Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 87, 2018, с. 42–60
УДК 517.946

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 87, 2018, p. 42–60
DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-04

Усреднённые тензор проводимости и функция поглощения локально-периодической пористой среды

Гончаренко М.В.[1], Хилькова Л.А.[2]

[1] *Физико-технический институт низких температур им. Б. Веркина, Украина*
[2] *Институт химических технологий ВНУ им. В. Даля, Украина*
marusya61@yahoo.co.ua, LarisaHilkova@gmail.com

Рассматривается задача, описывающая процесс стационарной диффузии в локально-периодической пористой среде с нелинейным поглощением на границе. Опираясь на работу, в которой эта задача рассматривалась в более широком классе перфорированных областей (сильно связных областях), мы получаем явные формулы для эффективных характеристик среды: тензора проводимости и функции поглощения.
Ключевые слова: усреднение, стационарная диффузия, нелинейная третья краевая задача, локально-периодическая пористая среда, тензор проводимости, функция поглощения.

Гончаренко М.В., Хількова Л.О. **Усереднені тензор провідності та функція поглинання локально-періодичного пористого середовища.** Розглядається задача, яка описує процес стаціонарної дифузії в локально-періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі. Опираючись на роботу, в якій ця задача розглядалася в більш широкому класі перфорованих областей (сильно зв'язних областях), ми отримуємо явні формули для ефективних характеристик середовища: тензора провідності та функції поглинання.
Ключові слова: усереднення, стаціонарна дифузія, нелінійна третя крайова задача, локально-періодичне пористе середовище, тензор провідності, функція поглинання.

M.V. Goncharenko, L.O. Khilkova. **Homogenized conductivity tensor and absorption function of a locally periodic porous medium.** We consider a problem describing the process of stationary diffusion in a locally-periodic porous medium with nonlinear absorption at the boundary. We base on a work, in which this problem considered in a wider class of perforated domains. We obtain explicit formulas for the effective characteristics of the medium: a conductivity tensor and a function of absorption.
Keywords: homogenization; stationary diffusion; non-linear third boundary value problem; locally periodic porous medium, conductivity tensor, function of absorption.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G65; 35Q80.

1. Введение

В химических технологиях, экологии и многих естественных науках возникает потребность в исследовании процессов диффузии в пористых средах с поглощением на границе пор. Эти процессы описываются краевой задачей для эллиптического уравнения, рассматриваемого в сложной перфорированной области, с третьим краевым условием на границе перфорации (в том числе нелинейным). В виду малости локального масштаба пористости среды ε и сложности рассматриваемой перфорированной области, непосредственное решение таких краевых задач практически невозможно ни аналитическими, ни численными методами. Поэтому естественный подход в этой ситуации заключается в исследовании асимптотического поведения решения, когда $\varepsilon \to 0$, и переходе к усреднённой макроскопической модели процесса, рассматриваемой уже во всей области без учёта перфорации.

Такие задачи в последнее время интенсивно изучались, но в основном для периодически перфорированных областей (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]). Задачи усреднения в перфорированных непериодических областях рассматриваются значительно реже, первые результаты для таких задач были получены в работах В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова ([12]), в которых было введено понятие сильной связности, играющее важную роль в вопросах усреднения. Усреднению уравнения диффузии в сильно-связных перфорированных областях с нелинейным поглощением на границе перфорации посвящены работы [13, 14]. В этих работах было доказано, что в сильно-связных областях усреднённое уравнение имеет вид

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x,u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где Ω – область процесса. Коэффициенты уравнения (1) являются эффективными характеристиками среды: $\{a_{ij}(x)\}_{i,j}$ – усреднённый тензор проводимости пористой среды, $c(x,u)$ – усреднённая функция поглощение на её границе; они выражаются через «мезоскопические» (локальные энергетические) характеристики среды, определяемые в малых кубах, размеры которых, тем не менее, много больше масштаба микроструктуры ε.

В работах [13, 14] теоремы сходимости доказывались при условиях существования предельных плотностей «мезоскопических» характеристик, выполнение которых показать в общем случае очень трудно, но в ряде конкретных ситуаций это можно сделать. В настоящей работе мы показываем выполнение этих условий и, исследуя их, получаем явные формулы для эффективных характеристик локально-периодической пористой среды. Точная формулировка этого результата была приведена в работе [15] без доказательства, в данной работе мы даём полное его доказательство.

2. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим локально-периодическую перфорированную область Ω^ε. Для уточнения структуры области Ω^ε введём следующие обозначения:

$$\Pi = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_i| \leqslant \frac{\theta_i}{2}, i = \overline{1,3}\right\}, \;\; \Pi^{\pm\delta} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leqslant \frac{\theta_i}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1,3}\right\} -$$

параллелепипеды в $\mathbb{R}^3$ с центрами в 0, здесь δ – произвольное малое число ($\delta \ll 1$),

$$\Pi^\varepsilon_{x^\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leqslant \frac{\theta_i \varepsilon}{2}, i = \overline{1,3}\right\} -$$

параллелепипеды в $\mathbb{R}^3$ с центрами в точках $x^\alpha = \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^\alpha e^i$, где $x_i^\alpha = m_i^\alpha \theta_i$ ($m_i^\alpha \in \mathbb{Z}$), и рёбрами, ориентированными по координатным осям. Параллелепипеды $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$ образуют периодическую решётку с периодом $\theta_i \varepsilon\, (i = \overline{1,3})$. Пусть F – область в Π с гладкой границей ∂F и центром масс в начале координат. Предположим, что пространство $\mathbb{R}^3$ разрезано на параллелепипеды $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$. В каждом параллелепипеде $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$, принадлежащем области Ω, находится множество $F^\varepsilon_{x^\alpha}$

$$F^\varepsilon_{x^\alpha} = \varepsilon F_{x^\alpha} + x^\alpha,$$

которое является трансляцией и гомотетическим сжатием F_{x^α}, полученного из множества F следующим образом:

$$F_x = f_x(F),\, \partial F_x = f_x(\partial F), \tag{2}$$

где $f_x(\xi)$ – диффеоморфизм из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, зависящим от точки $x \in \Omega$ (как от параметра) так, что $f_0(\xi) = I$ (I – тождественное отображение), $\forall\, x \in \Omega :\, F_x \subset \Pi^{-2\delta}$ и

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_{C^1(\Omega)} \leqslant C\, |x_1 - x_2|\,. \tag{3}$$

Область $\Omega^\varepsilon = \Omega \backslash F^\varepsilon$, где $F^\varepsilon = \cup_\alpha F^\varepsilon_{x^\alpha}$ будем называть локально-периодической.

