Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 89, 2019, с. 10–20

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 89, 2019, p. 10–20
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-02

УДК 517.9

Слабонелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

О.В. Несмелова

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Славянск, Донецкая область, ул. Г. Батюка, 19, 84116 Украина
star-o@ukr.net

Получены достаточные условия существования решения нелинейной нетеровой краевой задачи для системы дифференциально-алгебраических уравнений. Исследован случай невырожденной системы дифференциально-алгебраических уравнений, а именно: дифференциально-алгебраической системы, приводимой к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольной непрерывной функцией.
Ключевые слова: нелинейные нетеровы краевые задачи; дифференциально-алгебраические уравнения; псевдообратные матрицы.

Нєсмєлова О.В. **Слабконелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем.** Отримано достатні умови існування розв'язку нелінійної нетерової крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь. Досліджено випадок невиродженої системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, а саме: диференціально-алгебрачної системи, що приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь з довільною неперервною функцією.
Ключові слова: нелінійні нетерові крайові задачі; диференціально-алгебраїчні рівняння; псевдообернена матриця.

O.V. Nesmelova. **Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system.** We obtained sufficient conditions of the existence of the nonlinear Noetherian boundary value problem solution for the system of differential-algebraic equations. We studied the case of the nondegenerate system of differential-algebraic equations, namely: the differential-algebraic system reduced to the system of ordinary differential equations with the arbitrary continuous function.
Keywords: nonlinear Noetherian boundary value problems; differential-algebraic equations; pseudoinverse matrices.

2010 Mathematics Subject Classification 34B15.

1. Линейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

Исследуем задачу о построении решений $z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ линейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k; \tag{1}$$

здесь

$$A(t),\ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b] := \mathbb{C}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{m\times n}$$

— непрерывные матрицы, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ — непрерывный вектор-столбец; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал: $\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^k$. Матрицу $A(t)$ предполагаем, вообще говоря, прямоугольной: $m \neq n$, либо квадратной, но вырожденной.

Исследованию дифференциально-алгебраических уравнений при помощи центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц посвящены монографии [1, 2, 3, 4]. В статьях [5, 6] предложена серия достаточных условий разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина задачи Коши для линейной дифференциально-алгебраической системы (1) без использования центральной канонической формы и совершенных пар и троек матриц. В статье [7] предложены условия разрешимости, а также конструкции обобщенного оператора Грина краевой задачи линейной дифференциально-алгебраической системы (1). При условии [5, 6, 7]

$$P_{A^*(t)} = 0, \quad A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}_{n\times n}[a;b], \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a;b] \tag{2}$$

система (1) разрешима относительно производной

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)); \tag{3}$$

здесь $\operatorname{rank} A(t) := \sigma_0 = m \leq n$. Кроме того,

$$\mathfrak{F}_0(t,\nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообратная (по Муру – Пенроузу), $P_{A^*}(t)$ — матрица-ортопроектор [12]: $P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$– матрица, составленная из ρ_0 линейно-независимых столбцов $(n \times n)$– матрицы-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким образом, при условии $\rho_0 \neq 0$ система (3), разрешенная относительно производной, зависит от произвольной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t)$. Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Заметим, что нормальная фундаментальная матрица $X_0(t)$ невырождена. При условии (2) система (3), а следовательно и система (1), имеет решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s,\nu_0(s))\,ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая лемма [7].

Лемма 1 *При условии (2) система (1) имеет решение вида*

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1).

Поскольку при условии (2) система (1) разрешима для любой неоднородности $f(t)$, постольку, по аналогии с классификацией импульсных краевых задач [9, 10] случай (2) будем называть невырожденным. С другой стороны, в отличие от классификации импульсных краевых задач речь идет о разрешимости дифференциально-алгебраической системы (1), а не соответствующей краевой задачи. Предположим, что уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. Подставляя общее решение

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

задачи Коши $z(a) = c$ для дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Q\,c = \alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot). \tag{4}$$

Уравнение (4) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{5}$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*}, кроме того $Q := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{k\times n}$. При условии (5) и только при нем общее решение уравнения (4)

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}\,c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение краевой задачи (1)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

Здесь P_Q — матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. При условии (5) и только при нем для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (1)

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) := X_0(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t).$$

Следствие 1 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (1) удовлетворяет требованиям леммы 1. При условии $P_{Q^*} = 0$, краевая задача (1) разрешима для любых неоднородностей $f(t)$ и α. Общее решение краевой задачи (1)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина $G[f(s);\nu_0(s);\alpha](t)$ дифференциально-алгебраической краевой задачи (1).

