

ISSN 2312-4334

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

# **East European Journal of Physics**

No 1. 2019

2019

# East European Journal of Physics

---

EEJP is an international peer-reviewed journal devoted to experimental and theoretical research on the nuclear physics, cosmic rays and particles, high-energy physics, solid state physics, plasma physics, physics of charged particle beams, plasma electronics, radiation materials science, physics of thin films, condensed matter physics, functional materials and coatings, medical physics and physical technologies in an interdisciplinary context.

Published quarterly in hard copy and online by V.N. Karazin Kharkiv National University Publishing.  
ISSN 2312-4334 (Print), ISSN 2312-4539 (Online)

The editorial policy is to maintain the quality of published papers at the highest level by strict peer review.

Approved for publication by the Academic Council of the Karazin Kharkiv National University (April 22, 2019, Protocol No. 5). EEJP registered by the order of Ministry of Education of Ukraine № 747 of 07.13.2015, and included in the list of scientific specialized editions of Ukraine, which can be published results of dissertations for the degree of doctor and candidate of physical and mathematical sciences.

## Editor-in-Chief

Azarenkov N.A., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Deputy editor

Girka I.O., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Executive Secretary

Hirnyk S.A., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Editorial Board

Adamenko I.N., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Akulov V.P., City University of New York, USA

Antonov A.N., Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Sofia, Bulgaria

Barannik E.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Beresnev V.M., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Berezhnoy Yu.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Bizyukov A.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Bragina L.L. STU Kharkiv Polytechnical Institute, Ukraine

Broda B., University of Lodz, Poland

Budagov Yu.A., Joint Institute of Nuclear Research, Dubna, Russia

Dovbnya A.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Dragovich B.G., University of Belgrade, Serbia

Duplij S.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Garkusha I.E., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Gofman Yu., Jerusalem College of Technology, Israel

Grekov D.L., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Karnaukhov I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Khodusov V.D., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Kondratenko A.N., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Korchin A.Yu., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Krivoruchenko M.I., Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow, Russia

Lazurik V.T., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Mel'nik V.N., Institute of Radio Astronomy, Kharkiv, Ukraine

Merenkov N.P., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Neklyudov I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Noterdaeme J.-M., Max Planck Institute for Plasma Physics, Garching, Germany

Nurmagametov A.Yu., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Onyschenko I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Ostrikov K.N., Plasma Nanoscience Centre Australia, Clayton, Australia

Peletminsky S.V., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Pilipenko N.N., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Radinschi I., Gheorghe Asachi Technical University, Iasi, Romania

Slyusarenko Yu.V., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Smolyakov A.I., University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada

Shul'ga N.F., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Tkachenko V.I., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Voyevodin V.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Yegorov O.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

## Editorial office

Department of Physics and Technologies, V.N. Karazin Kharkiv National University

Kurchatov av., 31, office 402, Kharkiv, 61108, Ukraine

Tel: +38-057-335-18-33,

E-mail: [eejp@karazin.ua](mailto:eejp@karazin.ua),

Web-pages: <http://periodicals.karazin.ua/eejp> (Open Journal System)

Certificate of State registration No.20644-10464P, 21.02.2014

## ORIGINAL PAPERS

**Instabilities in a Non-Uniformly Rotating Medium with Stratification of the Temperature in an External Uniform Magnetic Field** 4

Michael Kopp, Anatoly Tur, Volodymyr Yanovsky

*Нестійкості у середовищі, що неоднорідно обертається з температурною стратифікацією у зовнішньому однорідному магнітному полі*

*M.I. Kopp, A.B. Tur, V.V. Яновський*

**Chiral Fermions Algorithms in Lattice QCD** 34

Dafina Xhako, Rudina Zeqirllari, Artan Boriçi

*Алгоритми хіральних ферміонів у решітчастій КХД*

*Dafina Xhako, Rudina Zeqirllari, Artan Boriçi*

**Production of  $c\bar{c}$  – and  $b\bar{b}$  – Quark Pairs in PP Collisions at Energies of Experiments at the Large Hadron Collider** 40

Taras Horbatiuk, Volodymyr Kotlyar, Mykola Maslov, Anton Safronov

*Народження  $c\bar{c}$  – та  $b\bar{b}$  – кваркових пар в pp зіткненнях при енергіях експериментів на великому адронному колайдері*

*T.M. Горбатюк, В.В. Котляр, М.І. Маслов, А.С. Сафронов*

**Spectra of Collective Excitations and Low-Frequency Asymptotics of Green's Functions in Uniaxial and Biaxial Ferrimagnetics** 46

Anton Glushchenko, Michail Kovalevsky, Valentina Matskevych

*Спектри колективних збуджень та низькочастотні асимптотики функцій Гріна в одновісних та двовісних ферімагнетиках*

*A.V. Глуценко, М.Ю. Ковалевський, В.Т. Мацкевич*

**Dynamics of Electron in TEM Wave Field** 55

Yuriy Grigoriev, Andriy Zelinskiy, Tetiana Malykhina, Valentina Shpagina

*Динаміка електрону в полі TEM хвилі*

*Ю.М. Григор'єв, А.Ю. Зелінський, Т.В. Малихіна, В.О. Шпагіна*

**Modulation Instability in Two Component Bose-Einstein Condensate with Dissipation** 65

Anatoly Ivashin, Elena Marinenko

*Модуляційна нестійкість у двокомпонентному Бозе-Ейнштейнівському конденсаті з дисипацією*