Другое определение локально-периодической структуры перфорированной области было дано в работе [16].

В локально-периодической области Ω^ε рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial F^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

где функции $f^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ и $\sigma^\varepsilon(x,u)$ заданы. Относительно функции $\sigma^\varepsilon(x,u)$ предположим, что она удовлетворяет следующим условиям:

a_1: $\sigma^\varepsilon(x,u) = \varepsilon\sigma(x,u)$, где $\sigma(x,u)$ непрерывна по $x \in \Omega^\varepsilon$ и по переменной u удовлетворяет следующему условию Липшица $\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(x,u_1) - \sigma(x,u_2)| \leqslant C(1 + |u_1|^{\Theta-1} + |u_2|^{\Theta-1})|u_1 - u_2| \ \left(\Theta < \frac{n}{n-2}\right);$$

a_2: $\forall\, u_1, u_2 \in \mathbb{R} : \ (\sigma^\varepsilon(x,u_1) - \sigma^\varepsilon(x,u_2)) \cdot (u_1 - u_2) \geqslant 0$;

a_3: $\sigma(x,0) = 0$.

Определение 1 *Обобщенным решением задачи* (4) *будем называть функцию* $u^\varepsilon(x)$ *из пространства* $H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, *удовлетворяющую тождеству*

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon, \nabla\varphi)\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\varphi\, d\Gamma = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega). \tag{5}$$

Известно, что при каждом фиксированном ε существует единственное обобщённое решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (4). Асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (4), рассматриваемой в более широком классе перфорированных областей – в сильно связных областях, было изучено в работах [13, 14]. В этих работах были определены условия сходимости (более сильные в работе [13] и более слабые в [14]) и получена усреднённая модель. Основной целью данной работы является проверка выполнения условий сходимости работы [13] для локально-периодических перфорированных областей и получение явных формул для эффективных характеристик пористой среды, которые являются коэффициентами усреднённого уравнения. При этом сходимость понимается в следующем смысле:

Определение 2 *Будем говорить, что последовательность функций* $\{\, u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)\,\}_\varepsilon$ *сходится в* $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, *если существует функция* $u(x) \in L^p(\Omega)$ *такая что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = 0.$$

Основной результат работы заключается в следующей теореме:

Теорема 1 *Пусть области* Ω^ε *являются локально-периодическими и функция* $f^\varepsilon(x)$, *продолженная нулём на множество* F^ε, *сходится слабо в* $L^2(\Omega)$ *к функции* $f(x)$. *Тогда решение* $u^\varepsilon(x)$ *задачи* (4) *сходится при* $\varepsilon \to 0$ *в* $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ $\left(p < \frac{2n}{n-2}\right)$ *к решению* $u(x)$ *усредненной задачи:*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}c_u(x,u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

коэффициенты которой вычисляются по формулам:
функция поглощения

$$c_u(x,u) = \frac{2|\partial F_x|}{|\Pi|}\sigma(x,u); \tag{7}$$

тензор проводимости $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}\left(1 - \frac{|F_x|}{|\Pi|}\right) - \frac{1}{|\Pi|}\int\limits_{\Pi\setminus F_x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V_i(\xi,x)}{\partial \xi_k}\frac{\partial V_j(\xi,x)}{\partial \xi_k}\,d\xi, \tag{8}$$

где $|\partial F_x|$, $|F_x|$, $|\Pi|$ *поверхностная и объёмные меры соответствующих множеств, функция* $V_i(\xi) = V_i(\xi,x)$ $(i=\overline{1,n})$ *является решением следующей „ячеечной“ задачи:*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i(\xi)}{\partial \xi_k^2} = 0, \quad \xi\in\Pi\setminus F_x, \\ \displaystyle\frac{\partial V_i(\xi)}{\partial \nu_\xi} = cos(\nu(\xi), e^i), \quad \xi\in\partial F_x, \\ V_i|_{\varGamma_k^+} = V_i|_{\varGamma_k^-}, \quad \displaystyle\frac{\partial V_i}{\partial \xi_k}|_{\varGamma_k^+} = \frac{\partial V_i}{\partial \xi_k}|_{\varGamma_k^-}, \quad k=\overline{1,n}, \\ \displaystyle\int\limits_{\Pi\setminus F_x} V_i(\xi)\,d\xi = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\varGamma_k^{\pm}$ *– противоположные грани в* Π, $\nu=\nu(\xi)$ *– единичный вектор внешней нормали к* F_x *в точке* $\xi\in F_x$.

Доказательство данной теоремы строится на изучении предельных переходов в условиях 1), 2) теоремы 1 работы [13], определяющих существование предельных плотностей мезоскопических характеристик пористой среды. Для удобства читателя определения мезоскопических характеристик и формулировку теоремы 1 работы [13] (теорема 2) мы приводим в следующем разделе.

3. Мезоскопические характеристики среды и основное усреднённое уравнение диффузии

Мезоскопические характеристики перфорированных областей Ω^ε – это локальные средние характеристики микроструктуры, рассматриваемые в «мезокубе» $K_h^z = K(z,h)$ с центром в точке z и рёбрами длиной h, ориентированными по координатным осям. Приставка «мезо» означает, что размер куба существенно больше размера микроструктуры ε, но существенно меньше размера всей области Ω^ε $(0<\varepsilon\ll h\ll 1)$.

Количественную характеристику проводимости зададим с помощью функционала относительно произвольного вектора $\ell \in \mathbb{R}^n$:

$$T^{\varepsilon}_{h,z}(\ell) = \inf_{v^{\varepsilon}} \int\limits_{K^z_h \cap \Omega^{\varepsilon}} \left\{ |\nabla v^{\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau} |v^{\varepsilon} - (x - z, \ell)|^2 \right\} dx, \tag{10}$$

где инфинум берётся в классе функций $v^{\varepsilon}(x) \in H^1(K^z_h \cap \Omega^{\varepsilon})$, $\tau \in (0, 2)$ – параметр штрафа. Этот функционал является однородно квадратичным относительно ℓ [12] и представим в виде

$$T^{\varepsilon}_{h,z}(\ell) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z, \varepsilon, h) \ell_i \ell_j, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{ij}(z, \varepsilon, h) = \\ &= \int\limits_{K^z_h \cap \Omega^{\varepsilon}} \left\{ \left(\nabla v^{\varepsilon}_i, \nabla v^{\varepsilon}_j \right) + h^{-2-\tau} [v^{\varepsilon}_i - (x_i - z_i)][v^{\varepsilon}_j - (x_j - z_j)] \right\} dx \end{aligned} \tag{12}$$

и v^{ε}_i – минимизант функционала $T^{\varepsilon}_{h,z}(\ell)$ при $\ell = e^i$ – орт оси x_i.

