_r = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X_1 \dot{+} X_2 \to Y_1 \dot{+} Y_2, \quad B_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} : X_1 \dot{+} X_2 \to Y_1 \dot{+} Y_2, \tag{31}$$

где A_1 и B_2 обратимы (если $X_1 \neq \{0\}$ и $X_2 \neq \{0\}$ соответственно).

Замечание 3 *Для регулярного пучка $\lambda A_r + B_r$ операторов $A_r, B_r\colon X_r \to Y_r$, действующих в конечномерных пространствах, всегда можно получить две пары взаимно дополнительных проекторов вида [7, (5), (6)], которые порождают прямые разложения* (29) *такие, что суженные операторы $A_1 = A_r|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ и $B_2 = B_r|_{X_2} : X_2 \to Y_2$ имеют обратные $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$ (если $X_1 \neq \{0\}$) и $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$ (если $X_2 \neq \{0\}$) (см. [8], [5]). Однако, если индекс пучка выше 1, то $Ker(A_r) \subsetneqq X_2$ и, соответственно, $A_2 = A_r|_{X_2} \neq 0$. В случае если регулярный пучок $\lambda A_r + B_r$ имеет индекс 1, ядро и область значений оператора A_r совпадают с пространствами $X_2 = Ker(A_r)$ и $Y_1 = \mathcal{R}(A_r)$. В этом случае можно получить проекторы на подпространства из разложений* (29) *без использования формул [7, (5), (6)] или* (28).

Построим прямые дополнения X_1 и Y_2 пространств соответственно X_2 и Y_1 так, чтобы пары X_1, Y_1 и X_2, Y_2 были инвариантны относительно оператора B_r (очевидно, что эти пары являются инвариантными относительно A_r), тогда операторы A_r, B_r имеют блочную структуру (31) *и их блоки A_1, B_2 имеют обратные $A_1^{-1} \in L(Y_1, X_1)$, $B_2^{-1} \in L(Y_2, X_2)$. Прямые суммы* (29) *пространств X_j, Y_j порождают две пары взаимно дополнительных проекторов $\tilde{P}_j \colon X_r \to X_j$, $\tilde{Q}_j \colon Y_r \to Y_j$ со свойствами* (30) *и $\tilde{Q}_2 A_r = 0$. Можно также получить эти проекторы, построив операторы $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$, $j = 1, 2$, удовлетворяющие следующим свойствам: $\tilde{P}_2^2 = \tilde{P}_2$, $\tilde{P}_1 = E_{X_r} - \tilde{P}_2$ (заметим, что если некоторый оператор $\tilde{P}_2$ является проектором, то $\tilde{P}_1 = E_{X_r} - \tilde{P}_2$ — также проектор и проекторы $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ взаимно дополнительные), $\tilde{Q}_1^2 = \tilde{Q}_1$ (или $\tilde{Q}_2^2 = \tilde{Q}_2$), $\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_1 = E_{Y_r}$, $A_r \tilde{P}_2 = 0$ и выполнены равенства* (30).

Таким образом, если регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из (2) является регулярным пучком индекса не выше 1, то существуют прямые разложения регулярных пространств (29), относительно которых A_r, B_r имеют блочную структуру (31). Проекторы $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$ на подпространства из разложений (29) могут быть получены методом, описанным в замечании 3, или по формулам (28) (либо [7, (5), (6)]).

Введем расширения P_j, Q_j проекторов $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$ соответственно на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ так, что $X_j = P_j \mathbb{R}^n$, $Y_j = Q_j \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2$ (X_j, Y_j — подпространства из разложений (29)). Тогда расширенные проекторы

$$P_j \colon \mathbb{R}^n \to X_j, \quad Q_j \colon \mathbb{R}^m \to Y_j, \quad j = 1, 2, \tag{32}$$

обладают свойствами исходных: $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $Q_i Q_j = \delta_{ij} Q_i$, $P_1 + P_2 = P$, $Q_1 + Q_2 = Q$,

$$Q_j A = A P_j, \quad Q_j B = B P_j, \quad Q_2 A = 0 \quad (Q_1 A = QA).$$

Свойства операторов $A_j = A|_{X_j} : X_j \to Y_j$, $B_j = B|_{X_j} : X_j \to Y_j$, $j = 1, 2$, также сохраняются. Введем их расширения на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\mathcal{A}_j = Q_j A, \quad \mathcal{B}_j = Q_j B, \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

Тогда

$$A_j = \mathcal{A}_j|_{X_j}, \quad B_j = \mathcal{B}_j|_{X_j}, \quad j = 1, 2, \tag{34}$$