*A.P. Івашин, О.Д. Маріненко*

**Surface-Kinetics-Limited Ostwald Ripening of Spherical Precipitates at Grain Boundaries** 75

Oleksandr Koropov, Roman Skorokhod

*Визрівання оствальда сферичних виділень на міжзеренній межі, яке лімітується поверхневою кінетикою*

*O.V. Коропов, Р.В. Скороход*

## HISTORY OF SCIENCE

**Institute of Theoretical Physics after A.I. Akhiezer** 86

Alla Tanshina

*Институт теоретической физики имени А.И. Ахиезера*

*Алла Таньшина*

PACS: 47.20.Ft; 47.55.pb; 52.65.Kj

## INSTABILITIES IN THE NON-UNIFORMLY ROTATING MEDIUM WITH TEMPERATURE STRATIFICATION IN THE EXTERNAL UNIFORM MAGNETIC FIELD

 Michael Kopp<sup>1</sup>, 
  Anatoly Tur<sup>3</sup>, 
  Volodymyr Yanovsky<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Single Crystals, Nat. Academy of Science Ukraine,*

*Nauky Ave. 60, Kharkov 31001, Ukraine*

<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University*

*4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine*

<sup>3</sup>*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*

*9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

\*E-mail: [yanovsky@isc.kharkov.ua](mailto:yanovsky@isc.kharkov.ua)

Received December 20, 2018; revised February 14, 2019; accepted February 21, 2019

In this paper the stability of the non-uniformly rotating cylindrical plasma in the axial uniform magnetic field with the vertical temperature gradient is investigated. In the approximation of geometrical optics a dispersion equation for small axisymmetric perturbations is obtained with the effects of viscosity, ohmic and heat conductive dissipation taken into account. The stability criteria for azimuthal plasma flows are obtained in the presence of the vertical temperature gradient and the constant magnetic field. The Rayleigh-Benard problem for stationary convection in the non-uniformly rotating layer of the electrically conducting fluid in the axial uniform magnetic field is considered. In the linear theory of stationary convection the critical value of the Rayleigh number  $Ra_c$  subject to the profile of the inhomogeneous rotation (Rossby number  $Ro$ ) is obtained. It is shown that the negative values of the Rossby number  $Ro < 0$  have a destabilizing effect, since the critical Rayleigh number  $Ra_c$  becomes smaller, than in the case of the uniform rotation  $Ro = 0$ , or of the rotation with positive Rossby numbers  $Ro > 0$ . To describe the nonlinear convective phenomena the local Cartesian coordinate system was used, where the inhomogeneous rotation of the fluid layer was represented as the rotation with a constant angular velocity  $\vec{\Omega}_0$  and azimuthal shear  $\vec{U}_0(x)$  with linear dependence on the coordinate  $x$ . As a result of applying the method of perturbation theory for the small parameter of supercriticality of the stationary Rayleigh number a nonlinear Ginzburg-Landau equation was obtained. This equation describes the evolution of the finite amplitude of perturbations by utilizing the solution of the Ginzburg-Landau equation. It is shown that the weakly nonlinear convection based on the equations of the six-mode (6D) Lorentz model transforms into the identical Ginzburg-Landau equation. By utilizing the solution of the Ginzburg-Landau equation, we determined the dynamics of unsteady heat transfer for various profiles of the angular velocity of the rotation of electrically conductive fluid.

**KEY WORDS:** magnetorotational instability, Rayleigh-Benard convection, nonlinear theory, Ginzburg-Landau equation

## НЕСТІЙКОСТІ В СЕРЕДОВИЩІ, ЯКЕ НЕОДНОРІДНО ОБЕРТАЄТЬСЯ З ТЕМПЕРАТУРНОЮ СТРАТИФІКАЦІЄЮ У ЗОВНІШНЬОМУ ОДНОРІДНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Михайло Й. Копп<sup>1</sup>, Анатолій В. Тур<sup>3</sup>, Володимир В. Яновський<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України*

*пр. Науки 60, 61001 Харків, Україна*

<sup>2</sup>*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна*

*майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна*

<sup>3</sup>*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*

*9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Досліджується стійкість циліндричної плазми, що неоднорідно обертається в аксіальному однорідному магнітному полі з вертикальним градієнтом температури. У наближенні геометричної оптики отримано дисперсійне рівняння для малих осесиметричних збурень з урахуванням ефектів в'язкості, омичної та теплопровідної дисипації. Знайдено критерії стійкості азимутальних течій плазми при наявності вертикального градієнта температури і постійного магнітного поля. Розглянуто задачу Релея-Бенара для стаціонарної конвекції в шарі електропровідної рідини, що неоднорідно обертається в аксіальному магнітному полі. У лінійній теорії стаціонарної конвекції отримано критичне значення числа Релея  $Ra_c$  в залежності від профілю неоднорідного обертання (числа Росбі  $Ro$ ). Показано, що негативні значення числа Росбі  $Ro < 0$  надають дестабілізуючий ефект, оскільки критичне число Релея  $Ra_c$  стає меншим, ніж у разі однорідного обертання  $Ro = 0$  або обертання з позитивними числами Росбі  $Ro > 0$ . Для опису нелінійних конвективних явищ використовувалася локальна декартова система координат, в якій неоднорідне обертання шару рідини представляється у вигляді обертання з постійною кутовою швидкістю  $\vec{\Omega}_0$  і азимутальним широм  $\vec{U}_0(x)$ , профіль швидкості якого є локально лінійним. В результаті застосування методу теорії збурень за малим параметром надкритичності стаціонарного числа Релея отримано нелінійне рівняння типу Гінзбурга-Ландау, що описує еволюцію кінцевої амплітуди збурень. Показано, що розглянута слабонелінійна

