В. Н. Калюжный

Математика в лингво-семиотической перспективе

В статье освещается вопрос о языковой специфике математики, который обычно опускается в преподавании. Ответ на указанный вопрос находится на стыке лингвистики, логики, философии, культурологии, психологии. Здесь можно видеть два полюса: 1) освоение математического языка начинающими; 2) погружение в глубинную природу математики. Одна из идей состоит в том, чтобы, наряду с «языком математики», рассмотреть «язык математиков».

Ключевые слова: математика, метаязык, множество, число, геометрия, пространство, язык, перевод, семантика, термин, формула.

Метафорическое суждение «математика – это язык» весьма популярно (оно восходит к Г. Галилею). И хотя на самом деле математика представляет собой сложнейшую конструкцию на базе языка, лингвистический момент здесь подчеркнут закономерно. Тем не менее, в существующих учебниках математический язык зачастую опускается до уровня вспомогательных обозначений, а центр тяжести переносится на решение типовых задач. Крайне важно, особенно для начинающих, на каком языке осуществляется преподавание. Обычное человеческое общение проходит на *естественном* языке. Научные же изыскания тяготеют к *формальному* языку. Фактически, постоянно осуществляется колебание между двумя этими полюсами.

Особое значение указанная тема имеет для гуманитарных специальностей, где языковая проблематика находится в центре внимания. Данная статья написана на основе опыта преподавания математики как на механико-математическом, так и на философском и филологическом факультетах.

Свой язык имеется у каждой науки. Термины естественных наук указывают на объекты и явления природы (можно сказать, что они естественно возникли в процессе развития науки). Математический же язык является искусственным, созданным математиками для внутренних нужд. Если в *естественном* языке значения складываются стихийно, в искусственном языке они задаются с помощью определений. Заметим в связи с этим, что в логике существует специальный раздел «Теория определений». Очевидно, что для прояснения значения того или иного понятия естественно развернуть входящие в него вспомогательные понятия, которые далее точно так же можно будет расшифровать.

Математический язык логично рассматривать как знаковую систему. Соответственно, для его полноценного исследования следует прибегнуть к семиотическому методу. В первом приближении *семантика* математического языка аналогична *семантике* естественного языка. Концепт (смысл, интенсионал) математического знака – это стоящее за ним понятие. Оно записывается на математическом языке. Денотаты (референты) образуют в совокупности экстенсионал математического знака, то есть совокупность математических объектов, подпадающих под соответствующее понятие. Объекты же в математике имеют идеальную (интеллигибельную) природу. Поскольку они не даны в ощущении, возникает отдельная проблема: как их себе представлять?

Прагматику математического языка можно отождествить с ее прикладной функцией. От естественного языка математический язык отличается во многих отношениях. В частности, у него отсутствует *эмотивная* функция. Радость (восторг) вызывают результаты математики, а не ее язык. Для возникновения у «языка математики» *коммуникативной* функции он должен быть расширен до «языка математиков», о котором речь пойдет ниже.

Язык начинается с лексики. Многие термины пришли в математику из естественного языка, подвергнувшись переосмыслению. Относительно каждого из них можно сказать, что расплывчатая, «интуитивная картина должна уступить место знаковой конструкции» [2, 12].

Язык (лексику) математики удобно рассматривать как объединение многочисленных подъязыков, обслуживающих различные математические направления. Разумеется, имеются и общематематические термины: *множество*, *отношение*, *операция*, *функция* и т. д.

Любопытно, что могла бы сказать о математическом языке ономасиология (раздел языкознания, устанавливающий, почему вещь получает свое имя)? В отличие от системности математических понятий, их именование последовательностью не отличается. Так, непонятна мотивировка алгебраических терминов *поле*, *кольцо*, *идеал*, *радикал* и проч.