и операторы (33) $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ действуют так, что $\mathcal{A}_j \colon X_j \to Y_j$, $\mathcal{B}_j \colon X_j \to Y_j$ и $\mathcal{A}_2 = 0$, $X_2 \dot{+} X_s = Ker(\mathcal{A}_1)$ ($\mathcal{A}_1 \mathbb{R}^n = \mathcal{A}_1 X_1 = Y_1$), $X_2 \dot{+} X_s \subset Ker(\mathcal{B}_1)$, $X_1 \dot{+} X_s = Ker(\mathcal{B}_2)$ ($\mathcal{B}_2 \mathbb{R}^n = \mathcal{B}_2 X_2 = Y_2$). Поскольку P_1, Q_1 являются единичными операторами в X_1, Y_1 соответственно, то оператор $A_1^{-1} \colon Y_1 \to X_1$ будет обратным по отношению к $A_1 \colon X_1 \to Y_1$, если $A_1^{-1} A_1 = P_1|_{X_1}$, $A_1 A_1^{-1} = Q_1|_{Y_1}$. Тогда расширение $\mathcal{A}_1^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ оператора A_1^{-1} на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющее свойствам

$$\mathcal{A}_1^{(-1)} \mathcal{A}_1 = P_1, \quad \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^{(-1)} = Q_1, \quad \mathcal{A}_1^{(-1)} = P_1 \mathcal{A}_1^{(-1)}, \tag{35}$$

является полуобратным оператором для $\mathcal{A}_1$, т.е. $\mathcal{A}_1^{(-1)}\colon Y_1 \to X_1$, $Y_2\dot{+}Y_s = Ker(\mathcal{A}_1^{(-1)})$ $(\mathcal{A}_1^{(-1)}\mathbb{R}^m = \mathcal{A}_1^{(-1)}Y_1 = X_1)$ и $A_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{(-1)}\Big|_{Y_1}$. Ясно, что $P_1\mathcal{A}_1^{(-1)} = \mathcal{A}_1^{(-1)}Q_1$. Указанные свойства позволяют найти вид $\mathcal{A}_1^{(-1)}$ (или A_1^{-1}), используя вид проекторов. Полуобратный оператор $\mathcal{B}_2^{(-1)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ для $\mathcal{B}_2$, т.е. $\mathcal{B}_2^{(-1)}\colon Y_2 \to X_2$, $Y_1\dot{+}Y_s = Ker(\mathcal{B}_2^{(-1)})$ $(\mathcal{B}_2^{(-1)}\mathbb{R}^m = \mathcal{B}_2^{(-1)}Y_2 = X_2)$ и $B_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{(-1)}\Big|_{Y_2}$, можно вычислить аналогичным способом:

$$\mathcal{B}_2^{(-1)}\mathcal{B}_2 = P_2, \quad \mathcal{B}_2\mathcal{B}_2^{(-1)} = Q_2, \quad \mathcal{B}_2^{(-1)} = P_2\mathcal{B}_2^{(-1)} \quad (P_2\mathcal{B}_2^{(-1)} = \mathcal{B}_2^{(-1)}Q_2).$$

4. Примеры блочных представлений для сингулярных пучков, прямых разложений пространств и проекторов

4.1. Пример для случая $rk(\lambda A + B) = m < n$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, которым относительно стандартных базисов пространств $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ (i-й координатой базисного вектора e_j является символ Кронекера δ_{ij}) соответствуют матрицы [2]

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r_2 & -1 & -r_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где L, C, r_1, r_2 — вещественные параметры, не равные нулю. Легко проверить, что ранг пучка равен $rk(\lambda A + B) = 3$. Общий дефект пучка (также как и дефект пучка) равен $d(\lambda A + B) = 1$.

Поскольку $N = d(\lambda A + B) = 1$, то уравнение (12) имеет одно ненулевое решение $x_1(\lambda) = \big(1,\, \lambda L + r_1 + r_2,\, -1,\, \lambda^2 CL + \lambda C(r_1 + r_2) + 1\big)^T$, которое определяется с точностью до скалярного множителя. Записав решение $x_1(\lambda)$ в виде (13), получим системы векторов $\{x_{1i}\}_{i=0}^2$, $\{Bx_{1i}\}_{i=1}^2$, где

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 + r_2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \\ -C(r_1 + r_2) \end{pmatrix}, \; x_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ CL \end{pmatrix},$$

$$Bx_{11} = \begin{pmatrix} L \\ C(r_1 + r_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \; Bx_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ CL \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространства $X_s = Lin\{x_{1i}\}_{i=0}^2$, $Y_s = Lin\{Bx_{1i}\}_{i=1}^2$ из разложений (1) можно представить в виде $X_s = Lin\{s_i\}_{i=1}^3$, $Y_s = Lin\{g_i\}_{i=1}^2$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда $X_r = Lin\{p\}$, $Y_r = Lin\{q\}$ ($q = Bp$, $B\colon X_r \to Y_r$), где