конвекція на основі рівнянь шести-модової (6D) моделі Лоренца перетворюється в ідентичне рівняння Гінзбурга-Ландау. Використовуючи рішення рівняння Гінзбурга-Ландау, ми визначили динаміку нестационарного переносу тепла для різних профілів кутової швидкості обертання електропровідної рідини.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** магнітообертальна нестійкість, конвекція Релея-Бенара, слабонелінійна теорія, рівняння Гінзбурга-Ландау

## НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ С ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Михаил И. Копп<sup>1</sup>, Анатолий В. Тур<sup>3</sup>, Владимир В. Яновский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины  
пр. Науки 60, 61001 Харьков, Украина

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина  
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина

<sup>3</sup>Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology  
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

Исследуется устойчивость неоднородно вращающейся цилиндрической плазмы в аксиальном однородном магнитном поле с вертикальным градиентом температуры. В приближении геометрической оптики получено дисперсионное уравнение для малых осесимметричных возмущений с учетом эффектов вязкости, омической и теплопроводной диссипации. Найдены критерии устойчивости азимутальных течений плазмы при наличии вертикального градиента температуры и постоянного магнитного поля. Рассмотрена задача Рэлея-Бенара для стационарной конвекции в неоднородно вращающемся слое электропроводящей жидкости в аксиальном однородном магнитном поле. В линейной теории стационарной конвекции получено критическое значение числа Рэлея  $Ra_c$  в зависимости от профиля неоднородного вращения (числа Россби  $Ro$ ).

Показано, что отрицательные значения числа Россби  $Ro < 0$  оказывают дестабилизирующий эффект, так как критическое число Рэлея  $Ra_c$  становится меньше, чем в случае однородного вращения  $Ro = 0$  или вращения с положительными числами Россби  $Ro > 0$ . Для описания нелинейных конвективных явлений использовалась локальная декартова система координат, в которой неоднородное вращение слоя жидкости представляется в виде вращения с постоянной угловой скоростью  $\bar{\Omega}_0$  и азимутальным широм  $\bar{U}_0(x)$ , профиль скорости которого локально линеен. В результате применения метода теории возмущений по малому параметру надкритичности стационарного числа Рэлея, получено нелинейное уравнение типа Гинзбурга-Ландау, описывающее эволюцию конечной амплитуды возмущений. Показано, что рассматриваемая слабонелинейная конвекция на основе уравнений шести-модовой модели Лоренца преобразуется в идентичное уравнение Гинзбурга-Ландау. Используя решение уравнения Гинзбурга-Ландау, мы определили динамику нестационарного переноса тепла для различных профилей угловой скорости вращения электропроводящей жидкости.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** магнитовращательная неустойчивость, конвекция Рэлея-Бенара, слабонелинейная теория, уравнение Гинзбурга-Ландау

Fluid flow caused by a temperature gradient in the gravitational field, known as the phenomenon of free convection [1-3], plays an important role both in natural phenomena and in engineering and industrial applications. For several decades, free convection in liquid layers or the Rayleigh-Benard convection has been theoretically and experimentally investigated. Of particular interest are the problems related to the effect of rotation and magnetic field on the Rayleigh-Benard convection, for example, because of their applications to the theory of vortex and magnetic dynamo [4-6]. Convection, in which the axis of rotation of a medium and that of the uniform magnetic field coincide with the direction of the gravity vector, was well studied in [1-2]. The case when the directions of the axes of rotation and that of magnetic field are perpendicular to each other, and perpendicular to the direction of the gravity vector, is also of interest for solving some astrophysical problems. Such a formulation of the problem corresponds to the convection in the fluid layers located in the equatorial region of a rotating object, where the azimuthal magnetic field plays a significant role. The linear theory of such convection was first formulated in [7-8]. The linear theory of rotating magnetic convection for an arbitrary deviation of the axes of rotation and that of the magnetic field from the vertical axis (field of gravity) was developed in [9]. The studies listed above constitute a linear theory that provides information on the convection onset. It is obvious that linear models do not provide information on the final amplitude of convection. This amplitude occurs when interaction between several perturbation modes takes place. Therefore, it is important to realize the physical mechanism of nonlinear effects and to quantify the heat and mass transfer in terms of finite amplitudes. Up to date, there is no rigorous nonlinear model that can be solved analytically. Currently, to construct a nonlinear theory of convection, the perturbation method developed in [10] is widely used. This work shows that the initial heat transfer by convection depends linearly on the Rayleigh number, and then, at higher Rayleigh numbers, the heat transfer is slightly different from the linear case. The authors of [10] called this process weakly nonlinear, where the nonlinearity depended on the linear case. The weakly nonlinear theory of convection was further developed with regard to modulation of the parameters that control the convection process, what is very important for solving many technological problems. Different types of modulation, such as rotation [11-14], gravity [15-17], temperature [18-20] and magnetic field [21-22], were studied for stationary weakly nonlinear convection in various media: porous media, nanofluids, and so on. In these papers [11-22] the effect of modulation of the parameters (rotation, gravity, temperature, magnetic field) on the heat and mass transfer in convective media was determined. Despite the enormous amount of works on the Rayleigh-Benard convection, there is still a certain gap in the study of the