Количественную характеристику поглощения на границе ∂F^{ε} зададим с помощью функционала относительно произвольного $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &c(z, s; \varepsilon, h) = \\ &= \inf_{w^{\varepsilon}} \left[\int\limits_{K^z_h \cap \Omega^{\varepsilon}} \left\{ |\nabla w^{\varepsilon}|^2 + h^{-2-\tau} |w^{\varepsilon} - s|^2 \right\} dx + \int\limits_{K^z_h \cap \partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, w^{\varepsilon}) d\Gamma \right], \end{aligned} \tag{13}$$

где инфинум берётся в классе функций $w^{\varepsilon} \in H^1(K^z_h \cap \Omega^{\varepsilon})$, а функция $g^{\varepsilon}(x, u)$ определена формулой

$$g^{\varepsilon}(x, u) := 2 \int\limits_0^u \sigma^{\varepsilon}(x, s)\, ds. \tag{14}$$

Определение 3 *Будем говорить, что система областей $\Omega^{\varepsilon} \subset \Omega$ удовлетворяет условию сильной связности (или просто являются сильно связными), если для любой функции $v^{\varepsilon}(x) \in H^1(\Omega^{\varepsilon})$ существует функция $\tilde{v}^{\varepsilon}(x) \in H^1(\Omega)$ такая, что $v^{\varepsilon}(x) = \tilde{v}^{\varepsilon}(x)$ при $x \in \Omega^{\varepsilon}$ и справедливо неравенство*

$$\|\tilde{v}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \le C \|v^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega^{\varepsilon})}. \tag{15}$$

Основной результат работы [13] заключался в следующей теореме:

Теорема 2 *Пусть области Ω^ε являются сильно связными и $\exists\,\tau \in (0,\,2)$ при котором равномерно по $x \in \Omega$ выполняются условия:*
1) $\lim\limits_{h\to 0}\underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\frac{a_{ij}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = a_{ij}(x)$,
где $a_{ij}(x)$ – кусочно-непрерывные функции от x и $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ – положительно определённый, симметричный тензор в $\mathbb{R}^n$;
2) $\lim\limits_{h\to 0}\underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = \lim\limits_{h\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\frac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = c(x,s),\ \forall s \in \mathbb{R}$,
где функция $c(x,s)$ ограничена по x, дифференцируема по s и её производная $c_s(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}c(x,s)$ по переменной s удовлетворяет условиям монотонного возрастания и ограниченности на рост
$\forall\, s \in \mathbb{R} :\ c_s(x,s) \leqslant C(1+|s|^\theta),\ \Big(\theta < \frac{n+2}{n-2}\Big)$;
3) функция $f^\varepsilon(x)$, продолженная нулём на множество F^ε, при $\varepsilon \to 0$ сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$.

Тогда обобщённое решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (4) сходится в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)\Big(p < \frac{2n}{n-2}\Big)$ к функции $u(x)$, являющейся обобщённым решением усреднённой задачи (6).

4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего, докажем ряд вспомогательных лемм, которые будут использованы при доказательстве теоремы.

Лемма 1 *При достаточно малых ε существует единственное решение $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ задачи*

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_\alpha^\varepsilon(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}, \\ \dfrac{\partial v_\alpha^\varepsilon(\xi)}{\partial \nu_\xi} + \varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon v_\alpha^\varepsilon(\xi)) = 0, \quad \xi \in \partial F_{x^\alpha},\ s \in \mathbb{R}, \\ v_\alpha^\varepsilon(\xi) \to 0 \quad \textit{при} \quad |\xi| \to \infty, \end{cases} \tag{16}$$

где ν_ξ – единичная нормаль к границе ∂F_{x^α}, внешняя по отношению к области $\mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}$. Для этого решения справедливы следующие оценки:

$$\max_{\xi\in\Pi\setminus F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| < C\varepsilon, \tag{17}$$

$$\max_{\xi\in\Pi^{+\delta}\setminus\Pi^{-\delta}} |\nabla v_\alpha^\varepsilon(\xi)| < \frac{C}{\delta}\varepsilon. \tag{18}$$

Доказательство. Решение задачи (16) будем искать в виде потенциала простого слоя

$$v_\alpha^\varepsilon(\xi) = \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta-\xi|}\,d\Gamma_\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus F_{x^\alpha}.$$

Для того, чтобы функция $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ удовлетворяла граничному условию, плотность $\rho^\varepsilon(\xi)$ должна быть решением интегрального уравнения ([17, гл. 15])

$$\rho^\varepsilon(\xi) + R\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\psi^\varepsilon(\xi), \quad \xi \in \partial F_{x^\alpha}, \tag{19}$$

где оператор R, определённый равенством

$$R\rho^\varepsilon := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta - \xi, \nu_\eta)}{|\eta - \xi|^3} \rho^\varepsilon(\eta)\, d\Gamma_\eta,$$

действует из пространства $C(\partial F_{x^\alpha})$ в $C(\partial F_{x^\alpha})$, а функция $\psi^\varepsilon(\xi)$ является решением уравнения

$$\psi^\varepsilon(\xi) = -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon(\xi)). \tag{20}$$

Здесь через N обозначен оператор «Neumann to Dirichlet», который нормальной производной решения задачи (16) на границе ∂F_{x^α} ставит в соответствие значение самого решения на этой границе.

Обозначим оператор

$$A\psi^\varepsilon := -\varepsilon\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi^\varepsilon)$$

и запишем уравнение (20) в виде

$$\psi^\varepsilon = A\psi^\varepsilon. \tag{21}$$

Покажем, что при малых ε уравнение (21) имеет единственное решение в пространстве $C(\partial F_{x^\alpha})$. Прежде всего, если это уравнение имеет решение, то в силу свойств функции $\sigma(x, u)$ и ограниченности оператора N оно должно удовлетворять неравенству:

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_1\varepsilon \left(1 + s^\Theta + \varepsilon^\Theta \|\psi^\varepsilon\|^\Theta_{C(\partial F_{x^\alpha})}\right),$$

из которого вытекает следующая априорная оценка

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_2\varepsilon \tag{22}$$

и тогда

$$\|A\psi_1^\varepsilon - A\psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} = \varepsilon \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} |\sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon) - \sigma(x^\alpha + \varepsilon\xi, s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} \left(1 + |s + \varepsilon N\psi_1^\varepsilon|^{\Theta-1} + |s + \varepsilon N\psi_2^\varepsilon|^{\Theta-1}\right) |N\psi_1^\varepsilon - N\psi_2^\varepsilon| \leqslant$$
$$\leqslant C_3\varepsilon^2 \|\psi_1^\varepsilon - \psi_2^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})},$$

откуда следует, что при малых ε оператор A является сжимающим, и, следовательно, существует единственное решение уравнения (21) в пространстве $C(\partial F_{x^\alpha})$, которое удовлетворяет оценке (22).