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $X_{s_1} = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_2} = Lin\{s_3\}$ ($As_3 = 0$), тогда относительно прямого разложение (8) операторы A_s, B_s имеют блочную структуру (9). Полученные прямые разложения пространств (1) и (8) порождают проекторы $S\colon \mathbb{R}^4 \to X_s$, $P\colon \mathbb{R}^4 \to X_r$ ($S + P = E_{\mathbb{R}^4}$), $F\colon \mathbb{R}^3 \to Y_s$, $Q\colon \mathbb{R}^3 \to Y_r$ ($F + Q = E_{\mathbb{R}^3}$) и $S_1\colon \mathbb{R}^4 \to X_{s_1}$, $S_2\colon \mathbb{R}^4 \to X_{s_2}$ ($S_1 + S_2 = S$), которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$ соответствуют проекционные матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$, то $A_r = QA|_{X_r} = 0$. Легко проверить, что если $x_r \in X_r$, то $QBx_r = y_r \in Y_r$, причем $QBx_r = 0$ только при $x_r = 0$. Значит оператор $B_r = QB|_{X_r} \in L(X_r, Y_r)$ обратим. Следовательно, регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ из (2) является регулярным пучком индекса 1. Подпространства из прямых разложений (29) и соответствующие проекторы имеют вид $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$ и $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$, и, очевидно, $A_r = A_2$, $B_r = B_2$.

Оператору $\mathcal{A}_{gen} = FA\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$ ($X_{s_2} \dot{+} X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$, $A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$), введенному в (10), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ (дополняем базис Y_s до стандартного в $\mathbb{R}^3$) соответствует матрица $\mathcal{A}_{gen} = A$ (т.к. $FA = A$). Полуобратному оператору $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\colon \mathbb{R}^3 \to X_{s_1}$ ($Y_r = Ker(\mathcal{A}_{gen}^{(-1)})$, $A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_s} \in L(Y_s, X_{s_1})$) относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ соответствует матрица (удовлетворяющая свойствам (25), где $F_1 = F$)

$$\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \\ 0 & C^{-1} & 0 \\ -L^{-1} & 0 & -r_1 L^{-1} \\ L^{-1} & 0 & r_1 L^{-1} \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}, \mathcal{B}_{und}\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$ ($X_{s_2}\dot{+}X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $X_{s_1}\dot{+}X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{und})$, $B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_s)$, $B_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \in L(X_{s_2}, Y_s)$), введенным в (10), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} r_2 + r_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{und} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Пример 2 для случая $rk(\lambda A + B) = m < n$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

где a, $b \neq a$ — вещественные параметры, не равные нулю. Этот пучок имеет тот же тип, что и предыдущий, поскольку $rk(\lambda A + B) = \dim \mathbb{R}^3 < \dim \mathbb{R}^5$, но его общий дефект $d(\lambda A + B) = 2$ и, следовательно, уравнение (12) имеет два линейно независимых решения (максимальный набор).

Найдем два произвольных линейно независимых решения $x_1(\lambda) = \big(1,\, \lambda + a - b,\, -1,\, \lambda^2 + \lambda(a - b) + 1,\, 0\big)^T$, $x_2(\lambda) = \big(0,\, -b,\, -1,\, -\lambda b + 1,\, 1\big)^T$. Тогда мы получим системы векторов $\{x_{1i}\}_{i=0}^{2}$ и $\{x_{2i}\}_{i=0}^{1}$, где

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ a - b \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ b - a \\ 0 \end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система, состоящая из этих векторов, линейно зависима, но ее подсистема $\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\}$ (или $\{x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{20}\}$) является линейно независимой и образует базис X_s. Можно найти решение меньшей степени, чем $x_1(\lambda)$, например, $\tilde{x}_1(\lambda) = \big(b,\, 0,\, -\lambda - a,\, \lambda + a,\, \lambda + a - b\big)^T$. Тогда мы получим векторы

$$\tilde{x}_{10} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \\ a \\ a - b \end{pmatrix}, \tilde{x}_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\{\tilde{x}_1(\lambda),\, x_2(\lambda)\}$ — набор линейно независимых решений с наименьшими возможными степенями (оба решения имеют степень 1). Следовательно, $X_{s_2} = Lin\{\tilde{x}_{11}, x_{21}\}$, $X_{s_1} = Lin\{\tilde{x}_{10}, x_{20}\}$, $X_s = Lin\{\tilde{x}_{10}, x_{20}, \tilde{x}_{11}, x_{21}\}$

