

Использование системы Maple при рассмотрении в курсе общей физики дифракции Фраунгофера

В статье обсуждается целесообразность применения системы Maple при изучении в курсе общей физики дифракции Фраунгофера. В частности, рассматривается приложение Maple к описанию дифракции света на дифракционной решетке и прямолинейной бесконечной щели. В работе обращается внимание на то, что использование системы Maple в указанных целях делает изложение дифракции Фраунгофера в курсе общей физики более наглядным и полным.

Ключевые слова: система Maple, компьютерное моделирование, общая физика, дифракция Фраунгофера, дифракционная решетка, интерференция света.

В настоящее время существует целый ряд систем символьной математики, то есть компьютерной алгебры. Это, например, Mathcad, Mathematica, MATLAB, Maple [1]. Система Maple позволяет решать в диалоговом режиме огромное число различных математических задач. Она обладает большими возможностями по графической визуализации вычислений [1]. С этой точки зрения, представляется разумным ее использование для компьютерного моделирования в различных задачах, например, по оптике. В настоящей работе предлагается один из возможных вариантов применения системы Maple при рассмотрении дифракционной решетки в курсе общей физики.

Дифракционная решетка, с одной стороны, является важнейшим элементом целого ряда спектральных приборов. Она в них используется для разложения света в спектр. С другой стороны, она является оптической системой, в которой, по сути, реализуется многолучевая интерференция. Все это в целом приводит к тому, что и в курсе общей физики дифракционной решетке уделяется заметное внимание.

Известно, что интенсивность света I , дифрагированного на решетке в зависимости от угла дифракции θ , описывается формулой (см., например, [2]):

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)^2} \frac{\sin^2(N \pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \theta / \lambda)}. \quad (1)$$

Здесь I_0 – интенсивность света, создаваемая одной щелью в направлении $\theta = 0$; b – ширина щели; d – период решетки; λ – длина волны света; N – общее количество штрихов (щелей). При этом также предпо-

лагается, что монохроматический свет на дифракционную решетку падает нормально.

В выражении (1) множитель

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)^2} \quad (2)$$

описывает дифракцию света на отдельной щели. Величина $\frac{\sin^2(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \theta / \lambda)}$ в соотношении (1) обусловлена интерференцией когерентных световых пучков, которые излучаются щелями решетки в результате дифракции света на них. Если предположить, что величина b бесконечно мала, то есть $b \rightarrow 0$, то выражение (1) примет вид:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin^2(\pi d \sin \theta / \lambda)} \quad (3)$$

Таким образом, видно, что для описания дифракции света на решетке необходимо учитывать особенности многолучевой интерференции и дифракции Фраунгофера на прямолинейной щели.

Конечно, в арсенале математического анализа есть стандартные приемы, позволяющие выполнить исследования выражений (1)-(3) (см., например, [2, 3]). Также их можно представить и в графическом виде при различных значениях λ , b , d , N . Однако построение графиков традиционными способами при различных параметрах λ , b , d , N в этом случае будет являться довольно трудоемкой задачей. С этой целью применение системы Maple, вероятно, будет достаточно эффективным. Ведь в ее рамках легко записывать различные аналитические выражения и выполнять построения сложнейших графиков. Это позволит студенту потратить небольшое время на изучение тех частей системы Maple, которые будут ему нужны для графического анализа выражений (1)-(3).

Вначале с помощью Maple рассмотрим выражение (2), которое, как уже говорилось, описывает дифракцию света на прямолинейной бесконечной щели. При этом предполагается, что свет на щель падает нормально.

Для этого его перепишем в виде:

$$y = \frac{\sin^2\left(\frac{kbx}{2}\right)}{\left(\frac{kbx}{2}\right)^2} \quad (4)$$

Здесь $y = \frac{I_1}{I_0}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $x = \sin \theta$.

Например, в Maple 8 формула (4) может быть записана следующим образом:

$$> y=(\sin(k*b*x/2))^2/(k*b*x/2)^2; \quad . \quad (5)$$

Предположим теперь, что $\lambda=0,628$ мкм, тогда $k=10000\text{мм}^{-1}$. С помощью Maple построим графики, соответствующие ширине щели 0,005 мм и 0,002 мм, составив для этого следующую элементарную программу:

$$\begin{aligned} >\text{plot}([\sin(50*x)]^2/(50*x)^2, [\sin(20*x)]^2/(20*x)^2, \\ x=-0.3..0.3, y=0..1, \text{color}=\text{black}, \text{style}=[\text{line}, \text{point}]); \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

Они представлены на рис. 1.