Кроме того, функция $\psi^\varepsilon(\xi)$ является нормальной производной решения $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ на границе ∂F_{x^α}, тогда для функции $v_\alpha^\varepsilon(\xi)$ в силу принципа максимума справедлива оценка

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}^3\setminus F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| \leqslant \max_{\xi\in\partial F_{x^\alpha}} |v_\alpha^\varepsilon(\xi)| = \|N\psi^\varepsilon(\xi)\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_4\varepsilon.$$

Оценка (17) доказана.

Докажем оценку (18). В силу свойств потенциала простого слоя существует ограниченный обратный оператор $(I+R)^{-1}$, тогда из уравнения (19) плотность $\rho^\varepsilon(\xi)$ равна

$$\rho^\varepsilon(\xi) = -\frac{1}{2\pi}(I+R)^{-1}\psi^\varepsilon,$$

и для неё в силу (22) справедлива оценка

$$\|\rho^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} = \frac{1}{2\pi}\|(I+R)^{-1}\psi^\varepsilon\|_{C(\partial F_{x^\alpha})} \leqslant C_5\varepsilon.$$

Тогда при $\xi \in \Pi^{+\delta} \setminus \Pi^{-\delta}$ имеем

$$\left|\frac{\partial v_\alpha^\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_i}\right| = \left|\int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{(\eta_i-\xi_i)\rho^\varepsilon(\eta)}{|\eta-\xi|^3}\,d\Gamma_\eta\right| \leqslant \int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{|\rho^\varepsilon(\eta)|}{|\eta-\xi|^2}\,d\Gamma_\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_5\varepsilon}{\delta}\int\limits_{\partial F_{x^\alpha}} \frac{1}{|\eta-\xi|}\,d\Gamma_\eta \leqslant \frac{C_6\varepsilon}{\delta}.$$

Откуда и следует оценка (18). Лемма 1 доказана.

Далее построим «разбиение единицы» – набор гладких функций, используемых при построении аппроксимирующих функций. Построение «разбиения единицы» неоднократно рассматривалось ранее (см. например [18, гл. 2]), но обычно не делаются оценки производных, которые будут нужны нам в дальнейшем. Поэтому приводим доказательство полностью.

Покроем пространство $\mathbb{R}^n$ пересекающимися кубами $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$, с центрами в точках x^α и сторонами $h \ll 1$, ориентированными по координатным осям, образующими периодическую решётку периодом $h-r$, где r – толщина перекрытия.

Лемма 2 *По покрытию* $\{K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)\}_\alpha$ *можно построить «разбиение единицы»* $\{\varphi_\alpha(x)\}_\alpha$ *– набор гладких функций, удовлетворяющих условиям:*
1) $\varphi_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*;*
2) $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$*;*
3) $\varphi_\alpha(x) = 1$ *при* $x \in K_{h-2r}^\alpha$*;*
4) $\varphi_\alpha(x) = 0$ *при* $x \notin K_h^\alpha$*;*
5) $|D^\lambda \varphi_\alpha(x)| < \frac{C}{r^\lambda}$, $\lambda = 1, 2$, *где константа* C *не зависит от значений* h, r*;*
6) $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим на вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ функцию

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) \text{ при } -1 < x < 1, \\ 0 \text{ при остальных } x, \end{cases}$$

функция $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Пусть $0 < r \ll \frac{h}{2} \ll \frac{1}{2}$ – вещественные числа. Далее рассмотрим функцию, полученную сжатием в $\frac{r}{2}$ раз функции $f(x)$:

$$f_r(x) := f\left(\frac{2x}{r}\right),$$

которая также $f_r(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. По функции $f_r(x)$ построим функцию $F(x)$, определённую равенством

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{\int_{-\infty}^{x+\frac{h-r}{2}} f_r(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} \text{ при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\int_{x-\frac{h-r}{2}}^{+\infty} f_r(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $F(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ и $F(x) = 1$ при $-\frac{h}{2} + r \leqslant x \leqslant \frac{h}{2} - r$, $F(x) = 0$ при $x \leqslant -\frac{h}{2}$ или $x \geqslant \frac{h}{2}$, $F(x)$ возрастает от 0 до 1 при $-\frac{h}{2} < x < -\frac{h}{2} + r$ и убывает от 1 до 0 при $\frac{h}{2} - r < x < \frac{h}{2}$.

Оценим первую и вторую производные функции $F(x)$.

$$|F'(x)| \leqslant \frac{\max f_r(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = \frac{\exp(-1)}{\frac{r}{2}\int\limits_{-1}^{+1} f(t)\,dt} = \frac{C_1}{r},$$

$$|F''(x)| = \frac{\max |f_r'(x)|}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = \frac{\frac{2}{r}\max |f'(x)|}{\frac{r}{2}\int\limits_{-1}^{+1} f(t)\,dt} = \frac{C_2}{r^2},$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h, r.

Покроем вещественную ось $\mathbb{R}$ точками $x^{\alpha_i} = i(h-r)\,(i = -\infty, ..., +\infty)$ и определим функции, полученные с помощью сдвига функции $F(x)$

$$F_{\alpha_i}(x) = F(x - x^{\alpha_i}).$$

Очевидно, что в силу свойств функции $F(x)$ функции $F_{\alpha_i}(x)$ обладают свойствами: $F_{\alpha_i}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ и $F_{\alpha_i}(x) = 1$ при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r \leqslant x \leqslant x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r$, $F_{\alpha_i}(x) = 0$ при $x \leqslant x^{\alpha_i} - \frac{h}{2}$ или $x \geqslant x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, $F_{\alpha_i}(x)$ возрастает от 0 до 1 при $x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} < x < x^{\alpha_i} - \frac{h}{2} + r$ и убывает от 1 до 0 при $x^{\alpha_i} + \frac{h}{2} - r < x < x^{\alpha_i} + \frac{h}{2}$, и их производные удовлетворяют оценкам

$$|F'_{\alpha_i}(x)| \leqslant \frac{C_1}{r}, \quad |F''_{\alpha_i}(x)| \leqslant \frac{C_2}{r^2},$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h, r.