и $Y_s = Lin\{A\tilde{x}_{10}, Ax_{20}\}$, где $A\tilde{x}_{10} = (b,0,0)^T$, $Ax_{20} = (0,-b,0)^T$. С другой стороны, можно преобразовать систему $\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\}$ так, чтобы можно было выбрать базисы для X_{s_1}, X_{s_2}, а именно, $X_s = Lin\{x_{10}, x_{11}, x_{20}, x_{21}\} = Lin\{s_i\}_{i=1}^4$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $Y_s = Lin\{Ax_{10}, Ax_{11}\} = Lin\{Ax_{10}, Ax_{20}\} = Lin\{As_1, As_2\}$, где $As_1 = (1,0,0)^T$, $As_2 = (0,1,0)^T$ $(Ax_{10} = (1, a-b, 0)^T$, $Ax_{11} = (0,-1,0)^T)$, и $X_{s_1} = Lin\{s_1, s_2\}$, $X_{s_2} = Lin\{s_3, s_4\}$. Далее находим $X_r = Lin\{p\}$, $Y_r = Lin\{q\}$, где $p = (0,0,1,0,0)^T$, $q = Bp = (b,-1,1)^T$. Полученные прямые разложения пространств (1), (8) порождают проекторы, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^3$ соответствуют проекционные матрицы $S = S_1 + S_2$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $QA = 0$ и B_r обратим, то регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ является регулярным пучком индекса 1 и $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$, $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, $A_2 = A_r$, $B_2 = B_r$. Используя вид полученных проекционных матриц, легко найти вид матриц, соответствующих операторам (10):

$$\mathcal{A}_{gen} = A, \quad \mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} a-b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{und} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и вид матрицы, соответствующей оператору $\mathcal{B}_r$ из (6):

$$\mathcal{B}_r = \begin{pmatrix} b & 0 & b & 0 & b \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $\mathcal{B}_{gen} + \mathcal{B}_{und} + \mathcal{B}_r = B$ (это выполнено, поскольку $S_1 + S_2 + P = E_{\mathbb{R}^5}$ и $QB = BP$).

4.3. Пример для случая $rk(\lambda A+B)=n<m$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A+B$ операторов $A, B\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ соответствуют матрицы [2]

$$A=\begin{pmatrix} L & 0 & 0\\ 0 & C & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} r_2+r_3 & 0 & 0\\ 0 & g & 0\\ -r_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{38}$$

где L, C, g, r_2, r_3 — вещественные параметры, не равные нулю. Очевидно, ранг пучка равен $rk(\lambda A+B)=3$ и общий дефект пучка равен $d(\lambda A+B)=1$ (дефект пучка $\lambda A+B$ равен 0, а дефект транспонированного пучка λA^T+B^T равен 1).

Поскольку $M=d(\lambda A+B)=d(\lambda A^T+B^T)=1$, то уравнение (18) имеет одно ненулевое решение $y_1(\lambda)$, которое определяется с точностью до скалярного множителя:

1. $y_1(\lambda)=\big(-r_2(\lambda C+g),\,\lambda L+r_2+r_3,-(\lambda C+g)(\lambda L+r_2+r_3),\,0\big)^T$ при $L\neq C(r_2+r_3)/g$;

2. $y_1(\lambda)=\big(-r_2g/(r_2+r_3),\,1,\,-(\lambda C+g),0\big)^T$ при $L=C(r_2+r_3)/g$.

Сначала рассмотрим случай 1, когда $L\neq C(r_2+r_3)/g$.

Так же, как это делалось в предыдущем примере для пучка $\lambda A+B$, строим пространства $\hat{X}_s=\hat{X}_{s_1}\dot{+}\hat{X}_{s_2}=Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^3$, $\hat{X}_{s_1}=Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_{s_2}=Lin\{\hat{s}_3\}$, $\hat{Y}_s=Lin\{\hat{l}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_r=Lin\{\hat{p}\}$, $\hat{Y}_r=Lin\{\hat{q}\}$, где

$$\hat{s}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{s}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{s}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \hat{l}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{l}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \hat{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \hat{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

для транспонированного пучка λA^T+B^T и проекторы $\hat{S}\colon\mathbb{R}^4\to\hat{X}_s$, $\hat{S}_i\colon\mathbb{R}^4\to\hat{X}_{s_i}$, $i=1,2$, $\hat{P}\colon\mathbb{R}^4\to\hat{X}_r$, $\hat{F}\colon\mathbb{R}^3\to\hat{Y}_s$, $\hat{Q}\colon\mathbb{R}^3\to\hat{Y}_r$, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$ соответствуют проекционные матрицы