influence of inhomogeneous (or differential) rotation on convective processes. The interest to these studies is primarily caused by various astrophysical problems. It is known that the majority of various space objects consisting of dense gases or liquid (Jupiter, Saturn, Sun, etc.) rotate non-uniformly, i.e. different parts of the object rotate around a common axis of rotation with different angular velocities. Differential rotation is also observed in galaxies, accretion disks, and extended rings of planets. Besides, such large-scale vortex structures as typhoons, cyclones and anticyclones, etc. also rotate non-uniformly.

The stability of the inhomogeneous rotation of the ideally conducting medium in the magnetic field was first considered in [23–24]. These works also show that a weak axial magnetic field destabilizes the azimuthal differential rotation of plasma, and when the condition  $d\Omega^2/dR < 0$  is satisfied, a magneto-rotational instability (MRI) or standard MRI (SMRI) in the non-dissipative plasma occurs. Since this condition is also satisfied for Keplerian flows  $\Omega \sim R^{-3/2}$ , the MRI is the most likely source of turbulence in the accretion disks. The MRI discovery stimulated numerous theoretical studies. The first theoretical studies that dealt with the problem of accretion flows were carried out in the approximation of a non-dissipative plasma with the radial thermal stratification [25] and the magnetization of the heat fluxes [26] taken into account. In [27] the stability of the differentially rotating plasma in the axial magnetic field was studied with simultaneous consideration of both dissipative effects (viscosity and Ohmic dissipation) and thermal radial stratification of plasma. MRI in a spiral magnetic field, i.e. with nontrivial topology was studied in [28–29]. While studying the MRI, the differential rotation of the medium is simulated by the Couette flow between two cylinders rotating at different angular velocities (Fig. 1a), which is convenient for carrying out laboratory experiments [30].

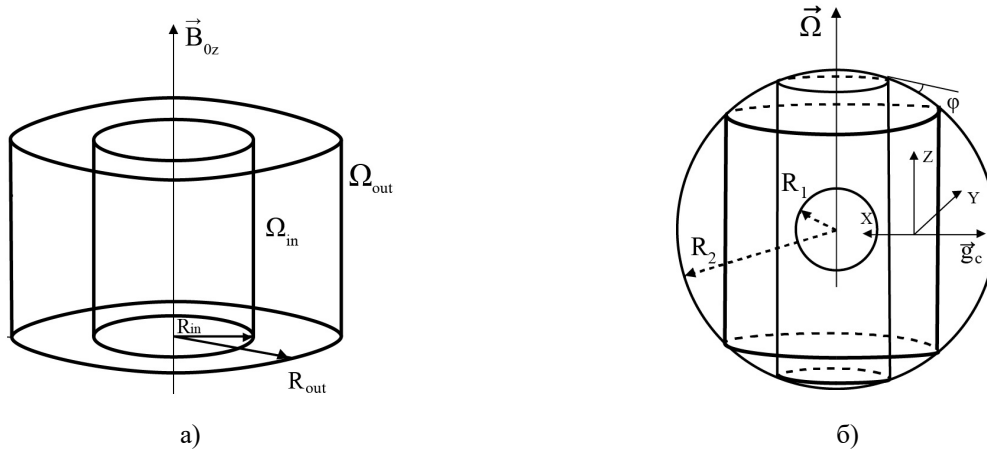


Fig.1. a) geometry of the problem for standard MRI: two concentric cylinders with radii  $R_{in} = R_1$  and  $R_{out} = R_2$  rotating with velocities  $\Omega_{in} = \Omega_1$  and  $\Omega_{out} = \Omega_2$ .  $B_{0z}$  - axial magnetic field directed vertically upwards; b) Convective Busse dynamo model for a layer of the electrically conductive fluid in the rotating magneto-convection.

In [31] various models of thermal convection in rapidly rotating fluids penetrated by strong magnetic fields are discussed. A special attention is paid to the probability, that the magnetic field can be supported by the dynamo action, but not by the electric currents applied externally. In [31] an overview of two dynamo models is given. This is the Childress-Soward flat layer model [32] and the annulus model by Busse [33]. The Childress-Soward model operates in the convective flat layers of fluid located in moderate and subpolar latitudes (Fig. 2a) of the space object.

For the terrestrial dynamo, the Busse model operates in the equatorial layers, where the azimuth magnetic field plays a significant role. The electrically conductive fluid rotates in the annular region located between the solid core and the Earth crust. The theory of this process was developed in [33–35], where the model of rotating cylinders was used. According to this theory [35] the outer cylinder rotates at a constant angular velocity  $\Omega_2$ , while the inner one remains stationary  $\Omega_1 = 0$  (Fig. 1b). Convective flows (Benard cells) occur in the fluid layer between the cylinders due to the temperature difference between the inner  $T_{in}$  and outer  $T_{out}$  cylinders  $T_{out} > T_{in}$ . The difference in the heights of the inner  $h_1$  and outer  $h_2$  cylinders leads to a similar effect of the Coriolis force on  $\beta$ -plane.