Докажем справедливость равенства

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) = 1. \tag{23}$$

Пусть точка $x \in [x^{\alpha_j} - h/2 + r, x^{\alpha_j} + h/2 - r]$, тогда это равенство очевидно

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) = F_{\alpha_j}(x) = 1.$$

Пусть точка $x \in [x^{\alpha_j} + h/2 - r, x^{\alpha_j} + h/2] = [x^{\alpha_{j+1}} - h/2, x^{\alpha_{j+1}} - h/2 + r]$ принадлежит двум смежным отрезкам разбиения, то есть лежит в их пересечении, тогда

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} F_{\alpha_i}(x) = F_{\alpha_j}(x) + F_{\alpha_{j+1}}(x) = \frac{\int\limits_{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)}^{+\infty} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} + \frac{\int\limits_{-\infty}^{x-\left(x^{\alpha_{j+1}}-\frac{h-r}{2}\right)} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)}^{+\infty} f_r(t)dt + \int\limits_{-\infty}^{x-\left(x^{\alpha_j}+\frac{h-r}{2}\right)} f_r(t)dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_r(t)\,dt} = 1.$$

Равенство (23) доказано.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\}$ – мультииндекс), определённую при $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ формулой

$$\varphi_\alpha(x) := \prod_{i=1}^{n} F_{\alpha^i}(x_i).$$

Легко видеть, что $\varphi_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi_\alpha(x) = 1$ при $x \in K^\alpha_{h-2r}$, $\varphi_\alpha(x) = 0$ при $x \notin K^\alpha_h$, $0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$ при $x \in K^\alpha_h \setminus K^\alpha_{h-2r}$. И кроме того,

$$|D\varphi_\alpha(x)| \leqslant \frac{\tilde{C}_1}{r}, \quad |D^2\varphi_\alpha(x)| \leqslant \frac{\tilde{C}_2}{r^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

где константы $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ не зависят от h, r. Таким образом, функция $\varphi_\alpha(x)$ удовлетворяет свойствам 1)-5). Докажем справедливость свойства 6). В силу (23) имеем

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} ... \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} F^{\alpha^j_{i_j}}(x_j) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^1_{i_1}}(x_1) \left(\sum_{i_2=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^2_{i_2}}(x_2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(... \left(\sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} F^{\alpha^n_{i_n}}(x_n) \right)\right)\right) = 1.$$

Свойство 6) доказано, искомая система функций построена. Лемма 2 доказана.

Для вывода формул (7) и (8) проведём предварительное построение. Предположим, что пространство $\mathbb{R}^3$ разрезано на не пересекающиеся параллелепипеды $\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}$. Построим концентрические с ними параллелепипеды

$$\Pi^{\pm\delta\varepsilon}_{x^\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_i - x_i^\alpha| \leqslant \frac{\theta_i \varepsilon}{2}(1 \pm \delta), i = \overline{1,3} \right\} \quad (0 < \delta \ll 1)$$

с которыми свяжем разбиение единицы $\{\varphi^\varepsilon_\alpha(x)\}_\alpha$ – набор гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi^\varepsilon_\alpha(x) = 1$ при $x \in \Pi^{-\delta\varepsilon}_{x^\alpha}$, $\varphi^\varepsilon_\alpha(x) = 0$ при $x \notin \Pi^{+\delta\varepsilon}_{x^\alpha}$, $\sum\limits_\alpha \varphi^\varepsilon_\alpha(x) = 1$, $|D^\lambda \varphi^\varepsilon_\alpha(x)| \leqslant \dfrac{C}{\varepsilon^{|\lambda|}\delta^{|\lambda|}}$ $(|\lambda| = 0,\, 1,\, 2)$ при $x \in \Omega$.

4.1. Вывод формулы (7)**.** Определим функцию

$$v^\varepsilon(x) = s + \varepsilon \sum_\alpha v^\varepsilon_\alpha\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}\right)\varphi^\varepsilon_\alpha(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon,\ s \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

где $\{\varphi^\varepsilon_\alpha(x)\}_\alpha$ – разбиение единицы, описанное выше, а функция $v^\varepsilon_\alpha(\xi)$ – решение задачи (16) для данного s. Функцию, минимизирующую функционал (13) в области $K^z_h \cap \Omega^\varepsilon$, будем искать в виде

$$w^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) + \hat{v}^\varepsilon(x). \tag{25}$$

Тогда функция $\hat{v}^\varepsilon(x)$ должна минимизировать функционал

$$J[\hat{v}^\varepsilon] = I_0(\varepsilon, h) + I_1(\varepsilon, h) + I_2(\varepsilon, h)$$

в классе функций $H^1(K^z_h \cap \Omega^\varepsilon)$, где

$$I_0(\varepsilon, h) = \int\limits_{K^z_h \cap \Omega^\varepsilon} \left[|\nabla \hat{v}^\varepsilon(x)|^2 + h^{-2-\tau}|\hat{v}^\varepsilon(x)|^2 \right] dx,$$

$$I_1(\varepsilon, h) = -2 \int\limits_{K^z_h \cap \Omega^\varepsilon} \left[\Delta v^\varepsilon(x)\hat{v}^\varepsilon(x) - h^{-2-\tau}(v^\varepsilon(x) - s)\hat{v}^\varepsilon(x) \right] dx,$$

$$I_2(\varepsilon, h) = \int\limits_{K^z_h \cap \partial F^\varepsilon} \left[g^\varepsilon(x, v^\varepsilon + \hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) + 2\frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial \nu}\hat{v}^\varepsilon(x) \right] d\Gamma.$$

Так как $J[\hat{v}^\varepsilon] \leqslant J[0] = 0$, то

$$I_0(\varepsilon, h) \leqslant |I_1(\varepsilon, h)| + |I_2(\varepsilon, h)|. \tag{26}$$

Оценим каждое слагаемое правой части этого неравенства.