$$\hat{S}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \hat{S}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \hat{S}=\hat{S}_1+\hat{S}_2,\ \hat{P}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\hat{F}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \hat{Q}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда проекторы $S\colon \mathbb{R}^3 \to X_s$, $P\colon \mathbb{R}^3 \to X_r$, $F\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$, $Q\colon \mathbb{R}^4 \to Y_r$, $F_i\colon \mathbb{R}^4 \to Y_{s_i}$, $i = 1,2$ ($F = F_1 + F_2$), которым соответствуют проекционные матрицы $S = \hat{F}^T$, $P = \hat{Q}^T$, $F = \hat{S}^T$, $Q = \hat{P}^T$, $F_i = \hat{S}_i^T$, $i = 1,2$, порождают прямые разложения пространств (1), (14), где $X_s = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_r = Lin\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^3$, $Y_r = Lin\{\hat{p}\}$, $Y_{s_1} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_2} = Lin\{\hat{s}_3\}$, $s_1 = (1,0,-1)^T$, $s_2 = \hat{l}_2$, $p = (0,0,1)^T$.

Как и в предыдущем примере, легко проверить, что то $A_r = QA|_{X_r} = 0$ и $B_r = QB|_{X_r}$ обратим. Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1, и $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_2 = Q$, $Q_1 = 0$ ($P_k\colon \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_k$, $k = 1,2$).

Оператору $\mathcal{A}_{gen} = FA\colon \mathbb{R}^3 \to Y_{s_1}$ ($X_r = Ker(\mathcal{A}_{gen})$, $A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_1})$), введенному в (16), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ соответствует матрица $\mathcal{A}_{gen} = A$. Полуобратному оператору $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\colon \mathbb{R}^4 \to X_{s_1}$ ($Y_{s_2} \dot{+} Y_r = Ker(\mathcal{A}_{gen}^{(-1)})$, $A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_{s_1}} \in L(Y_{s_1}, X_s)$) относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^3$ соответствует матрица (удовлетворяющая свойствам (25), где $S_1 = S$)

$$\mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}\colon \mathbb{R}^3 \to Y_{s_1}$, $\mathcal{B}_{ov}\colon \mathbb{R}^3 \to Y_{s_2}$ ($X_r \subset Ker(\mathcal{B}_{gen})$, $Ker(\mathcal{B}_{ov})$, $B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_1})$, $B_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s} \in L(X_s, Y_{s_2})$), введенным в (16), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} r_2 + r_3 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим случай 2, когда $L = C(r_2 + r_3)/g$.

В этом случае получаем пространства $X_s = Lin\{s\}$, $X_r = Lin\{p_i\}_{i=1}^2$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = Lin\{l_1\}$, $Y_{s_2} = Lin\{l_2\}$, $Y_r = Lin\{w_i\}_{i=1}^2$, где

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \\ -1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ l_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r_2 g}{r_2 + r_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проекторам $S\colon \mathbb{R}^3 \to X_s$, $P\colon \mathbb{R}^3 \to X_r$, $F\colon \mathbb{R}^4 \to Y_s$, $F = F_1+F_2$, $F_i\colon \mathbb{R}^4 \to Y_{s_i}$, $i = 1,2$, $Q\colon \mathbb{R}^4 \to Y_r$ относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ соответствуют проекционные матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r_2 g}{r_2+r_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_2 g}{r_2+r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок, оператор A_r вырожден и выполнено (27). Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1. Подпространства из прямых разложений (29) и соответствующие проекторы имеют вид $X_1 = Lin\{p_1\}$, $X_2 = Lin\{p_2\}$, $Y_1 = Lin\{w_1\}$, $Y_2 = Lin\{w_2\}$, $P_k\colon \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k\colon \mathbb{R}^4 \to Y_k$, $k = 1,2$, $(P = P_1 + P_2,\ Q = Q_1 + Q_2)$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_2 g}{r_2+r_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, соответствующие операторам $\mathcal{A}_{gen}$, $\mathcal{A}_1$ $(A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_s}$, $A_1 = \mathcal{A}_1|_{X_1})$, введенным в (16), (33), и полуобратным операторам $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$, $\mathcal{A}_1^{(-1)}$ $\Big(A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_{s_1}}$, $A_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{(-1)}\Big|_{Y_1}$, $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ удовлетворяет (25), где $S_1 = S$, и $\mathcal{A}_1^{(-1)}$ удовлетворяет (35)$\Big)$ относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ имеют вид

$$\mathcal{A}_{gen} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 L^{-1} & C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ r_2 C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ r_2 L^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -L^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторам $\mathcal{B}_{gen}$, $\mathcal{B}_{ov}$ $(B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_s}$, $B_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_s})$, введенным в (16), относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ соответствуют матрицы

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -r_2 g & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. Пример для случая $rk(\lambda A + B) < n$, $rk(\lambda A + B) < m$

Рассмотрим сингулярный пучок $\lambda A + B$ операторов $A, B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, которым относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Ранг пучка равен $rk(\lambda A + B) = 2$ и общий дефект пучка равен $d(\lambda A+B) = 2$, при этом $N = 1$ и $M = 1$ (дефекты $\lambda A + B$ и $\lambda A^T + B^T$ равны 1).