These models do not completely solve the problems of geodynamo, for example, the problem of magnetic field inversions. Unlike the Childress-Soward and Busse models, the stability of a non-uniformly rotating layer of the electrically conducting fluid in the axial magnetic field, in which the lower surface of the layer ( $T_d$ ) is hotter than the upper one ( $T_u$ ) (Rayleigh-Benard problem):  $T_d > T_u$ , was studied in [36] (Fig. 2b). In [36] a chaotic regime based on the nonlinear dynamics equations of a six-dimensional phase space was studied. The analysis of these equations revealed the existence of a complex chaotic structure – a strange attractor. Besides, a convection mode was determined, in which some chaotic change in direction (inversion) and amplitude of the perturbed magnetic field occurs, with the the medium inhomogeneous rotation taken into account.

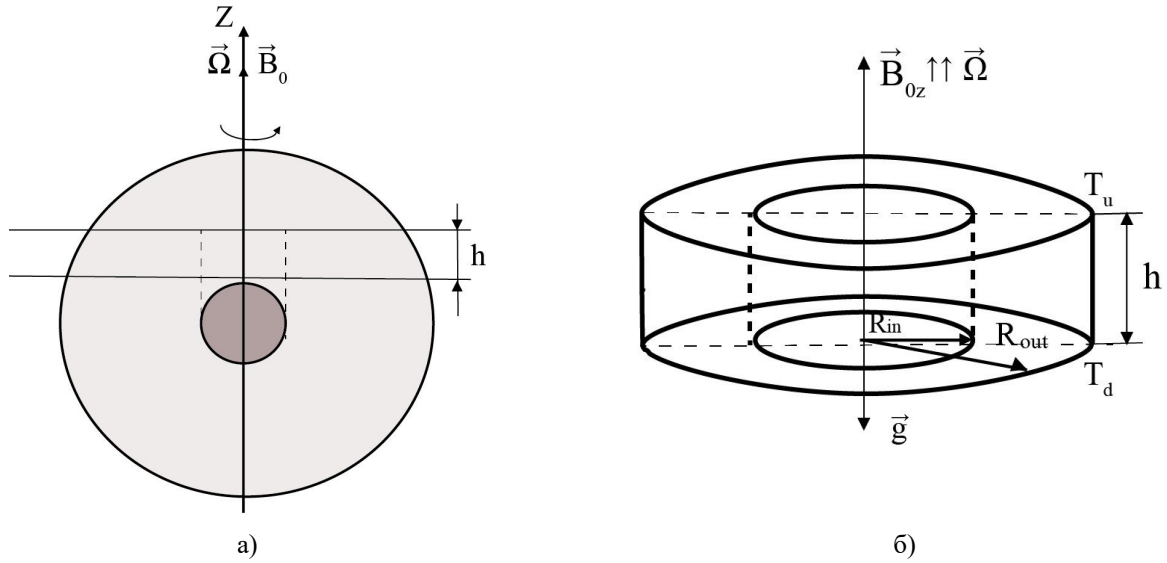


Fig.2. a) A layer (thickness  $h$ ) of the electrically conductive fluid of the astrophysical object that rotates at a non-uniform velocity  $\vec{\Omega}(R)$  in the axial magnetic field  $\vec{B}_0$  (analogous to the Childress-Soward dynamo model); b) geometric description of the convective dynamo simulated by Couette-Taylor flow in a thin layer of the electrically conducting fluid.

The aim of this work is to study local instabilities in rotating flows in the presence of a constant vertical magnetic field and the temperature gradient in the field of gravity, as well as the development of a linear and weakly nonlinear theory of the stationary convection in a non-uniformly rotating layer of the electrically conductive fluid in the axial uniform magnetic field.

The results obtained in this work can be applied to various astrophysical and geophysical problems, which consider magnetic convection in rotating layers of the Earth interior, the Sun, hot galactic clusters, accretion disks and other objects.

### LOCAL INSTABILITIES IN A MAGNETIZED ROTATING FLOW WITH WEAK TEMPERATURE STRATIFICATION Basic equations of small perturbations evolution

Let us consider the flow dynamics of a non-uniformly rotating conductive fluid (plasma) in a constant gravitational  $g$  and magnetic  $B_0$  fields with a constant vertical temperature gradient  $\nabla T_0 = \text{const} = -Ae$ , where  $A > 0$  is a constant gradient,  $e$  is a unit vector directed vertically upwards along  $Z$  axis. The stationary flow of the non-homogeneously rotating fluid will be simulated by the Couette-Taylor flow, located between two rotating cylinders with the angular velocity of rotation  $\Omega(R)$ :

$$\Omega(R) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)},$$

where  $R_1 = R_{in}$ ,  $R_2 = R_{out}$ ,  $\Omega_1 = \Omega_{in}$ ,  $\Omega_2 = \Omega_{out}$  - radius and angular velocity of rotation of the inner and outer cylinders, respectively.