Пример 1. Требованиям следствия 1 удовлетворяет дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t)\,z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \;\; \ell z(\cdot) := \Upsilon\left(z(0) + z(\pi)\right) = 0, \tag{6}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (2) выполнено, постольку система (6) невырождена и имеет решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 1-\cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \cos t - \cos 3t \\ \sin 3t - \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица $A(t)$ прямоугольная, при этом

$$\rho_0 = 1 \neq 0, \quad P_A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{A_{\rho_0}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

поэтому найденное решение зависит от произвольной непрерывной скалярной функции; в данном случае $\nu_0(t) := 0$. Общее решение однородной задачи (6) определяет матрица полного ранга

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = 0.$$

Таким образом, находим общее решение неоднородной задачи (6)

$$z(t, c_r) = X_r(t) c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1;$$

здесь

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \sin t & 1 \end{pmatrix}^*, \quad G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t) = K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина дифференциально-алгебраической краевой задачи (6).

2. Нелинейные краевые задачи для невырожденных дифференциально-алгебраических систем

Исследуем задачу о построении решений

$$z(t, \varepsilon): \; z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \; z(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0]$$

нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$A(t) z'(t, \varepsilon) = B(t) z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z, t, \varepsilon), \tag{7}$$

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha. \tag{8}$$

Решения нетеровой ($n \neq k$) краевой задачи (7), (8) ищем в малой окрестности решения $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ порождающей задачи

$$A(t) z_0'(t) = B(t) z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{9}$$

Здесь $Z(z, t, \varepsilon)$ — нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t)$ в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывная по $t \in [a, b]$ и непрерывная по малому параметру. Нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача (7) обобщает многочисленные постановки нелинейных нетеровых краевых задач [11, 12]. Предположим, что порождающая краевая задача (9) удовлетворяет требованиям следствия 1; при этом система (7) разрешима относительно производной

$$z' = A^{+}(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) + \varepsilon\, A^{+}(t)Z(z, t, \varepsilon). \tag{10}$$

Предположим, что порождающая краевая задача (9) невырождена и некритична ($P_{Q^*} = 0$), то есть, удовлетворяет требованиям следствия 1, при этом порождающая задача (9) разрешима для любых неоднородностей $f(t)$ и α. Общее решение порождающей дифференциально-алгебраической краевой задачи (9) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет вид

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Решения краевой задачи (8), (10) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи: $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$. Фиксируя одну из констант $c_r \in \mathbb{R}^r$, для нахождения вектора

$$x(t, \varepsilon) : \ x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \ \ x(t, \cdot) \in \mathbb{C}^1[0, \varepsilon_0], \ \ x(t, 0) \equiv 0$$

аналогично [12], приходим к задаче

$$x' = A^{+}(t)B(t)x + \varepsilon\, A^{+}(t)Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \ \ \ell x(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

В некритическом случае задача (11) разрешима для любой нелинейности. Общее решение дифференциально-алгебраической краевой задачи (11) для фиксированной непрерывной вектор-функции $\nu_0(t) \in \mathbb{C}[a, b]$ имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + G\Big[A^{+}(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); 0\Big](t).$$

Решения краевой задачи (7), (8) при этом определяет операторная система [12, 13]

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \ \ x(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = G\Big[A^{+}(s)Z(z_0 + x, s, \varepsilon); \nu_0(s); 0\Big](t).$$

Для построения решений этой операторной системы применим метод простых итераций; таким образом получаем итерационную схему [12, 13]

$$\begin{gathered} z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x_{k+1}(t, \varepsilon), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \dots\,, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t)c(\varepsilon) + x^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon) = G\Big[A^{+}(s)Z(z_0 + x_k, s, \varepsilon); \nu_0(s)\Big](t). \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2 *Предположим, что дифференциально-алгебраическое уравнение (9) удовлетворяет требованиям следствия 1. В некритическом случае* $(P_{Q^*} = 0)$ *порождающая задача (9) разрешима при любых неоднородностях дифференциально-алгебраической системы и краевого условия (9) и имеет* $r-$ *линейно-независимых решений*

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

При дополнительном условии

$$A^+(\cdot)Z(z, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}[a; b], \;\; A^+(t)Z(\cdot, t, \varepsilon) \in \mathbb{C}\big[||z - z_0|| < q\big] \tag{13}$$

для построения решений дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) применима сходящаяся при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ *итерационная схема (12).*

Для определения величины ε_* может быть использован метод мажорирующих уравнений Ляпунова [11, 12]; кроме того, аналогичная оценка величины ε_* найдена в статье [13].