Решение уравнения (12) имеет вид (с точностью до скалярного множителя) $x_1(\lambda) \equiv x_{10} = \big(1,\, 0,\, 1\big)^T$. Значит x_{10} является базисным вектором подпространства X_s из (1), и в том числе X_{s_2} из (19).

Решение уравнения (18) имеет вид (с точностью до скалярного множителя) $y_1(\lambda) = \big(1,\, -(\lambda{+}1),\, (\lambda{+}2)/2\big)^T$. Как и в примере из пункта 4.3, для транспонированного пучка $\lambda A^T + B^T$ строим подпространства $\hat{X}_s = \hat{X}_{s_1} \dot{+} \hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s}_i\}_{i=1}^2$, $\hat{X}_{s_1} = Lin\{\hat{s_1}\}$, $\hat{X}_{s_2} = Lin\{\hat{s_2}\}$, $\hat{Y}_s = Lin\{\hat{l}\}$, где

$$\hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \hat{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

и проекционные матрицы

$$\hat{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2\,,\ \hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя проекционные матрицы $\hat{S}^T$, $\hat{S}_1^T$, $\hat{S}_2^T$, $\hat{F}^T$ и вектор x_{10}, получаем подпространства из разложений (1), (19): $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} = Lin\{s_i\}_{i=1}^2$, $X_{s_1} = Lin\{s_1\}$, $X_{s_2} = Lin\{s_2\}$, $X_r = Lin\{p\}$, $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2} = Lin\{l_i\}_{i=1}^2$, $Y_{s_1} = Lin\{l_1\}$, $Y_{s_2} = Lin\{l_2\}$, $Y_r = Lin\{q\}$, где

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда проекционные матрицы, соответствующие проекторам $S\colon \mathbb{R}^3 \to X_s$, $F\colon \mathbb{R}^3 \to Y_s$, $S_i\colon \mathbb{R}^3 \to X_{s_i}$, $F_i\colon \mathbb{R}^3 \to Y_{s_i}$, $i = 1,2$, $S = S_1 + S_2$, $F = F_1 + F_2$, $P\colon \mathbb{R}^3 \to X_r$, $Q\colon \mathbb{R}^3 \to Y_r$, имеют вид

$$S_1 = \hat{F}^T\,,\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \hat{S}_1^T\,,\ F_2 = \hat{S}_2^T\,,\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A_r = QA|_{X_r} = 0$ и $B_r = QB|_{X_r}$ обратим. Следовательно, $\lambda A_r + B_r$ — регулярный пучок индекса 1 и подпространства из разложений (29) имеют вид: $X_1 = \{0\}$, $X_2 = X_r$, $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = Y_r$, а проекторы $P_k\colon \mathbb{R}^3 \to X_k$, $Q_k\colon \mathbb{R}^3 \to Y_k$, $k = 1,2$, таковы: $P_1 = 0$, $P_2 = P$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = Q$.

Операторам $\mathcal{A}_{gen}$, $\mathcal{B}_{gen}$, $\mathcal{B}_{und}$, $\mathcal{B}_{ov}$ ($A_{gen} = \mathcal{A}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $B_{gen} = \mathcal{B}_{gen}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_1})$, $B_{und} = \mathcal{B}_{und}|_{X_{s_2}} \in L(X_{s_2}, Y_{s_1})$, $B_{ov} = \mathcal{B}_{ov}|_{X_{s_1}} \in L(X_{s_1}, Y_{s_2})$), введенным в (23), и полуобратному оператору $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ ($A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_{s_1}} \in L(Y_{s_1}, X_{s_1})$, $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$ удовлетворяет (25)) относительно стандартных базисов в $\mathbb{R}^3$ соответствуют матрицы $\mathcal{A}_{gen} = A$, $\mathcal{B}_{und} = 0$,

$$\mathcal{B}_{gen} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ov} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Приведение дифференциально-операторного уравнения с сингулярным пучком операторов

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение вида

$$\frac{d}{dt}[Ax] + Bx = f(t,x), \tag{40}$$

где A, $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $f(t,x) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Влияние линейной части $\dfrac{d}{dt}[Ax] + Bx$ уравнения (40) определяется свойствами характеристического пучка $\lambda A + B$. В общем, пучок $\lambda A + B$ является сингулярным.

Уравнения типа (40) также называют *полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Полулинейное ДАУ с сингулярным пучком называется *сингулярным* или *нерегулярным*.

Предположим, что сингулярный пучок имеет регулярный блок $\lambda A_r + B_r$ (см. (2)) индекса не выше 1.