To describe the motion of a viscous incompressible electrically conducting fluid we use the equations of magnetic hydrodynamics in the Boussinesq approximation [1-2]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (P + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\vec{B} \nabla) \vec{B} + \vec{e} g \beta T + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{B} - (\vec{B} \nabla) \vec{v} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \chi \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad (4)$$

where  $\beta$  is the coefficient of thermal expansion,  $\rho_0 = const$  is the density of the medium,  $\nu$  is the coefficient of kinematic viscosity,  $\eta = c^2/4\pi\sigma$  is the coefficient of magnetic viscosity,  $\sigma$  is the coefficient of electrical conductivity,  $\chi$  is the coefficient of the medium thermal conductivity.

We assume that the uniform (constant) magnetic field  $\vec{B}_0$  is directed along the axis  $OZ$ . The field will be further called axial in the cylindrical coordinate system  $(R, \phi, z)$ . The direction of the magnetic field coincides with the axis of rotation of the fluid  $\vec{\Omega} \parallel OZ$ , which rotates in the azimuthal direction with velocity  $\vec{v}_0 = R\Omega(R)\vec{e}_\phi$ . The stationary state of the system satisfies the following equations:

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dR}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = -g\beta T_0, \quad \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0. \tag{5}$$

Equation (5) shows that the centrifugal equilibrium is established in the radial direction, and the hydrostatic one – in the vertical direction.

Our main task is to consider the problem of the stability of small perturbations of physical quantities  $(\vec{u}, \vec{b}, p, \theta)$  against a background of the stationary state (5). By representing all the quantities in equations (1)-(4) as the sum of the stationary and perturbed parts  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$ ,  $P = p_0 + p$ ,  $T = T_0 + \theta$ , we obtain the evolution equations for small perturbations in the linear approximation:

$$\begin{pmatrix} \partial_t - \nu \nabla^2 + M_\Omega + \vec{v}_0 \cdot \nabla & -\frac{\vec{B}_0 \cdot \nabla}{4\pi\rho_0} & \vec{e}g\beta \\ -\vec{B}_0 \cdot \nabla & \partial_t - \eta \nabla^2 - M_\Omega + \vec{v}_0 \cdot \nabla & 0 \\ -A \cdot \vec{e} & 0 & \partial_t - \chi \nabla^2 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{b} \\ \theta \end{pmatrix} = -\frac{\nabla}{\rho_0} \begin{pmatrix} p + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{b}}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

where indication  $M_\Omega$  for the matrix of the non-uniform rotation is entered [28]:

$$M_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega + R \frac{d\Omega}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perturbed fields  $\vec{u}, \vec{b}$  also satisfy the solenoid condition:

$$div \vec{b} = 0, \quad div \vec{u} = 0. \tag{7}$$

As long as the medium is stratified by temperature and rotates with an inhomogeneous angular velocity, a justification for the applicability of the limit of geometric optics on the bases of the asymptotic WKB (Wentzel - Kramers - Brillouin) method [37] should be provided.

### Asymptotic WKB method and geometric optics approximation

Let us consider the limit of the medium weak stratification when the spatial scale of the medium heterogeneity

$L = \left( \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dz} \right)^{-1}$  far exceeds the typical perturbation scale (wavelength)  $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ :  $L \gg \lambda$ . In the short-wave limit

( $L \gg \lambda$ ) an approximation of geometrical optics is performed, and therefore all the perturbed quantities in equations (6-7) can be represented by the dependence of the form:  $\exp(i\vec{k}\vec{r} + \gamma t)$ , where  $\vec{k}$  is the wave vector,  $\gamma$  is the amplification (or attenuation) factor of the disturbances [38].

According to [28–29] we present a more rigorous justification of the short-wave approximation using the asymptotic WKB method. For this purpose we represent the solutions of the linearized system of equations (6) in the form of an asymptotic series in the small parameter  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ):



$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{b} \\ p \\ \theta \end{pmatrix} = e^{i\Phi(x,t)/\varepsilon} \begin{pmatrix} \vec{u}^{(0)}(x,t) + \varepsilon\vec{u}^{(1)}(x,t) + \dots \\ \vec{b}^{(0)}(x,t) + \varepsilon\vec{b}^{(1)}(x,t) + \dots \\ p^{(0)}(x,t) + \varepsilon p^{(1)}(x,t) + \dots \\ \theta^{(0)}(x,t) + \varepsilon\theta^{(1)}(x,t) + \dots \end{pmatrix}, \tag{8}$$

where  $x = (R, \phi, z)$  are the cylindrical coordinates recorded in vector form;  $\Phi(x, t)$  is a scalar function, called the phase (or eikonal) of the perturbed quantities oscillations;  $\vec{u}^{(n)}, \vec{b}^{(n)}, \theta^{(n)}, p^{(n)}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) are the amplitudes of disturbances. The dissipative processes, when using the asymptotic expansion (8), have an effect in the second order of  $\varepsilon$  smallness [28-29], i.e.  $\nu = \varepsilon^2 \tilde{\nu}, \eta = \varepsilon^2 \tilde{\eta}, \chi = \varepsilon^2 \tilde{\chi}$ . For convenience, we introduce the indication for the derivative along the fluid flow lines:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla.$$