Пример 2. Требованиям теоремы 2 удовлетворяет нелинейная дифференциально-алгебраическая краевая задача

$$A(t)\, z'(t, \varepsilon) = B(t)z(t, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon\, Z(z, \varepsilon), \;\; \ell z(\cdot, \varepsilon) = 0, \tag{14}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

кроме того

$$z(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_a(t, \varepsilon) \\ z_b(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 3t \end{pmatrix}, \quad \Upsilon := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(z, \varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 \\ z_a^3(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := \Upsilon\, (z(0, \varepsilon) + z(\pi, \varepsilon)).$$

В примере 2 было показано, что порождающая система для уравнения (14) невырождена, а также найдены матрица $X_0(t)$ и оператор $K[f(s), \nu_0(s)](t)$. В случае уравнения (14) порождающее решение зависит от произвольной непрерывной функции; положим, как и в примере 2: $\nu_0(t) := 0$. Фиксируя константу $c_r := 10^{-1}$, находим

$$z_0(t, c_r) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 4 + \cos t - 5\cos 3t \\ 15\sin 3t - \sin t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для построения решений нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14) применима итерационная схема (12), при этом, полагая $c(\varepsilon) := 0$, имеем:

$$x_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_{1a}(t,\varepsilon) \\ x_{1b}(t,\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$x_{1a}(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{28\ 672\ 000}\Big(-98\ 560 + 125\ 312\cos t - 8\ 064\cos 2t -$$

$$-19\ 096\cos 3t - 1\ 792\cos 4t + 280\cos 5t + 1\ 920\cos 6t + 175\cos 7t -$$

$$-175\cos 9t + 18\ 480\,\pi\sin t - 18\ 480\, t\sin t\Big),$$

$$x_{1b}(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{28\ 672\ 000}\Big(18\ 480\,(\pi - t)\cos t - 143\ 792\sin t +$$

$$+16\ 128\sin 2t + 57\ 288\sin 3t + 7\ 168\sin 4t - 1\ 400\sin 5t -$$

$$-11\ 520\sin 6t - 1\ 225\sin 7t + 1\ 575\sin 9t\Big).$$

Для оценки точности найденных приближений к решению нелинейной дифференциально-алгебраической краевой задачи (14) определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \Big|\Big| A(t)\, z_k'(t,\varepsilon) - B(t) z_k(t,\varepsilon) - f(t) - \varepsilon\, Z(z,\varepsilon)\Big|\Big|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}$$

нулевого и первого приближения к решению краевой задачи (14). Положив $\varepsilon = 0,1$, $k = 0,\ 1$, имеем

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,00\ 134\ 314, \quad \Delta_1(0,1) \approx 8,94\ 744 \cdot 10^{-6}.$$

Отметим также, что первое приближение к решению краевой задачи (14) в точности удовлетворяет краевому условию.

Доказанная теорема 2 обобщает соответствующие утверждения [12] на случай нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) в некритическом случае. Результаты теоремы 2 легко могут быть перенесены на матричные краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем [14]. Для построения решений нелинейной невырожденной дифференциально-алгебраической краевой задачи (7), (8) применим метод наименьших квадратов [15].

ORCID ID

O. V. Nesmelova https://orcid.org/0000-0003-2542-5980

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov. Algebro-differentsialnyye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya. 1998. Nauka, Novosibirsk, 224 p.

2. A.M. Samoilenko, M.I. Shkil, V.P. Yakovets. Linijni systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniam. 2000. Vyshcha shkola, Kyiv, 296 p.

3. S.L. Campbell. Singular Systems of differential equations. 1980. Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco – London – Melbourne, 178 p.

4. E. Khayrer, G. Vanner. Resheniye obyknovennykh differentsialnykh uravneniy. Zhestkiye i differentsialno-algebraicheskiye zadachi. 1999. Myr, M., 686 p.

5. S.M. Chuiko. Lineynyye neterovy krayevyye zadachi dlya differentsialno-algebraicheskikh sistem, Komp. issledov. i modelirovaniye. — 2013. — 5. V. **5**. — P. 769-783.

6. S.M. Chuiko. A generalized matrix differential-algebraic equation, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). — 2015. — 210. V. **1**. — P. 9-21.

7. S.M. Chuiko. On a Reduction of the Order in a Differential-Algebraic System, Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — 235, V. **1**. — P. 2-14.