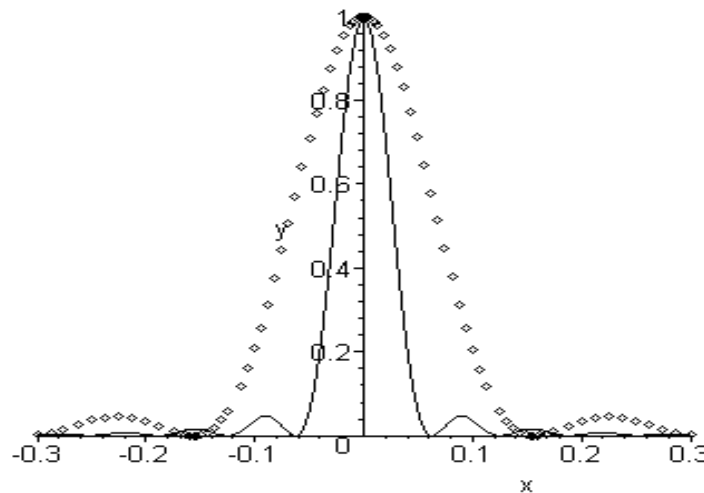


Рис. 1.

На этом рисунке сплошной линии соответствует ширина щели $b=0,005$ мм, а для графика, представленного точками, $b=0,002$ мм. Видно, что при $x=0$, обе кривые имеют максимум – в оптике его называют «центральный». По рисунку легко оценить, что ближайшие к центральному максимуму пики по высоте приблизительно в 20 раз меньше его. Что касается остальных максимумов, то они по высоте еще меньше. Из картины также видно, что большая часть энергии света, дифрагированного на щели, приходится на центральный максимум. Также по графикам легко определить значения x , при которых $y = I_1 / I_0 = 0$.

Остановимся теперь на выражении (3). В нем будем считать, что $k=10000$ мм⁻¹, а $d=0,02$ мм. Именно с таким периодом d дифракционную решетку используют студенты физического и радиоп физического факультета.

тетов Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина на физическом практикуме по оптике при выполнении лабораторной работы, которая называется: «Изучение явления дифракции света (дифракционная решетка)».

Из теоретического анализа (3) известно, что зависимость I от $\sin \theta$ имеет главные и побочные максимумы. При этом величина главного максимума $I_{\max} \propto N^2$. С учетом этого соображения равенству (3) придадим следующий вид:

$$y = \frac{\sin^2(Nkxd / 2)}{N^2 \sin^2(kxd / 2)} . \quad (7)$$

Здесь $x = \sin \theta$, $k = 2\pi / \lambda$, $y = I / (I_0 N^2)$.

Например, в Maple 8 формула (7) может быть записана так:

$$>y=(\sin(N*k*d*x/2))^2/(N^2*(\sin(k*d*x/2)^2)); . \quad (8)$$

Теперь предположим, что N , например, равно 5. Тогда на основании (8), составив элементарную программу, получим рис. 2.

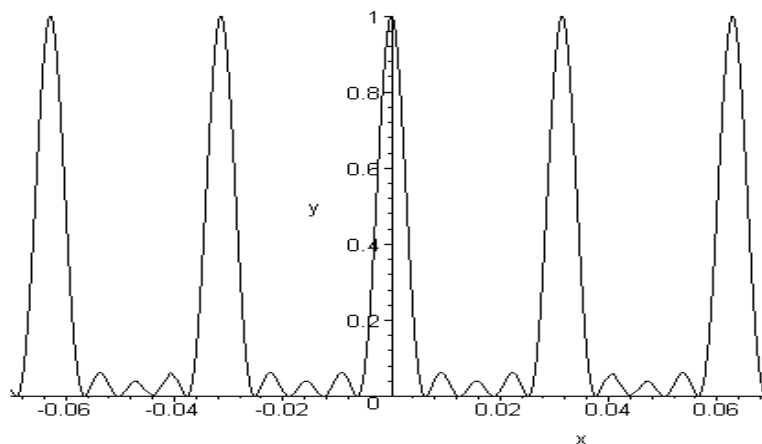


Рис. 2.

Конечно, дифракционная решетка, которой пользуются студенты на физическом практикуме по оптике, имеет число штрихов $N=500$, а мы здесь рассматриваем $N=5$. Однако формула (3) выполняется при любом N . Уже указывалось на то, что высота главных максимумов $I_{\max} \propto N^2$. В связи с этим в равенство (7) был введен множитель $1/N^2$. После этого значение y_{\max} , соответствующее главному максимуму, всегда должно быть равным 1. Как мы видим, рис. 2 это подтверждает. Кроме того, анализ (3) показывает, что между главными соседними максимумами должно быть $N-1$ минимумов

и $N - 2$ побочных максимумов. Если $N = 5$, то $N - 1 = 4$, $N - 2 = 3$. На рис. 2 мы видим, что между главными соседними максимумами имеется 4 минимума и 3 побочных максимума.