Substituting decompositions (8) into the system of equations (6), we obtain the system of local differential equations for  $\varepsilon^{-1}$  and  $\varepsilon^0$  orders:

$$\varepsilon^{-1} : \begin{pmatrix} \frac{D\Phi}{Dt} & -\frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi)}{4\pi\rho_0} & 0 \\ -(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi) & \frac{D\Phi}{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D\Phi}{Dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}^{(0)} \\ \vec{b}^{(0)} \\ \theta^{(0)} \end{pmatrix} = -\frac{\nabla\Phi}{\rho_0} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(0)}}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\varepsilon^0 : i \cdot \begin{pmatrix} \frac{D\Phi}{Dt} & -\frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi)}{4\pi\rho_0} & 0 \\ -(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi) & \frac{D\Phi}{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D\Phi}{Dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u}^{(1)} \\ \vec{b}^{(1)} \\ \theta^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{i\nabla\Phi}{\rho_0} \begin{pmatrix} p^{(1)} + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(1)}}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tag{10}$$

$$+ \frac{\nabla}{\rho_0} \begin{pmatrix} p^{(0)} + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(0)}}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Solenoid conditions (7) take the form:

$$\vec{u}^{(0)} \cdot \nabla\Phi = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u}^{(0)} + i\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla\Phi = 0, \tag{11}$$

$$\vec{b}^{(0)} \cdot \nabla\Phi = 0, \quad \nabla \cdot \vec{b}^{(0)} + i\vec{b}^{(1)} \cdot \nabla\Phi = 0.$$

Next, multiplying equations (9) alternately by  $\nabla\Phi, u^{(0)}, b^{(0)}$  and applying equations (11) we obtain the following relations:

$$\frac{(\nabla\Phi)^2}{\rho_0} \cdot \left( p^{(0)} + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(0)}) \right) = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} b^{(0)} \cdot \nabla\Phi = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} \theta^{(0)} \cdot \nabla\Phi = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{u}^{(0)} - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi)}{4\pi\rho_0} \vec{b}^{(0)} \cdot \vec{u}^{(0)} = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} \vec{b}^{(0)} \cdot \vec{u}^{(0)} - (\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi) \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{u}^{(0)} = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} \theta^{(0)} \cdot \vec{u}^{(0)} = 0, \\ \frac{D\Phi}{Dt} \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi)}{4\pi\rho_0} \vec{b}^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} \vec{b}^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} - (\vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi) \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} = 0, \quad \frac{D\Phi}{Dt} \theta^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Due to the fact that  $\nabla\Phi \neq 0$ ,  $\vec{u}^{(0)} \neq 0$ ,  $\vec{b}^{(0)} \neq 0$ ,  $\theta^{(0)} \neq 0$  we obtain:

$$p^{(0)} = -\frac{1}{4\pi}(\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(0)}), \quad \frac{D\Phi}{Dt} = 0, \quad \vec{B}_0 \cdot \nabla\Phi = 0. \quad (12)$$

According to (12) the system of equations (10) becomes much simpler.

$$\begin{aligned} \left( \frac{D}{Dt} + \tilde{\nu}(\nabla\Phi)^2 + M_\Omega \right) \vec{u}^{(0)} - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)}{4\pi\rho_0} \vec{b}^{(0)} - \tilde{e}g\beta\theta^{(0)} = -\frac{i\nabla\Phi}{\rho_0} \left( p^{(1)} + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{b}^{(1)}}{4\pi} \right) \\ \left( \frac{D}{Dt} + \tilde{\eta}(\nabla\Phi)^2 - M_\Omega \right) \vec{b}^{(0)} - (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u}^{(0)} = 0 \\ \left( \frac{D}{Dt} + \tilde{\chi}(\nabla\Phi)^2 \right) \theta^{(0)} - A \cdot \vec{e} \cdot \vec{u}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

The second relation in (12) is the Hamilton-Jacobi equation with the initial condition:  $\Phi(x,0) = \Phi_0(x)$ . Acting on this equation by operator  $\nabla$  we obtain the eikonal equation:

$$\partial_t \nabla\Phi + \nabla(\vec{v}_0 \cdot \nabla\Phi) = 0,$$

or

$$\partial_t \nabla\Phi + e_R \left( \frac{\partial\Omega}{\partial R} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \Omega(R) \frac{\partial^2\Phi}{\partial R \partial\phi} \right) + e_\phi \frac{\Omega(R)}{R} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + e_z \Omega(R) \frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial\phi} = 0$$

the initial condition for this equation is:  $\nabla\Phi(x,0) = \nabla\Phi_0(x)$ . It is known that the phase gradient  $\nabla\Phi$  is by definition a wave vector:

$$\vec{k} = \nabla\Phi = e_R k_R + e_\phi k_\phi + e_z k_z,$$

then for the components of vector  $k$  we obtain the following equations:

$$\partial_t k_R = -\left( \frac{\partial\Omega}{\partial R} k_\phi + \Omega(R) R \frac{\partial k_\phi}{\partial\phi} \right), \quad \partial_t k_\phi = -\Omega(R) \frac{\partial k_\phi}{\partial\phi}, \quad \partial_t k_z = -\Omega(R) R \frac{\partial k_\phi}{\partial z}. \quad (14)$$