Не вполне удачен термин *группа* (который может восприниматься как синоним *множества*). Здесь прослеживается своеобразная логика. Само понятие *группы* задается четырьмя аксиомами. Если выполняются только две первые аксиомы (наличие бинарной алгебраической операции, обладающей свойством ассоциативности), такая структура называется *полугруппа*. Если же имеется лишь первая аксиома, то подобная структура называется *группоид*.

Если «очистить» математический язык от математической терминологии (точнее говоря, заменить математические знаки условными значками), то останется язык логики. Характерно, что авторитетнейшие авторы используют термин «логико-математический язык» [5, 6]. Он подчеркивает теснейшую связь двух языков.

Логику часто определяют как науку о «правильных рассуждениях» (это несколько наивное словосочетание уточняется на пути формализации). Содержательно логика выражается в системе законов. Многие из них имеют свои наименования, что облегчает их усвоение. Например, «закон противоречия», «закон исключенного третьего», «закон контрапозиции», «закон перестановки посылок», «закон разбора случаев», «закон косвенного доказательства», «правило силлогизма».

Разумеется, логические законы можно сформулировать на обыденном языке (что и сделал Аристотель более двух тысяч лет назад). В современной логике (после Джорджа Буля и Де Моргана) эти законы записываются в символьной (алгебраической) форме.

Первое знакомство с языком формальной логики может обескуражить. Этот язык, в сущности, ни о чем не говорит. Его элементами (словами) являются формулы, построенные из переменных, которые могут замещаться различными содержательными утверждениями. Другими словами, у языка логики нет четкой денотативной функции.

Вместе с тем, у языка формальной логики есть свой синтаксис. Определяется он наличием двух союзов (связок): конъюнкции («или») и дизъюнкции («и»), а также функции отрицания (частицей «не»). Через первичные связки определяется импликация, которую можно воспринимать как глагол, озвучиваемый как «следует», «вытекает», «если… то…»… с формальной точки зрения семантика связок задается с помощью таблиц истинности [5, 75].

Отрицание в логике (соответственно, дополнение в теории множеств) является примером инволютивной, то есть удовлетворяющей соотношению (ц(ц(x)) = x, функции. Это позволяет говорить о двойственности элементов x и ц(x), а в семиотическом плане – об их оппозиции. В преподавании имеет смысл подчеркивать двойственность объектов и формул. Так, в исчислении высказываний двойственны операции конъюнкции и дизъюнкции (и их свойства), в теории множеств – операции объединения и пересечения. Двойственны и два дистрибутивных закона для этих операций.

Формулы встречаются не только в логике. Многие математические теоремы утверждают справедливость определенных формул. Например, формулы для корней квадратного уравнения, формулы для площади различных геометрических фигур, теорема Пифагора, многочисленные тригонометрические тождества, свойства производной и интеграла.

Необходимо различать *формулы* и *функции* (которые на уровне «здравого смысла» зачастую отождествляются). Всякая формула задает функцию. Функции же существуют и вне привязки к формулам. С другой стороны, для числовых функций имеет место взаимно-однозначное соответствие между функциями и их графиками (что обеспечивает возможность взаимопереводимости функционального и геометрического языков).

Язык – основа для создания текстов. Ученые создают тексты на «языке математиков». Основную массу математических текстов можно подразделить на две группы: формулировки теорем и изложения доказательств теорем. Кроме того, текстами задаются аксиомы, определения, описываются различные конструкции (алгоритмы). При этом теоремы представляют цель, а доказательства – средство. Совокупность всех теорем и аксиом представляет математическую теорию – некий разветвленный текст.