Чтобы понять, почему компьютерное моделирование было начато с малых N , остановимся на случае с $N = 20$, предварительно в программе (`> plot((sin(2000*x))^2/(400*(sin(100*x))^2),x=-0.04..0.04,y=0..1,color=black);`), уменьшив область значений x . В результате, получим рис. 3.

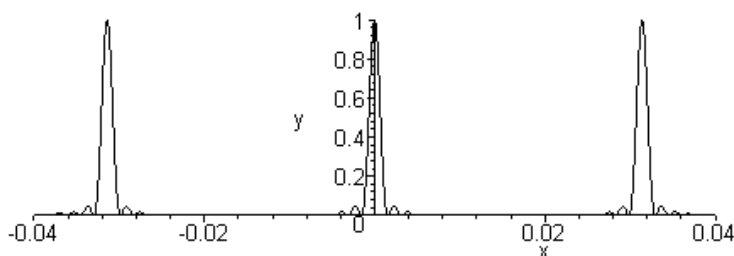


Рис. 3.

Сравнивая рисунки 2 и 3, нетрудно заметить, что положения главных максимумов на них совпадают. При $N = 20$ между главными соседними максимумами должно быть 19 минимумов и 18 побочных максимумов. Многие из побочных максимумов оказываются настолько малыми, что при больших N и заданных интервалах изменений величин x и y разрешающей способности системы Maple не хватает, чтобы на графике отразить мелкие детали. Об этом рис. 3 говорит красноречиво. Между главными соседними максимумами мы не видим 18 побочных максимумов.

Из формулы (3), а также из нашего компьютерного моделирования следует (см. рис. 2 и 3), что все главные максимумы являются одинаковыми. Поэтому, сузив область значений x , и с помощью программы (`plot((sin(50000*x))^2/(250000*(sin(100*x))^2),x=- 0.0005..0.0005, y=0..1, color=black);`) на графике можем отразить только один из главных максимумов (см. рис. 4).

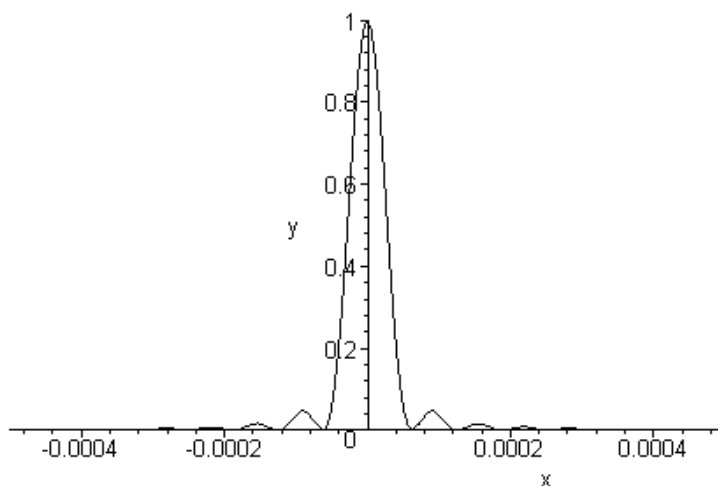


Рис. 4.

В случае многолучевой интерференции света, которая описывается формулой (3), все главные максимумы действительно являются одинаковыми. Однако более полное описание дифракции света на дифракционной решетке дает формула (1). Она одновременно учитывает, как уже отмечалось, дифракцию Фраунгофера на прямолинейной щели (см. (2)) и многолучевую интерференцию (см. (3)).

Как и в предыдущих случаях, равенству (1) придадим вид:

$$y = \frac{\sin^2(kbx / 2) \sin^2(Nkxd / 2)}{N^2(kbx / 2)^2 \sin^2(kxd / 2)}. \quad (9)$$

В системе Maple ему будет соответствовать запись:

$$>y=(\sin(k*b*x/2))^2*(\sin(k*N*d*x/2))^2/((k*b*x/2)^2*(\sin(k*d*x/2))^2); \quad (10)$$

Если в (9) и (10) положить $N=5$, $k=10000 \text{ мм}^{-1}$, $d=0,02 \text{ мм}$, $b=0,002 \text{ мм}$, то с помощью программы `plot((sin(20*x))^2*(sin(500*x))^2/(25*((20*x)^2*(sin(100*x))^2)), x=-0.1..0.1,y=0..1,color=black);` получим график (см. рис. 5).

