Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 88, 2018, с. 27–34

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. “Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics”
Vol. 88, 2018, p. 27–34
DOI: 10.26565/2221-5646-2018-88-03

УДК 517.9

К вопросу о регуляризации задачи Коши для системы линейных разностных уравнений

С. М. Чуйко, Я. В. Калиниченко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, 84 116 Донецкая обл., ул. Генерала Батюка, 19, chujko-slav@inbox.ru

Чуйко С. М., Калініченко Я. В. **Про регуляризацію задачі Коші для системи лінійних різницевих рівнянь.** Отримано оригінальну схему регуляризації задачі Коші для виродженої системи лінійних різницевих рівнянь.
Ключові слова: регуляризація; задача Коші; лінійні різницеві рівняння; псевдообернена матриця.

Чуйко С. М., Калиниченко Я. В. **К вопросу о регуляризации задачи Коши для системы линейных разностных уравнений.** Предложена оригинальная схема регуляризации задачи Коши для линейной вырожденной системы разностных уравнений.
Ключевые слова: регуляризация, задача Коши, линейные разностные уравнения, псевдообратные матрицы.

S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko. **On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations.** An original regularization scheme for the Cauchy problem for a linear singular system of difference equations is proposed.
Keywords: regularization scheme; Cauchy problem, linear difference equations; pseudoinverse matrices.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A24; 34B15; 34C25.

1. Невырожденные системы линейных разностных уравнений

Исследуем задачу о нахождении ограниченных решений $z(k) \in \mathbb{R}^n$ системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1) = A(k)z(k) + f(k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ; \tag{1}$$

здесь $A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ограниченные матрицы и $f(k)$ — действительные ограниченные вектор-столбцы. Как известно [1], общее решение задачи Коши

$$z(0) = c \in \mathbb{R}^n$$

для однородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $X(k)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1) = A(k)X(k), \quad X(0) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k) = \prod_{j=0}^{k-1} A(j).$$

Общее решение задачи Коши $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной части невырожденной ($\det A(k) \neq 0$) системы разностных уравнений (1) представимо в виде:

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k) := X(k) \sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для системы разностных уравнений (1).

2. Стандартное разложение матрицы.

Предположим, что матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно:

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma.$$

Как известно [6, 7, 8], любая $(m \times n)-$ матрица $A(k)$ в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения

$$A(k) = R(k) \cdot J_\sigma \cdot S(k), \quad J_\sigma := \begin{pmatrix} I_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix};$$

здесь $R(k)$ и $S(k)$ — ограниченные невырожденные матрицы. Стандартное разложение матрицы $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ может быть получено при помощи сингулярного разложения матрицы [9]

$$A(k) = \Phi(k)\Lambda\Psi(k),$$

где $\Phi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — унитарные матрицы и $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — диагональная матрица:

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \Lambda_\sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \det \Lambda_\sigma \neq 0.$$

Используя сингулярное разложение $A(k) = \Phi(k)\,\Lambda\,\Psi(k)$, находим невырожденные матрицы

$$R(k) = \Phi(k), \quad S(k) = \begin{pmatrix} \Lambda_\sigma & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix} \Psi(k),$$

необходимые для нахождения стандартного разложения матрицы $A(k)$.

Пример 1. *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

приводится к стандартному разложению посредством матриц

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\operatorname{rank} A = 2$, при этом сингулярное разложение определяют матрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \ \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ J_\sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим матрицы $R = \Phi$ и S, необходимые для нахождения стандартного разложения матрицы A.

3. Регуляризация задачи Коши для системы линейных разностных уравнений

Задача о нахождении ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) существенно усложняется в случае ее вырождения, а именно: при условии $\det A(k) = 0$ хотя бы для некоторых $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$. В этом случае для нахождения ограниченных решений системы линейных разностных уравнений (1) можно использовать технику регуляризации [2, 3, 4, 5]. Возмущение квадратной, но вырожденной матрицы $A(k)$ будем искать в виде

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon) := A(k) + \varepsilon\,\Omega(k), \quad \Omega(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

предполагая матрицу $\mathcal{A}(k,\varepsilon)$ невырожденной и ограниченной. Таким образом, приходим к задаче о нахождении ограниченных решений