Если изучать математику в максимально широком аспекте, мысля ее как феномен культуры, представляется уместным, наряду с «языком математики», рассматривать и «язык математиков». В этом плане стоит вспомнить положение Витгенштейна: «значение – это употребление». Можно сказать: *язык математиков* – это язык, который используют математики (он описывает, преимущественно, интеллектуальную деятельность). Это язык, на котором пишутся монографии и статьи, читаются лекции и проводятся семинары. Он включает полный набор математических терминов и формул, а также некоторые единицы естественного языка, например, глаголы: «рассмотрим», «предположим», «допустим», «установим», «возьмем», «подставим», «подействуем». Можно даже говорить о своеобразном «математическом жаргоне» (6, 9). Взаимодействуя с другими науками, *язык математиков* постоянно обогащается. Он вполне может включать и фрагменты философского языка, позволяя обсуждать гносеологические и онтологические проблемы, судить о ценностях.

Язык математиков не столь идеален, как *язык математики*: в нем встречаются и синонимы, и омонимы. Например, в контексте исследования уравнений слова «корень» и «решение» представляются синонимами. Но «корень» – это математический термин, обозначающий элемент (кольца или поля), который при подстановке в уравнение обращает его в ноль. «Решение» – элемент из *языка математиков*: это процесс и результат исследования проблемы.

В качестве еще одного примера рассмотрим термин «переменная» (чаще всего обозначаемая латинской буквой x). Это обозначение возникло, когда рассматривались только числовые функции, а их аргумент представлялся как изменяющийся по числовой оси. На самом деле, задача переменной – не изменяться, а обозначать. На сегодняшний день запись $f(x)$ обозначает значение функции на элементе (в точке) x. При этом элемент x называют «аргументом» функции f. Несомненно, что x – элемент языка математики. «Переменная» же, покинув *язык математики*, осталась в *языке математиков*.

В историческом плане развитие науки опережало формирование языка. Возникновение математики принято соотносить с расцветом интеллектуальной деятельности в Древней Греции. Но утверждения математического характера бытовали и ранее, причем в разных культурах. Справедливость их устанавливалась не логически, а практикой, прежде всего, строительной (для возведения стен необходимо выставлять прямой угол, который может быть образован треугольником со сторонами: 3, 4, 5 или любым другим треугольником, стороны которого подчиняются соотношению: $a^2 + b^2 = c^2$). Это были эмпирические истины. Соответственно, они и формулировались на общеупотребительном языке.

Греки имели дело не только с целыми, но и с рациональными числами. Парадоксальная ситуация сложилась, когда было выяснено, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. С одной стороны, выражение «диагональ квадрата» вполне респектабельно – сама диагональ наглядна, осязаема, то есть представляется референтом соответствующего слова. С другой стороны, его длина – квадратный корень из двух – оказывается за пределами рациональных чисел, то есть, не воспринимается. Разрешение этого парадокса состояло в расширении множества рациональных чисел до множества действительных чисел. Однако осознание природы этих чисел пришло спустя два тысячелетия.

В развитии математики важнейшую роль сыграли «Начала» Евклида. Поставив во главу угла доказательность, древнегреческий математик, насколько это было возможно, усовершенствовал и геометрический язык, находившийся на грани обыденного и формального. За прошедшие тысячелетия термины еще более теоретизировались. Пытаясь достичь известной определенности, автор был вынужден писать: «точка – это то, что не имеет частей», а «линия есть длина без ширины» [3, 14]. В мире Евклида заданы отношения: «точка лежит на прямой (на плоскости)», «точка лежит между двумя другими». Равенство фигур, скорее, подразумевается. Ряд определений носят практический характер, характеризуя способ построения некоторых простейших геометрических фигур. Хочется сказать, что первопроходец использовал *язык математиков*.

Одна из аксиом Евклида звучит так: из всякого центра и всяким раствором может быть описана окружность. За несколько неформальным образом «раствор» (нужно думать, циркуля) лежит понятие *расстояния*, абстрагированное от измерений в физическом мире.