Применяя к уравнению (40) проекторы F_i, Q_i, $i = 1, 2$, (см. (21), (32)) и используя их свойства, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_1 A S_1 x) + F_1 B S x &= F_1 f(t, x), \\ \frac{d}{dt}(Q_1 A P_1 x) + Q_1 B P_1 x &= Q_1 f(t, x), \\ Q_2 B P_2 x &= Q_2 f(t, x), \\ F_2 B S_1 x &= F_2 f(t, x). \end{aligned} \tag{41}$$

Относительно разложений (26), (29) любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде

$$x = x_s + x_r = x_{s_1} + x_{s_2} + x_{p_1} + x_{p_2}, \tag{42}$$

где $x_s = Sx \in X_s$, $x_r = Px \in X_r$, $x_{s_i} = S_i x \in X_{s_i}$, $x_{p_i} = P_i x \in X_i$, $i = 1, 2$.

Используя представление (42) и учитывая блочную структуру сингулярного пучка, а именно вид операторов (23) и (33), получаем систему, эквивалентную (41):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_{gen} x_{s_1}) + \mathcal{B}_{gen} x_{s_1} + \mathcal{B}_{und} x_{s_2} &= F_1 f(t, x), \\ \frac{d}{dt}(\mathcal{A}_1 x_{p_1}) + \mathcal{B}_1 x_{p_1} &= Q_1 f(t, x), \\ \mathcal{B}_2 x_{p_2} &= Q_2 f(t, x), \\ \mathcal{B}_{ov} x_{s_1} &= F_2 f(t, x). \end{aligned} \tag{43}$$

Заметим, что можно сузить операторы в уравнениях системы (41) и использовать в (43) вместо (23), (33) суженные операторы (24), (34).

Умножая уравнения системы (43) соответственно на $\mathcal{A}_{gen}^{(-1)}$, $\mathcal{A}_1^{(-1)}$, $\mathcal{B}_2^{(-1)}$, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_{s_1} &= \mathcal{A}_{gen}^{(-1)} [F_1 f(t, x) - \mathcal{B}_{gen} x_{s_1} - \mathcal{B}_{und} x_{s_2}], \\ \frac{d}{dt} x_{p_1} &= \mathcal{A}_1^{(-1)} [Q_1 f(t, x) - \mathcal{B}_1 x_{p_1}], \\ x_{p_2} &= \mathcal{B}_2^{(-1)} Q_2 f(t, x), \\ \mathcal{B}_{ov} x_{s_1} &= F_2 f(t, x). \end{aligned} \tag{44}$$

Если в (43) используются суженные операторы (24), (34), то уравнения системы (43) умножаются на суженные операторы $A_{gen}^{-1} = \mathcal{A}_{gen}^{(-1)}\Big|_{Y_{s_1}}$, $A_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{(-1)}\Big|_{Y_1}$, $B_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{(-1)}\Big|_{Y_2}$.

Таким образом, мы свели сингулярное полулинейное ДАУ (40) к эквивалентной системе (44) из чисто дифференциальных и чисто алгебраических уравнений.

Эти результаты используются при доказательстве теорем об устойчивости и неустойчивости по Лагранжу сингулярного полулинейного ДАУ (40) [2, Теоремы 1, 2].

6. Выводы

Описана блочная структура сингулярного пучка операторов, состоящая из сингулярного и регулярного блоков, в которых выделены нулевые и обратимые блоки. Подробно описан метод нахождения блочной структуры пучка и соответствующих прямых разложений пространств. Показаны способы построения проекторов, позволяющих выделить требуемые блоки.

Благодарность. Исследование выполнено при частичной грантовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект Ф83/82-2018).

ORCID ID

M. S. Filipkovska (Filipkovskaya) https://orcid.org/0000-0002-2266-1243

REFERENCES

1. F.R. Gantmacher. The theory of matrices. 2010. FIZMATLIT, Moscow, 560 p.

2. M.S. Filipkovskaya, Lagrange stability and instability of irregular semilinear differential-algebraic equations and applications, Ukrainian Math. J. — 2018. — 6. V.**70** — P. 947–979.

3. Ju.L. Daleckii, M.G. Krein. Stability of solutions of differential equations in a Banach space. 1970. Nauka, Moscow, 536 p.

4. P.R. Halmos. Finite-dimensional vector spaces. 1958. Van Nostrand, Princeton, 200 p.

5. A.G. Rutkas. Cauchy problem for the equation $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$, Differ. Uravn. — 1975. — 11. V.**11** — P. 1996–2010.

6. D.K. Faddeev, Lectures on algebra. 1984. Nauka, Moscow, 416 p.

7. A.G. Rutkas, L.A. Vlasenko. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations, Nonlinear Anal. — 2003. — 1–2. V.**55**. — P. 125–139.