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

регуляризованной системы линейных разностных уравнений

$$z(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon) z(k,\varepsilon) + f(k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{2}$$

Поскольку любая $(n\times n)$ – матрица $A(k)$ постоянного ранга σ в определенном базисе может быть представлена в виде стандартного разложения $A(k) = R(k)\cdot J_\sigma \cdot S(k)$, постольку возмущение матрицы $A(k)$ представимо в виде

$$\Omega(k) = R(k)\cdot \check{J}_\sigma \cdot S(k), \quad \check{J}_\sigma := \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-\sigma} \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши

$$z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$$

для однородной части невырожденной ($\det \mathcal{A}(k,\varepsilon) \neq 0$) системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c, \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $X(k,\varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(k+1,\varepsilon) = \mathcal{A}(k,\varepsilon)X(k,\varepsilon), \quad X(0,\varepsilon) = I_n.$$

Одной из фундаментальных матриц является, в частности, матрица

$$X(k,\varepsilon) = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}(j,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j), \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Предположим, что $(n \times n)$ – матрица $A(k)$ имеет постоянный ранг, а именно:*

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma < n.$$

Тогда общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений (2) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon) = X(k,\varepsilon)c + K[f(j)](k,\varepsilon), \quad c \in \mathbb{R}^n;$$

здесь

$$K[f(j)](k,\varepsilon) := X(k,\varepsilon)\sum_{j=0}^{k-1} X^{-1}(j+1,\varepsilon)f(j)$$

— оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (2).

Пример 2. *Найдем решение системы разностных уравнений первого порядка*

$$z(k+1) = Az(k) + f(k), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{3}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix},\quad f(k)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Для нахождения возмущенной матрицы

$$\mathcal{A}(k,\varepsilon)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&10\\5&4\,\varepsilon&-2\,\varepsilon\\10&-2\,\varepsilon&\varepsilon\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}(k,0)=A,$$

определяющей регуляризованную систему линейных разностных уравнений используем возмущение матрицы A в виде

$$\Omega=R\cdot\check{J}_\sigma\cdot S,\quad J_\sigma:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

где

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\0&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&1&2\\\sqrt5&0&0\\0&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}.$$

При этом $X(k,\varepsilon)$ — нормальная фундаментальная матрица:

$$X(0,\varepsilon)=I_3,\quad X(1,\varepsilon)=\mathcal{A}(k,\varepsilon),$$

кроме того

$$X(2,\varepsilon)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&5+4\,\varepsilon^2&2\left(5-\varepsilon^2\right)\\0&2\left(5-\varepsilon^2\right)&20+\varepsilon^2\end{pmatrix},$$

$$X(3,\varepsilon)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&25&50\\25&4\,\varepsilon^3&-2\,\varepsilon^3\\50&-2\,\varepsilon^3&\varepsilon^3\end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи Коши $z(0,\varepsilon)=c\in\mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) представимо в виде:

$$z(k,\varepsilon)=X(k,\varepsilon)c+K[f(j)](k,\varepsilon),\quad c\in\mathbb{R}^3;$$

здесь

$$K[f(j)](1,\varepsilon)=f(1),\quad K[f(j)](2,\varepsilon)=\begin{pmatrix}45\\15+2\,\varepsilon\\25-\varepsilon\end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](3,\varepsilon)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}70\\55+2\,\varepsilon+2\,\varepsilon^2\\105-\varepsilon-\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

— оператор Грина регуляризованной задачи Коши для системы разностных уравнений (3). При этом нормальная фундаментальная матрица $X(k, \varepsilon)$ и оператор Грина задачи Коши для регуляризованной системы разностных уравнений (3) $K[f(j)](k, \varepsilon)$ непрерывны по ε :

$$X(k, \cdot), \ K[f(j)](k, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

поэтому общее решение задачи Коши $z(0, \varepsilon) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднородной регуляризованной системы разностных уравнений для системы (3) $z(k, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ обращается в точное решение $z(k)$ системы разностных уравнений (3)

$$z(k) = X(k)c + K[f(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^3;$$

здесь

$$X(1) = I_3, \quad X(2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X(3) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— нормальная фундаментальная матрица и

$$K[f(j)](1) = f(1), \quad K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}$$

— обобщенный оператор Грина вырожденной задачи Коши для системы разностных уравнений (3).