Из (17), (18), (24) и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant 2\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta v^\varepsilon \hat{v}^\varepsilon\,dx\right| + 2h^{-2-\tau}\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}(v^\varepsilon - s)\hat{v}^\varepsilon\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|\Delta v^\varepsilon|^2\,dx}\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|\hat{v}^\varepsilon|^2\,dx} + 2h^{-2-\tau}\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|v^\varepsilon - s|^2\,dx}\times$$

$$\times\sqrt{\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|\hat{v}^\varepsilon|^2\,dx} \leqslant 2h^{1+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\sqrt{\sum_\alpha\int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus\Pi^{-\delta\varepsilon}_{x^\alpha}}|\Delta v^\varepsilon|^2\,dx +}$$

$$+\,2h^{-1-\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\sqrt{\sum_\alpha\int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha}}|v^\varepsilon - s|^2\,dx} \leqslant C_1 I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\times$$

$$\times\left(h^{1+\tau/2}\sqrt{\frac{1}{\delta^4}\sum_\alpha mes(\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus\Pi^{-\delta\varepsilon}_{x^\alpha})} + h^{-1-\tau/2}\sqrt{\varepsilon^4\sum_\alpha mes(\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha})}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 I_0^{1/2}(\varepsilon,h)\left(\frac{h^{3/2+1/2+\tau/2}}{\delta^{3/2}} + h^{3/2-1-\tau/2}\varepsilon^2\right).$$

Таким образом, при $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ и $0 < \varepsilon \leqslant h^{1/2+3\tau/8}$ имеем

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant Ch^{3/2+\tau/4}I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \tag{27}$$

Получим оценку для $I_2(\varepsilon,h)$. Так как ([13, Л.1])

$$\forall\, x\in K_h^z\cap\Omega^\varepsilon:\quad |w^\varepsilon(x)| \leqslant |s|,$$

тогда в силу определений функций $w^\varepsilon(x)$ (25), $g^\varepsilon(x,s)$ (14), свойств функции $\sigma(x,u)$ и интегральной теоремы о среднем, имеем

$$|I_2(\varepsilon,h)| = \left|\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}\left[g^\varepsilon(x,v^\varepsilon+\hat{v}^\varepsilon) - g^\varepsilon(x,v^\varepsilon) + 2\frac{\partial v^\varepsilon(x)}{\partial\nu}\hat{v}^\varepsilon(x)\right]d\Gamma\right| =$$

$$= 2\varepsilon\left|\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}\left[\int\limits_{v^\varepsilon}^{v^\varepsilon+\hat{v}^\varepsilon}\sigma(x,r)\,dr - \sigma(x,v^\varepsilon)\hat{v}^\varepsilon\right]d\Gamma\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}|\sigma(x,v^\varepsilon+\tilde{v}^\varepsilon) - \sigma(x,v^\varepsilon)|\,|\hat{v}^\varepsilon|\,d\Gamma \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(1+2|s|^{\Theta-1}\right)\varepsilon\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}|\hat{v}^\varepsilon|^2\,d\Gamma = C_2\varepsilon\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}|\hat{v}^\varepsilon|^2\,d\Gamma.$$

Здесь $0 \leqslant \tilde{v}^\varepsilon(x) \leqslant \hat{v}^\varepsilon(x)$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) \geqslant 0$ и $\hat{v}^\varepsilon(x) \leqslant \tilde{v}^\varepsilon(x) \leqslant 0$ при $\hat{v}^\varepsilon(x) < 0$.

Для любой функции $\varphi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ справедливо интегральное неравенство

$$\varepsilon \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} \varphi^2 \, d\Gamma_x \leqslant C \left(\int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \varphi^2 \, dx + \varepsilon^2 \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla_x \varphi|^2 \, dx \right).$$

Из которого при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$ для $I_2(\varepsilon, h)$ следует

$$|I_2(\varepsilon, h)| \leqslant C h^{2+\tau} I_0(\varepsilon, h). \tag{28}$$

Из (26), (27), (28) при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$, $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ получаем оценку

$$I_0(\varepsilon, h) = O(h^{3+\tau/2}) = o(h^3).$$

Таким образом, функция $\hat{v}^\varepsilon$ даёт малый вклад в предельную функцию поглощения. Тогда согласно (25) функция $v^\varepsilon(x)$ при малых h аппроксимирует минимизант $w^\varepsilon(x)$ функционала (13) в области $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$.

Подставляем $w^\varepsilon(x)$ в (13), учитывая свойства функции $\sigma(x, u)$, при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau/2}$ и $\delta = h^{1/3+\tau/6}$ получаем

$$c(z, s; \varepsilon, h) = \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left[|\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau} |v^\varepsilon - s|^2 \right] dx + \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, v^\varepsilon) d\Gamma + o(h^3) =$$

$$= \int\limits_{K_h^z \cap \partial F^\varepsilon} 2\varepsilon \int\limits_0^s \sigma(x, r) \, dr d\Gamma + o(h^3) = \frac{2|\partial F_z| h^3}{|\Pi|} \int\limits_0^s \sigma(z, r) \, dr + o(h^3).$$

Откуда делаем вывод, что условие 2) теоремы 2 выполняется. Разделив $c(z, s; \varepsilon, h)$ на h^3 и перейдя к пределу при $h \to 0$, получаем выражение (7) для функции поглощения.

4.2. Вывод формулы (8)**.** Вывод данной формулы производится в основном так же, как в книге [12, гл. 2], где рассмотрена задача Неймана для частного случая локально-периодической среды, определенной в данной работы. Поэтому некоторые технические выкладки, идентичные [12] мы опустим.

Рассмотрим в области $K_h^z \cap \Omega^\varepsilon$ функции

$$U_i^\varepsilon(x) = (x_i - z_i) - \varepsilon \sum_\alpha \tilde{V}_i \left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha \right) \varphi_\alpha^\varepsilon(x), \ (i = \overline{1, 3}), \tag{29}$$

где $\tilde{V}_i(\xi, \eta)$ – периодическое продолжение решения $V_i(\xi, \eta)$ задачи (9) на всё пространство R^3, $\{\varphi_\alpha^\varepsilon\}$ – разбиение единицы.

Будем искать функцию $w_i^\varepsilon(x)$, минимизирующую функционал (10) при $\ell = e^i$ в виде

$$w_i^\varepsilon(x) = U_i^\varepsilon(x) + v_i^\varepsilon(x), \tag{30}$$

где функция $U_i^\varepsilon(x)$ определена равенством (29), тогда функция $v_i^\varepsilon(x)$ должна минимизировать функционал

$$J[v_i^\varepsilon] = I_0(\varepsilon,h) + I_1(\varepsilon,h) + I_2(\varepsilon,h),$$

в классе функций $H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, где

$$I_0(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \left[|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v_i^\varepsilon|^2\right] dx,$$

$$I_1(\varepsilon,h) = 2\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} (\nabla U_i^\varepsilon, \nabla v_i^\varepsilon)\, dx,$$

$$I_2(\varepsilon,h) = 2h^{-2-\tau}\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} (U_i^\varepsilon - (x_i - z_i))v_i^\varepsilon(x)\, dx.$$

Так как $J[v_i^\varepsilon] \leqslant J^\varepsilon[0] = 0$, то справедливо неравенство

$$I_0(\varepsilon,h) \leqslant |I_1(\varepsilon,h)| + |I_2(\varepsilon,h)|. \tag{31}$$