8. L.A. Vlasenko. Evolution models with implicit and degenerate differential equations. 2006. Sistemnye Tekhnologii, Dniepropetrovsk, 273 p.

9. A.G. Rutkas. Solvability of semilinear differential equations with singularity, Ukrainian Math. J. — 2008. — 2. V.**60**. — P. 262–276.

Фiлiпковська М. С. **Блокова форма сингулярного жмутка операторiв i метод її отримання.** Описано блокову форму сингулярного жмутка операторiв $\lambda A + B$, де λ — комплексний параметр, а лiнiйнi оператори A, B дiють у скiнченновимiрних просторах. Жмуток операторiв $\lambda A + B$ називається регулярним, якщо $n = m = rk(\lambda A + B)$, де $rk(\lambda A + B)$ — ранг жмутка та m, n — розмiрностi просторiв (оператори вiдображають n-мiрний простiр у m-мiрний). В iнших випадках, тобто якщо $n \neq m$ або $n = m$ та $rk(\lambda A + B) < n$, жмуток називається сингулярним (нерегулярним). Блокова форма (структура) складається з сингулярного блоку, який є суто сингулярним жмутком (тобто вiд нього неможливо вiдокремити регулярний блок) i регулярного блоку. У цих блоках видiлено нульовi блоки та блоки, якi є оборотними операторами. Детально описано метод отримання блокової форми сингулярного жмутка операторiв у двох спецiальних випадках, коли $rk(\lambda A + B) = m < n$ та $rk(\lambda A + B) = n < m$, i в загальному випадку, коли $rk(\lambda A + B) < n, m$. Надано способи побудови проекторiв на пiдпростори з прямих розкладань, вiдносно яких жмуток має потрiбний блоковий вигляд. За допомогою цих проекторiв можна знайти вигляд блокiв i, вiдповiдно, блокову форму жмутка. Наведено приклади знаходження блокової форми для рiзних типiв сингулярних жмуткiв. Для отримання блокової форми, зокрема, використовувалися результати, що стосуються зведення сингулярного жмутка матриць до канонiчного квазiдiагонального вигляду, який називають канонiчною формою Вейєрштрасса-Кронекера. Також використовуються методи лiнiйної алгебри.

Отримана блокова форма жмутка та вiдповiднi проектори можуть бути використанi при розв'язаннi рiзноманiтних задач. Зокрема, вони можуть бути застосованi для зведення сингулярного напiвлiнiйного диференцiально-операторного рiвняння до еквiвалентної системи iз суто диференцiальних i суто алгебраїчних рiвнянь. Це значно полегшує аналiз та розв'язання диференцiально-операторних рiвнянь.
Ключовi слова: жмуток операторiв; жмуток матриць; сингулярний; регулярний блок; блокова форма; структура.

M. S. Filipkovska (Filipkovskaya). **A block form of a singular pencil of operators and a method of obtaining it.** A block form of a singular operator pencil $\lambda A + B$, where λ is a complex parameter, and the linear operators A, B act in finite-dimensional spaces, is described. An operator pencil $\lambda A + B$ is called regular if $n = m = rk(\lambda A + B)$, where $rk(\lambda A + B)$ is the rank of the pencil and m, n are the dimensions of spaces (the operators map an n-dimensional space into an m-dimensional one); otherwise, if $n \neq m$ or $n = m$ and $rk(\lambda A + B) < n$, the pencil is called singular (irregular). The block form (structure) consists of a singular block, which is a purely singular pencil, i.e., it is impossible to separate out a regular block in this pencil, and a regular block. In these blocks, zero blocks and blocks, which are invertible operators, are separated out. A method of obtaining the block form of a singular operator pencil is described in detail for two special cases, when $rk(\lambda A + B) = m < n$ and $rk(\lambda A + B) = n < m$, and for the general case, when $rk(\lambda A + B) < n, m$. Methods for the construction of projectors onto subspaces from the direct decompositions, relative to which the pencil has the required block form, are given. Using these projectors, we can find the form of the blocks and, accordingly, the block form of the pencil. Examples of finding the block form for the various types of singular pencils are presented. To obtain the block form, in particular, the results regarding the reduction of a singular pencil of matrices to the canonical quasidiagonal form, which is called the Weierstrass-Kronecker canonical form, are used. Also, methods of linear algebra are used.

The obtained block form of the pencil and the corresponding projectors can be used

to solve various problems. In particular, it can be used to reduce a singular semilinear differential-operator equation to the equivalent system of purely differential and purely algebraic equations. This greatly simplifies the analysis and solution of differential-operator equations.
Keywords: operator pencil; matrix pencil; singular; regular block; block form; structure.

Article history: Received: 8 February 2019; Final form: 10 May 2019;
Accepted: 15 May 2019.