Доказанная теорема обобщает соответствующие результаты [1] на случай необратимости матрицы $A(k)$. Кроме того, полученные результаты аналогично [10] могут быть использованы в теории устойчивости для систем разностных уравнений, а также аналогично [11, 12] — в теории нелинейных нетеровых краевых задач для систем разностных уравнений.

Acknowledgement. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0115U003182.

REFERENCES

1. *A.A. Boichuk* Boundary-value problems for systems of difference equations. Ukrainian Mathematical Journal. — 1997. — **49**. № 6. — P. 930 — 934.

2. *S.G. Krein* Linear Differential Equations in Banach Space. — Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971. — 104 p.

3. *A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin* Solution of Ill-Posed Problems. — Winston, Washington, DC, (1977).— 1986. — 288 p.

4. *N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina* Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations.— World Federation Publ., Atlanta (1995) — 277 p.

5. *S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, A.V. Belushenko* On a regularization method for solving linear matrix equation. Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. — 2014. — **1**. — P. 12 — 14.

6. *V.I. Arnold, A.N. Varchenko, S.M. Gusein-Zade* Singularities of Differentiable Maps. 3rd ed M.: Izd. MTsNMO. — 2009. — 672 p. [in Russian].

7. *S.M. Chuiko* On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Ukr. mat. vestnik. — 2018. — **15**. — №1. — P. 1 —17 [in Russian].

8. *S.M. Chuiko* On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — **235**. — №1. — P. 2 — 18.

9. *V.V. Voevodin, Ya.A. Kuznetsov* Matrices and Calculations.— M.: Nauka. — 1984. — 318 p. [in Russian].

10. *V.I. Korobov, M.O. Bebiya* Stabilization of one class of nonlinear systems, Automation and Remote Control. — 2017 — Vol. 78 — Iss. 1— P. 1–15.

11. *A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter — 2016. — 298 pp.

12. *S.M. Chuiko* Generalized Green operator for a linear non-Ruby boundary value problem for a matrix difference equation. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki. — 2015. — №1 (26). — P. 104 — 116. [in Russian].

С.М. Чуйко **Про регуляризацію задачі Коші для системи лінійних різницевих рівнянь.** У статті запропоновано оригінальні умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром-Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов регуляризації лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної задачі Коші, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдений вигляд лінійного збурення регулярізованої лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь. Запропоновані умови регуляризації, а також схема знаходження розв'язків лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь детально проілюстровано на прикладах. На відміну від попередніх статей авторів, задача про регуляризацію лінійної задачі Коші для системи різницевих рівнянь розв'язана конструктивно, причому отримані достатні умови існування розв'язку задачі про регуляризацію.
Ключові слова: регуляризація; задача Коші; лінійні різницеві рівняння; псевдообернена матриця.

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko **On the regularization of the Cauchy problem for a system of linear difference equations.** The article proposes unusual regularization conditions as well as a scheme for finding solutions of the linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case, significantly using the Moore-Penrose matrix pseudo-inversion technology. The problem posed in the article continues the study of the regularization conditions for linear Noetherian boundary value problems in the critical case given in the monographs by S.G. Krein, N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. The general case is studied in which a linear bounded operator corresponding to a homogeneous part of a linear Cauchy problem has no inverse. In the article, a generalized Green operator is constructed and the type of a linear perturbation of a regularized linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case is found. The proposed regularization conditions, as well as the scheme for finding solutions to linear Cauchy problems for a system of difference equations in the critical case, are illustrated in details with examples. In contrast to the earlier articles of the authors, the regularization problem for a linear Cauchy problem for a system of difference equations in the critical case has been resolved constructively, and sufficient conditions has been obtained for the existence of a solution to the regularization problem. *Keywords:* regularization scheme; Cauchy problem, linear difference equations; pseudoinverse matrices.

Article history: Received: 20 November 2018; Final form: 10 December 2018;
Accepted: 13 December 2018.