В современной математике расстояние мыслится как функция двух переменных $d\ (x,\ y)$ и определяется – в отрыве от классической геометрии – простыми аксиомами: 1) $d(x,\ x) = 0$, 2) $d\ (x,\ y) = d(y, x)$, 3) $d\ (x,\ z) \leq d\ (x,\ y) + d\ (y,\ z)$. Соответственно, различных расстояний оказывается необозримое многообразие. Интересно, что под это определение подпадает «дискретное расстояние», при котором каждый элемент удален от другого на единицу (в этой ситуации расстояние невозможно ни уменьшить, ни увеличить – это явно противоречит здравому смыслу). Заметим также, что используемое Евклидом понятие «движения» сейчас определяется как отображение, сохраняющее расстояние.

Классическая геометрия была формализована Давидом Гильбертом. В построенном им языке (ставшем частью *языка математики*) имеется три имени нарицательных: «точка», «прямая», «плоскость». Отношения между ними выражаются словами: «лежать», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный» [3, 56] (фактически, речь идет о глаголах). Связи между «вещами» трех указанных типов фиксируются в пяти группах аксиом. После Гильберта стало окончательно ясно, что вся базовая информация о фундаментальных понятиях содержится в постулатах. Но подобная идея в истории человеческой мысли оказалась революционной (и с трудом воспринимаемой начинающими).

На вопрос – «Одну и ту же или разные теории излагают Евклид и Гильберт?» [7, 33] – мы отвечаем утвердительно. Но при переводе на современный язык оказались стерты наивные коннотации автора «Начал».

Принципиальной вехой в размышлениях о природе «точек» и «прямых» явилось открытие неевклидовых геометрий, продемонстрировавших независимость «Пятого постулата» Евклида от остальных аксиом геометрии. Для нашей темы это означает вариабельность значений слов «точка» и «прямая», зависимость их от контекста.

Одним из самых распространенных слов в *языке математики* является «пространство». Оно генетически связано с геометрией, и в то же время, обнаруживает черты общности с физическим пространством. В современной математике «пространство» предписанного значения не имеет, и в разных контекстах под ним может подразумеваться разное. Для детализации ситуации существительное «пространство» сочетается с разнообразными прилагательными.

Так, «метрическое пространство» – это множество с заданным на нем расстоянием (метрикой). В частности, *расстояние* позволяет говорить о «близости». Со временем и «близость» была некоторым образом формализована, в результате чего возникли понятия *топологии* и *топологического пространства*.

Крайне интересна судьба термина «вектор» в математике. Изначально (в рамках классической геометрии) вектор определялся как направленный отрезок. Однако, выясняется, что векторы можно умножать на число (скаляр), складывать, и даже умножать (с выходом в трехмерное пространство). Тем самым в трактовке «вектора» осуществляется эволюция от геометрии к алгебре. В результате возникают *линейные* пространства, которые могут оказаться *конечномерными* или *бесконечномерными*. Если на пространстве задано скалярное произведение, то оно называется *евклидовым* (*гильбертовым*). Бывает, что на одной и той же базе задается несколько дополнительных структур (это связано с расширением языка). Так, если на *бесконечномерном линейном* пространстве задана «норма» (расстояние, согласованное с линейной структурой), то возникает «нормированное пространство». В случае, когда оно обладает особым свойством «полноты», получается «банахово пространство» (названное в честь жившего во Львове математика Стефана Банаха). Разумеется, для переводчика математических текстов желательно знакомство со смыслом указанных терминов.

Наиболее типичным (со стороны неспециалистов) ответом на вопрос «чем занимается математика» является следующий: «она изучает числа». Но что такое число? Добросовестный учащийся знает, что числа бывают «натуральные», «целые», «рациональные» (а также «иррациональные»), «действительные». Студент может добавить к этому перечню и «комплексные числа». Все перечисленные разновидности образуются на базе натуральных чисел. Поразительно, что их аксиоматика возникла лишь в 1889 году в работе Джузеппе Пеано – на две с лишним тысячи лет позже эпохального труда Евклида.