Оценим каждое слагаемое правой части. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, формулой (29) и определением $I_0(\varepsilon,h)$ при $0 < \varepsilon \leqslant h^{1+\tau}$, получаем оценку $I_2(\varepsilon,h)$

$$\begin{aligned} |I_2(\varepsilon,h)| \leqslant 2h^{-2-\tau}\|U_i^\varepsilon - (x_i - z_i)\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)}\|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant Ch^{\frac{3+\tau}{2}} I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \end{aligned} \tag{32}$$

Оценим $I_1(\varepsilon,h)$. Применив интегрирование по частям, запишем

$$I_1(\varepsilon,h) = -2\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon\, dx + 2\int\limits_{\partial K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial \nu} v_i^\varepsilon\, d\Gamma. \tag{33}$$

В работе [19] было доказано, что при выполнении условий (2), (3) имеет место гладкая зависимость решения „ячеечной“ задачи $V_i(\xi,\eta)$ от параметра η:

$$\left\| D_\xi^\lambda V_k(\xi,\eta_1) - D_\xi^\lambda V_k(\xi,\eta_2)\right\|_{C(\Pi\setminus\Pi^{-\delta})} \leqslant C|\eta_1 - \eta_2|,\ |\lambda| = 0,\, 1,$$

отсюда, в силу периодичности $\tilde V_i(\xi,\eta)$ по ξ при $x \in \Pi_{x^\alpha}^{+\delta\varepsilon} \cap \Pi_{x^\beta}^{+\delta\varepsilon}$ следует:

$$\begin{aligned} \left| D_x^\lambda \tilde V_i\left(\frac{x - x^\alpha}{\varepsilon}, x^\alpha\right) - D_x^\lambda \tilde V_i\left(\frac{x - x^\beta}{\varepsilon}, x^\beta\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{|\lambda|}}|x^\alpha - x^\beta| \leqslant C\varepsilon^{1-|\lambda|},\ |\lambda| = 0,\, 1. \end{aligned} \tag{34}$$

С помощью этого неравенства, учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_\alpha^\varepsilon(x)\}_\alpha$, получаем

$$\|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant Ch\delta^{-3/2}.$$

Отсюда, учитывая определение $I_0(\varepsilon,h)$, при $\delta \geqslant h^{1/3}$ имеем

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon} \Delta U_i^\varepsilon v_i^\varepsilon\,dx\right| \leqslant \|\Delta U_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)}\|v_i^\varepsilon\|_{L^2(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant C\delta^{-3/2}h^{2+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h) \leqslant Ch^{\frac{3+\tau}{2}}I_0^{1/2}(\varepsilon,h).\end{aligned} \tag{35}$$

В силу сильной связности областей Ω^ε функция $v_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)$ может быть продолжена до функции $\tilde{v}_i^\varepsilon \in H^1(K_h^z)$ с выполнением неравенства (15). Кроме того, согласно лемме 2.1 [12, гл.4] $\tilde{v}_i^\varepsilon(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\partial K_h^z} |\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,d\Gamma \leqslant 6\left[\varkappa\int\limits_{K_h^z}|\nabla\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx + \left(\frac{4}{\varkappa}+\frac{1}{h}\right)\int\limits_{K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx\right],$$

тогда при $\varkappa = h^{1+\frac{\tau}{2}}$, согласно определения функции $U_i^\varepsilon(x)$ (29) и свойств решения $V_i(\xi,\eta)$ „ячеечной“ задачи (9), для поверхностного интеграла в (33) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}\frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial\nu}v_i^\varepsilon\,d\Gamma\right| \leqslant \left[\int\limits_{\partial K_h^z}\left|\frac{\partial U_i^\varepsilon}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma\right]^{1/2}\left[\int\limits_{\partial K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,d\Gamma\right]^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_1 h\left[h^{1+\tau/2}\int\limits_{K_h^z}|\nabla\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{1+\tau/2}}\int\limits_{K_h^z}|\tilde{v}_i^\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_2h^{2+\tau/2}\left[\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|\nabla v_i^\varepsilon|^2\,dx + \frac{4+h^{\tau/2}}{h^{2+\tau}}\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}|v_i^\varepsilon|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant C_3h^{2+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h).\end{aligned}$$

Отсюда и из (33), (35) имеем

$$|I_1(\varepsilon,h)| \leqslant Ch^{1+\tau/2}I_0^{1/2}(\varepsilon,h). \tag{36}$$

Из (31), (32), (36) при $0<\varepsilon \ll h^{1+\tau}$ получаем оценку для $I_0(\varepsilon,h)$

$$I_0(\varepsilon,h) = \int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}\left[|\nabla v_i^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v_i^\varepsilon|^2\right]\,dx \leqslant Ch^{3+\tau} = o(h^3).$$

Отсюда следует, что функция $v_i^\varepsilon(x)$ даёт малый взнос в предельный тензор проводимости. Таким образом, согласно (30) функция U_i^ε при малых h аппроксимирует функцию $w_i^\varepsilon(x)$, минимизирующую функционал (10) при $\ell = e^i$.

Подставим w_i^ε в виде (30) в формулу (12) для $a_{ij}(z,\varepsilon,h)$, получаем

$$a_{ij}(z,\varepsilon,h)=\sum_{\alpha}\varepsilon^2\int\limits_{\Pi^\varepsilon_{x^\alpha}\setminus F^\varepsilon_{x^\alpha}}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_i-z_i}{\varepsilon}-\tilde{V}_i\left(\frac{x-x^\alpha}{\varepsilon},x^\alpha\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_j-z_j}{\varepsilon}-\tilde{V}_j\left(\frac{x-x^\alpha}{\varepsilon},x^\alpha\right)\right)dx+o(h^3)=$$

$$=\delta_{ij}h^3\left(1-\frac{|F_z|}{|\Pi|}\right)-\frac{1}{|\Pi|}\int\limits_{K_h^z}\int\limits_{\Pi\setminus F_z}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial V_i(\xi,\eta)}{\partial\xi_k}\frac{\partial V_j(\xi,\eta)}{\partial\xi_k}\,d\xi d\eta+o(h^3).$$

Из этого равенства делаем вывод, что условие 1) теоремы 2 выполнено. Разделив $a_{ij}(z,\varepsilon,h)$ на h^3 и перейдя к пределу при $h\to 0$, получаем выражение для предельного тензора проводимости (8).

Теорема 1 доказана.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность Е.Я. Хруслову, чьи критические замечания позволили существенно улучшить работу.

REFERENCES

1. B. Cabarrubias, P. Donato. Homogenization of a quasilinear elliptic problem with nonlinear Robin boundary condition, Appl. Anal. – 2012. – Vol. 91, No. **6**. – P. 1111-1127.