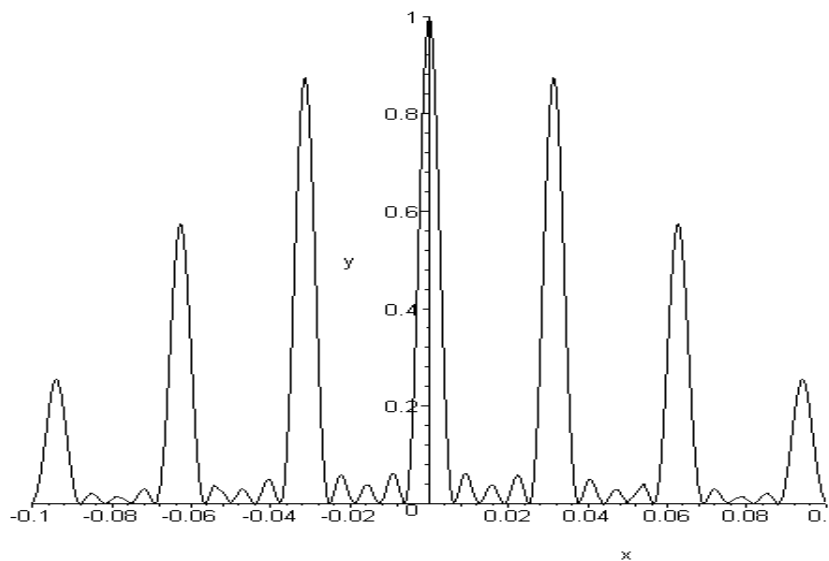


Рис. 5.

Из рис. 5 видно, что из-за дифракции света на отдельной щели высота главных максимумов изменяется с ростом их порядка.

В сборнике задач [4] предлагается к рассмотрению задача, в которой необходимо построить график зависимости I от $\sin \theta$ при $d/b = n$, где n – целое число. Пусть, например, $n=2$, $N=5$, $k=10000 \text{ мм}^{-1}$, $b=0,01 \text{ мм}$, $d=0,02 \text{ мм}$, тогда с помощью программы `plot((sin(50*x))^2*(sin(500*x))^2/(25*((50*x)^2*(sin(100*x))^2)), x=-0.1..0.1,y=0..1,color=black);` получим следующую картину (см. рис. 6).

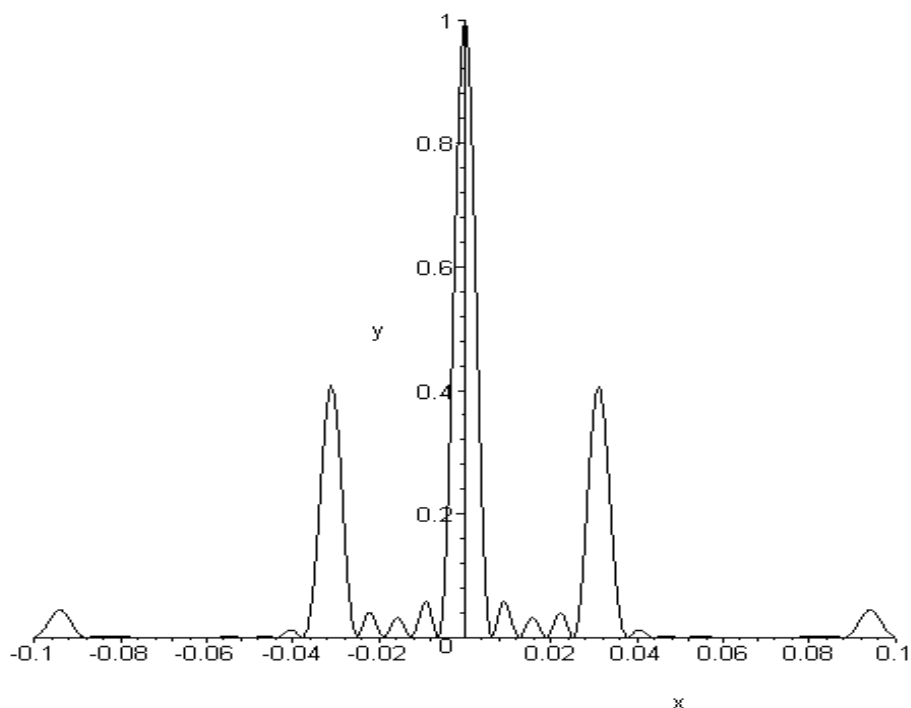


Рис. 6.

Мы видим, что главный максимум второго порядка на рис. 6 отсутствует. Это связано с тем, один из минимумов функции (2) совпал с главным максимумом второго порядка (см. (3)). При создании дифракционных решеток обязательно учитывается это обстоятельство.

Литература

1. Дьяконов П. В. Maple 7 : учебный курс / П. В. Дьяконов. – СПб : Питер, 2002. – 672 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. В 3 т. Т. 2 Электричество и магнетизм. Волны. Оптика : учеб. пособие для вузов / И. В. Савельев. – 5-е изд. стер. – СПб : Лань, 2006. – 496 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – Изд. 4-е, стереотипное. – М. : ФИЗМАТЛИТ; изд-во МФТИ, 2004, – Т. 3 : Электричество. – 656 с.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2003. – 432 с.