Идея комплексных чисел возникла еще в середине XVI века при попытке записать формулы для корней квадратного уравнения. Для этого приходилось изображать квадратный корень из «минус единицы». Само именование «комплексные» (введенное Карлом Фридрихом Гауссом и Лазаром Карно) свидетельствует о непростой судьбе этого класса чисел. Символ i (первую букву слова imaginarius – мнимый) для обозначения мнимой единицы ввел Леонард Эйлер. «Мнимая единица» должна удовлетворять соотношению: $\mathrm{i}^2 = -1$ (ясно, что i не является действительным числом). В общем виде комплексные числа записываются в виде $a + bi$, где a, b – вещественные числа. Когда их догадались изображать на координатной плоскости (придавая им геометрический смысл), это способствовало их признанию. А отождествление $a + bi$ с парой вещественных чисел (a, b) окончательно утвердило их реальность. У комплексных чисел есть пара «родственников»: «двойные» и «дуальные» числа. *Дуальные числа* имеют вид: $a + be$, где a, b – вещественные числа. При этом $e^2 = 0$. Последнее соотношение совершенно нетипично для «обычных» чисел. *Двойные числа* имеют вид: $a + bj$, где a, b – вещественные числа, а $j^2 = 1$. казалось бы, это проще, чем для комплексных чисел, поскольку квадратный корень извлекается из положительного, а не отрицательного числа. Но если рассмотреть выражения $u = (1 + j) / 2$, $v = (1 - j) / 2$, то обнаружатся неожиданные соотношения: $u^2 = u$, $v^2 = v$, $uv = 0$. Таким образом, экзотические свойства «дуальных» и «двойных» чисел не позволяют считать их числами (в узком смысле этого слова).

В середине XIX века Уильям Гамильтон ввел оригинальное обобщение комплексных чисел, а именно, – *кватернионы*. Это выражения вида $a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d – вещественные числа, а i, j, k, – мнимые единицы, для которых: $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$. Между собой эти единицы антикоммутируют, например, $ij = k$, $ji = -k$. *Кватернионы* трудно назвать «числами» – во многом они ближе *векторам*. Еще дальше уходят от привычных представлений *числа Кэли* (для них не выполняется и ассоциативность). В то же время, сохраняется традиция называть образования, подобные описанным, *гиперкомплексными числами* [4]. В конечном счете, вопрос «что такое число» как-то отпал, но в результате было выработано широкое понятие *алгебраической структуры*.

Многообразие возникающих математических объектов ставит проблему понимания в лингвистическом, психологическом и философском аспектах. Как пишет Ю. И. Манин, «осмысливая математический текст, математик пользуется более или менее определенными зрительными, кинематическими и другими образами, возникающими в его сознании» [6, 151]. Не случайно название одного доклада выдающегося ученого XX века Германа Вейля звучит так: «Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания математики» [2, 24-41].

Чрезвычайно популярна среди математиков *геометрическая интерпретация*. Когда появились матрицы с довольно специфической операцией умножения, это могло озадачивать. Позже, с возникновением конечномерных линейных пространств, удалось отождествить линейные операторы в них с матрицами (в фиксированном базисе). А умножение матриц при этом совпало с очень просто записываемой *композицией* линейных операторов как функций: $(ц \circ ш)(x) = (ц(ш(x))$. Если выражаться строже, то здесь речь должна идти об *изоморфизме* структур (который обеспечивает перевод с одного подъязыка на другой).

Рассмотрим еще один важный пример перевода. Возьмем понятие *отношения эквивалентности* (как рефлексивного, симметричного и транзитивного отношения). Его чрезвычайную распространенность демонстрируют следующие примеры; 1) отношение равенства; 2) полное отношение на заданном множестве; 3) отношение параллельности; 4) отношение конгруентности фигур на плоскости; 5) отношение подобия; 6) отношение сонаправленности векторов; 7) отношение равнообразности элементов для заданной функции; 8) отношение сравнимости целых чисел по модулю (натурального числа).