2. B. Calmuschi, C. Timofte. Upscaling of Chemical Reactive Flows in Porous Media, «Caius Iacob» Conference on Fluid Mechanics & Texnical Applications, Bucharest, Romania. – 2005. – P. 1-9.

3. D. Cioranescu, P. Donato. On Robin problems in perforated domains, Math. Sci. Appl. – 1997. – No. **9**. – P. 123-135.

4. D. Cioranescu, P. Donato, R. Zaki. The periodic unfolding method in perforated domains, Portugaliae Math. – 2006. – Vol. 63, No.**4**. – P. 467-496.

5. C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte. Homogenization in chemical reactive floes, Electron. J. Differ. Equ. – 2004. – No.**40**. – P. 1-22.

6. C. Conca, J. Diaz, A. Linan, C. Timofte. Homogenization results for chemical reactive flows through porous media, New Trends in Continuum Mechanics. – 2005. – P. 99-107.

7. J. Diaz. Two problems in homogenization of porous media, Extracta Mathematica. – 1999. – No. **14**. – P. 141-155.

8. W. Jäger, O.A. Oleinik, A.S. Shamaev. On Homogenization of Solutions of Boundary Value Problem for the Laplace Equation in Partially Perforated Domain with the Third Boundary Type Condition on the Boundary of Cavities, Trudy Mosk. Math. Soc. – 1997. – Vol. **58**. – P. 187–223.

9. T.A. Mel'nyk, O.A. Sivak. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain, Ukr. Math. Journal. – 2009. – Vol. 61, No. **4**. – P. 494-512.

10. T.A. Mel'nyk, O.A. Sivak. Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains, Asymptot. Anal. – 2011. – Vol. **75**. – P. 79-92.

11. C. Timofte. Homogenization in Nonlinear Chemical Reactive Flows, Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, May 27-29. – 2006. – P. 250-255.

12. V.A. Marchenko, E.Ya. Khruslov. Homogenization of Partial Differential Equations. – Birkhäuser Boston, 2006. – 401 p.

13. M.V. Goncharenko, L.A. Khilkova. Homogenized model of diffusion in porous media with nonlinear absorption on the boundary, Ukr. Math. Journal. – 2016. –Vol. 67, No. **9**. – P. 1349-1366.

14. E.Ya. Khruslov, L.O. Khilkova, M.V, Goncharenko. Integral conditions for convergence of solutions of non-linear Robin's problem in strongly perforated domains, J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2017. – Vol. 13, No. **3**. – P. 1-31.

15. M.V. Goncharenko, L.A. Khilkova. Homogenized model of diffusion in a locally periodic porous medium with nonlinear absorption at the boundary, Reports of NAS of Ukraine. – 2016. – No. **6**. – P. 15-19.

16. G.A. Chechkin, A.L. Piatnitski. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain, Appl. Anal. – 1999. – Vol. **71**(1-4). – P. 215–235.

17. S.G. Mikhlin. Linear partial differential equations. – M.: Vysshaya shkola, 1977. – 431 p.

18. B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko. Modern geometry. Methods and applications. – M.: Nauka, 1986. – 760 p.

19. L.A. Khilkova. The smooth dependence of the solution of the Neumann boundary-value "cell" problem on the parameters of a domain, Reports of NAS of Ukraine,. – 2014. – No. **4(8)**. – P. 32-36.

Article history: Received: 3 October 2018; Final form: 22 October 2018;
Accepted: 23 October 2018.

Гончаренко М.В., Хількова Л.О. **Усереднені тензор провідності та функція поглинання локально-періодичного пористого середовища.** Вивчається процес стаціонарної дифузії в локально-періодичному пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі пір. Цей процес описується крайовою задачею для еліптичного рівняння, яке розглядається в складній перфорованій області, з нелінійною третьою крайовою умовою на межі перфорації. З причини малості локального масштабу пористості середовища і складності перфорованої області, безпосередній розв'язок таких крайових задач практично неможливий. Тому природний підхід в цій ситуації полягає в дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку, коли масштаб мікроструктури прямує до 0, і перехід до усередненої макроскопічної моделі процесу, що розглядається вже в усій області без урахування перфорації. Усередненню рівняння дифузії в широкому класі не періодично перфорованих областей: сильно-зв'язних областях, який включає в себе і локально-періодично перфоровані області, були присвячені наші більш ранні роботи. У цих роботах була отримана усереднена модель, коефіцієнти якої виражаються через «мезоскопічні» (локальні енергетичні) характеристики середовища, що визначаються в малих кубах, розміри яких, тим не менш, значно більше масштабу мікроструктури. У цих роботах теореми збіжності доводилися за умов існування граничних щільностей «мезоскопічних» характеристик, виконання яких показати в загальному випадку дуже важко, але в ряді конкретних ситуацій це можна зробити. У даній роботі ми показуємо виконання цих умов і, досліджуючи їх, отримуємо явні формули для ефективних характеристик локально-періодичного пористого середовища: тензора провідності і функції поглинання.
Ключові слова: усереднення, стаціонарна дифузія, нелінійна третя крайова задача, локально-періодичне пористе середовище, тензор провідності, функція поглинання.

M.V. Goncharenko, L.O. Khilkova. **Homogenized conductivity tensor and absorption function of a locally periodic porous medium.** We study a process of stationary diffusion in locally-periodic porous media with nonlinear absorption at the pore boundary. This process is described by a boundary-value problem for an elliptic equation considered in a complex perforated domain, with a nonlinear third boundary condition on the perforation boundary. In view of the smallness of the local scale of porosity of the media and the complexity of the perforated domain, the direct solution of such boundary-value problems is almost impossible. Therefore, a natural approach in this situation is to study the asymptotic behavior of the solution when the microstructure scale tends to 0, and the transition to the homogenized macroscopic model of the process. Our earlier papers were devoted to homogenization the diffusion equation in a wide class of non-periodically perforated domains: strongly-connected domains, which includes locally-periodically perforated domains. In these works, an homogenized model was obtained, the coefficients of which are expressed in terms of "mesoscopic" (local energy) characteristics of the media, which are determined in small cubes, the size of which, however, are much larger than the microstructure scale. In these papers, convergence theorems were proved under the conditions of the existence of limiting densities of "mesoscopic"characteristics, the fulfillment of which is generally difficult to show, but in a number of specific situations this can be done. In this paper, we show the fulfillment of these conditions and, by studing them, we obtain explicit formulas for the effective characteristics of the locally-periodic porous medium: a conductivity tensor and a function of absorption.
Keywords: homogenization; stationary diffusion; non-linear third boundary value problem; locally periodic porous medium, conductivity tensor, function of absorption.