8. A.A. Boichuk, A.A. Pokutnyi, V.F. Chistyakov. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics., — 2013. — 53, V. **6**. — P. 958-969.

9. A.M. Samoylenko, N.A. Perestyuk. Differentsialnyye uravneniya s impulsnym vozdeystviyem. 1987. Vishcha shkola, Kyiv, — 287 p.

10. S.M. Chuiko. A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action, Differential Equations., — 2001. — 37, V. **8**. — P. 1189-1193.

11. E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, Konstruktivnyye metody analiza nelineynykh sistem. 1979. Nauka, M., 432 p.

12. A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. 2016. Berlin; Boston, De Gruyter, 298 p.

13. A.S. Chuiko. Domain of Convergence of an Iteration Procedure for a Weakly Nonlinear Boundary-Value Problem, Nonlinear oscillation., — 2005. — 8, V. **2**. — P. 277-287.

14. S.M. Chuiko. Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation, Russian Mathematics., — 2016. — 60, V. **8**. — P. 64-73.

15. S.M. Chuiko, O.V. Starkova. About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods, Nonlinear oscillation., — 2009. — 12, V. **4**. — P. 556-573.

Нєсмєлова О. В. **Слабконелінійні крайові задачі для невироджених диференціально-алгебраїчних систем.** У статті отримано достатні умови існування розв'язку нелінійної нетерової крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, широко використовуваних в механіці, економіці, електротехніці та теорії управління. Досліджено випадок невиродженої системи диференціально-алгебраїчних рівнянь, а саме: диференціально-алгебраїчної системи, розв'язної відносно похідної. В цьому випадку нелінійна система диференціально-алгебраїчних рівнянь зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь з довільною неперервною функцією. Досліджена в статті нелінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача узагальнює численні постановки нелінійних нетерових крайових задач, що розглядалися в монографіях А.М. Самойленка, Е.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука і С.М Чуйка, а отримані результати можуть бути перенесені на матричні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних систем.

Отримані в статті результати дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач, на відміну від робіт С. Кемпбелла, В.Ф. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка і О.А. Бойчука, не передбачають використання центральної канонічної форми, а також досконалих пар і трійок матриць. Для побудови розв'язків даної крайової задачі запропонована ітераційна схема з використанням методу простих ітерацій.

Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі проілюстровані на прикладі. Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі знайдені нев'язки отриманих наближень у початковому рівнянні. Відзначимо також, то знайдені наближення до розв'язку нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі в точності відповідають крайовій умові.
Ключові слова: нелінійні нетерові крайові задачі; диференціально-алгебраїчні рівняння; псевдообернена матриця.

O. V. Nesmelova. **Seminonlinear boundary value problems for nondegenerate differential-algebraic system.** In the article we obtained sufficient conditions of the existence of the nonlinear Noetherian boundary value problem solution for the system of differential-algebraic equations which are widely used in mechanics, economics, electrical engineering, and control theory. We studied the case of the nondegenerate system of differential algebraic equations, namely: the differential algebraic system that is solvable relatively to the derivative. In this case, the nonlinear system of differential algebraic equations is reduced to the system of ordinary differential equations with an arbitrary continuous function. The studied nonlinear differential-algebraic boundary-value problem in the article generalizes the numerous statements of the non-linear non-Gath boundary value problems considered in the monographs of A.M. Samoilenko, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, A.A. Boichuk and S.M. Chuiko, and the obtained results can be carried over matrix boundary value problems for differential-algebraic systems.

The obtained results in the article of the study of differential-algebraic boundary value problems, in contrast to the works of S. Kempbell, V.F. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko and A.A. Boychuk, do not involve the use of the central canonical form, as well as perfect pairs and triples of matrices. To construct solutions of the considered boundary value problem, we proposed the iterative scheme using the method of simple iterations.

The proposed solvability conditions and the scheme for finding solutions of the nonlinear Noetherian differential-algebraic boundary value problem, were illustrated with an example. To assess the accuracy of the found approximations to the solution of the nonlinear differential-algebraic boundary value problem, we found the residuals of the obtained approximations in the original equation. We also note that obtained approximations to the solution of the nonlinear differential-algebraic boundary value problem exactly satisfy the boundary condition.

Keywords: nonlinear Noetherian boundary value problems; differential-algebraic equations; pseudoinverse matrices.

Article history: Received: 1 October 2018; Final form: 20 February 2019;
Accepted: 22 February 2019.