При заданном *отношении эквивалентности* с каждым элементом исходного множества связывается его *класс эквивалентности*, то есть множество всех элементов, ему эквивалентных. Система всех классов эквивалентности образует *разбиение* множества (на попарно непересекающиеся классы). Так, для примера 1 возникает разбиение на одноэлементные подмножества, а в примере 2 разбиение сводится к единственному классу – исходному множеству. Пример 6 отвечает на (лингвистический!) вопрос «что такое “направление”?» Единственно правильный ответ состоит в том, что это «класс сонаправленных векторов».

Но понятие *разбиения* множества (и соответствующая теория) может быть введено независимо. Всякое *разбиение* порождает *отношения эквивалентности* по правилу: два элемента эквивалентны, если они попадают в один и тот же класс. В итоге, понятия *отношения эквивалентности* и *разбиения* оказываются эквивалентными, а соответствующие подъязыки взаимопереводимыми.

Многие математические понятия определяются как классы эквивалентности по специально подобранному *отношению эквивалентности*.

Так, действительные числа отождествляются с некоторыми множествами рациональных чисел. У Кантора – с фундаментальными последовательностями рациональных чисел; у Дедекинда – с сечениями в множестве рациональных чисел.

В развитии математики оказался принципиален переход на теоретико-множественный язык (своеобразное эсперанто). Этот язык является универсальным – он неявно содержится в любом математическом наречии (возникшем задолго до теории множеств).

В качестве базового понятия здесь выступает *множество* (тот, кто встречается с этим термином впервые, вовсе не должен думать, что в *множестве* должно быть *много* элементов). В качестве синонимов к этому слову выступают «совокупность», «семейство», «класс». Может быть использовано и слово «группа», но оно вступает в конфликт со своим алгебраическим значением. В языке теории множеств «существительные» обозначаются отдельно взятыми буквами и указывают на разнообразные множества и их элементы. В этом языке имеется центральный глагол, который читается «принадлежит» и обозначается символом «$\in$». Он является первой буквой французского вспомогательного глагола «ktre» («быть»). Запись «$x \in M$» читается: «элемент x принадлежит множеству M». Глагол же «содержаться» («включаться») связывает два множества – он является производным.

Фундаментальность понятия множества проявляется в том, что на его основе вводится центральное в современной математике понятие *математической структуры* (как множества с заданной на нем системой *отношений* и *функций*). Частными случаями *математической структуры* являются *алгебраические структуры*, *метрические* и *топологические пространства* и т. п. Подчеркнем, что преподавание математики в университетах отличается от ее изложения в технических вузах именно концентрацией внимания на *математических структурах*.

На системе всех множеств вводится особая операция – декартово (прямое) произведение. Для множеств A и B их декартово произведение состоит из множества всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Но важно подчеркнуть, что, несмотря на интуитивную приемлемость, формальная конструкция относится к первичным понятиям теории множеств (за его существование отвечает особая *аксиома пары*).

Указанная конструкция дает возможность определить *соответствие* как подмножество декартова произведения. *Отношение* при этом определяется как *соответствие* между равными множествами. *Функция*, в свою очередь, определяется как *функциональное соответствие* (в таком случае экстравагантная *функция Дирихле*, равная 0 в рациональных точках и 1 в иррациональных точках, автоматически признается функцией).

«Теория множеств» возникла в конце XIX века при попытке заглянуть в математические глубины. Первоначально возникла «Наивная теория множеств» Георга Кантора. В ней обнаружились противоречия, родственные парадоксам (апориям), известным еще в Древней Греции. Это дополнительно подчеркивает родство математики и философии. Устранить противоречия была призвана ее аксиоматизация.

Платой за мощь теории множеств является ее «выхолощенность», неспособность вызывать содержательные ассоциации. Смыслом термина становится, в сущности, вся совокупность текстов, его содержащих. Соответственно, возникновение новых научных результатов обогащает используемые в них понятия (создает коннотации). Когда мы узнаем, что имеется всего пять *правильных многогранников* (платоновых тел), мы начинаем ценить их уникальность. Когда выясняется, что множество *простых чисел* бесконечно, это подчеркивает их ординарность. А когда студент знакомится с «Основной теоремой алгебры» (утверждающей, что всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный же корень) он понимает, чем комплексные числа отличаются от действительных – при решении уравнений с комплексными коэффициентами не возникает чисел нового вида.

Переход от классической математики к этапу, который можно назвать «современным», состоялся ориентировочно в конце XIX века. Нам представляется, что к числу различных стимулов этого перехода следует отнести специфическую лингвистическую рефлексию. Произошел своеобразный «лингвистический поворот».

Размышления о природе объектов математики и ее языка приводят к возникновению нового направления «Основания математики». Но здесь возникает еще один тонкий – лингвистический – вопрос. Если это отдельная научная дисциплина, то она должна иметь особый язык, не тождественный языку математики. Подобный язык принято называть *метаязыком*, а «Основания математики» именуют также «Метаматематикой». Располагается *метаязык* между языком математики и языком математиков. Вынужденным образом *метаязык* оказывается недостаточно формализованным. В целом это актуализирует проблему связи *формального* и *интуитивного* в математике [1].

Вопрос о семантике математических терминов связан с проблемой «реальности» стоящих за ними математических объектов. Радикальным подходом к ее решению является отождествление «существования» и непротиворечивости соответствующей теории. В этом случае можно спокойно развивать теорию, обогащая понятие. Разумеется, такой подход не соответствует интуиции, ориентирующейся на *осязательность* существующего. Наиболее естественным способом оправдания «реальности» математического объекта является его конструирование из подходящего математического материала;

другими словами, построение модели математической теории. При этом «модель наполняет содержанием, смыслом символические выражения языка» [5, 73]. В качестве модели планиметрии можно рассматривать декартову систему координат (осуществившую арифметизацию геометрии).

Слово «модель» имеет и более широкий смысл. Он индуцируется словосочетанием «математическое моделирование». Задача исследователя состоит в конструировании математического объекта, подобного объекту реальности. Последний можно считать референтом имени этой – моделирующей реальность – конструкции. Другими словами, математический язык получает семантику в реальном мире. Все это возвращает нас к мысли Галилея о том, что книга природы написана на языке математики.

Затруднения, возникающие при восприятии «высшей математики», подводят к идее – ввести особый предмет «Пропедевтика математики». Отметим для сравнения, что на первом курсе философского факультета ХНУ читается курс «философская пропедевтика». А в завершение обучения на механико-математическом факультете можно было бы порекомендовать курс «Философия математики».

Заметим, что читать курс математики на философском факультете желательно не во втором семестре, а в четвертом – после того, как курс логики будет прочитан в полном объеме (сейчас же значительную часть времени приходится тратить на логические рассмотрения).

К сожалению, язык математики не часто попадает в фокус внимания. Его можно сравнить с воздухом: без него невозможно, но он неуловим. Разобраться в том, что такое математика, без обсуждения языка математики нельзя. И для преподавания это не менее важно, чем для науки.

Литература

1. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике / В. Ф. Асмус. – М. : Мысль, 1965. – 312 с.

2. Вейль Г. Математическое мышление / Г. Вейль. – М. : Наука, 1989. – 400 с.

3. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт Д. – М.-Л. : ОГИЗ, 1948. – 492 с.

4. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М. : Наука, 1973. – 144 с.

5. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 120 с.

6. Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое / Ю. И Манин. – М. : Советское радио, 1979. –168 с.

7. Стили в математике : социокультурная философия математики / под ред. А. Г. Барабашева. – СПб. : РХГИ, 1999. – 552 с.