From these equations it follows that for the axisymmetric perturbations ( $k_\phi = \partial\Phi/R\partial\phi = 0$ ) the wave vectors  $k_R$  and  $k_z$  do not depend on time, i.e. they can be considered constant. Besides, it is known (see, for example, [37]) that geometric optics is approximated locally, where the amplitude and direction of the wave remain almost unchanged at the distance of the order of the wavelength  $\lambda$ , hence the wave vector  $\vec{k}$  (or phase gradient  $\nabla\Phi$ ) can be considered constant:  $|\vec{k}| = const$ . Since the approximation of geometrical optics is well satisfied for the axisymmetric perturbations, the perturbations  $\vec{u}^{(0)}$ ,  $\vec{b}^{(0)}$ ,  $\theta^{(0)}$ ,  $p^{(1)}$  in equations (13) can be represented as plane waves:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}^{(0)} \\ \vec{b}^{(0)} \\ \theta^{(0)} \\ p^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{U} \\ \vec{H} \\ \Theta \\ P \end{pmatrix} \exp(\gamma t + ik_R R + ik_z z). \quad (15)$$

After substituting (15) into the system of equations (13) we obtain the system of equations for the amplitudes of the perturbations  $\vec{U}, \vec{H}, \Theta, P$ :

$$(\gamma + \omega_v)U_R - 2\Omega u_\phi = \frac{i(\vec{k}\vec{B}_0)H_R}{4\pi\rho_0} - \frac{ik_R}{\rho_0} \tilde{P} \quad (16)$$

$$(\gamma + \omega_v)U_\phi + 2\Omega(1 + Ro)U_R = \frac{i(\vec{k}\vec{B}_0)H_\phi}{4\pi\rho_0} \quad (17)$$

$$(\gamma + \omega_v)U_z = \frac{i(\vec{k}\vec{B}_0)H_z}{4\pi\rho_0} - \frac{ik_z}{\rho_0} \tilde{P} + g\beta\Theta \quad (18)$$

$$(\gamma + \omega_\eta)H_R = i(\vec{k}\vec{B}_0)U_R \quad (19)$$

$$(\gamma + \omega_\eta)H_\phi = i(\vec{k}\vec{B}_0)U_\phi + R \frac{\partial\Omega}{\partial R} H_R \quad (20)$$

$$(\gamma + \omega_\eta)H_z = i(\vec{k}\vec{B}_0)U_z \quad (21)$$

$$(\gamma + \omega_\chi)\Theta = AU_z \quad (22)$$

$$k_R U_R + k_z U_z = k_R H_R + k_z H_z = 0 \quad (23)$$

In equations (16)-(23) the indications for the total pressure  $\tilde{P} = P + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{H}^{(1)}}{4\pi}$ , viscous  $\omega_v = \nu |\vec{k}|^2$ , ohmic  $\omega_\eta = \eta |\vec{k}|^2$  and heat conductive  $\omega_\chi = \chi |\vec{k}|^2$  dissipation frequency ( $|\vec{k}|^2 = k_R^2 + k_z^2$ ) are introduced,  $Ro$  is the hydrodynamic Rossby number, characterizing the heterogeneity of the medium rotation:  $Ro = \frac{R}{2\Omega} \frac{\partial\Omega}{\partial R}$ .

Using the method of elimination of variables, the system of equations (16)-(23) is reduced to the equations for  $U_R, U_\phi, U_z$ :

$$\left( \gamma + \omega_v + \frac{(\vec{k}\vec{B}_0)^2}{4\pi\rho_0(\gamma + \omega_\eta)} \right) U_R - 2\Omega \frac{k_z^2}{|\vec{k}|^2} U_\phi + g\beta \frac{Ak_z k_R U_z}{|\vec{k}|^2 (\gamma + \omega_\chi)} = 0 \quad (24)$$

$$\left( 2\Omega(1 + Ro) + \frac{(\vec{k}\vec{B}_0)^2}{4\pi\rho_0(\gamma + \omega_\eta)^2} R \frac{\partial\Omega}{\partial R} \right) U_R + \left( \gamma + \omega_v + \frac{(\vec{k}\vec{B}_0)^2}{4\pi\rho_0(\gamma + \omega_\eta)} \right) U_\phi = 0 \quad (25)$$

$$2\Omega \frac{k_z k_R}{|\vec{k}|^2} U_\phi + \left( \gamma + \omega_v + \frac{(\vec{k}\vec{B}_0)^2}{4\pi\rho_0(\gamma + \omega_\eta)} - \frac{g\beta Ak_R^2}{|\vec{k}|^2 (\gamma + \omega_\chi)} \right) U_z = 0 \quad (26)$$

So, the task to provide the stability of a rotating magnetized flow with temperature stratification leads to the problem of finding the eigenvalues of  $\gamma$  from the system of equations (24)-(26).

#### Analysis of the dispersion equation

The condition for solving the system of equations (24)-(26) is that its determinant equals zero, then we obtain the dispersion equation:

$$\begin{aligned} & \left[ (\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2 \right]^2 \cdot \left[ (\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\chi) + \omega_A^2(\gamma + \omega_\chi) - N_A^2(1 - \xi^2)(\gamma + \omega_\eta) \right] + \\ & + N_A^2 \xi^2 (1 - \xi^2)(\gamma + \omega_\eta) \cdot \left[ \kappa^2(\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2(\kappa^2 - 4\Omega^2) \right] + \xi^2 \cdot \left[ \kappa^2(\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2(\kappa^2 - 4\Omega^2) \right] \times \\ & \times \left[ (\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta)(\gamma + \omega_\chi) + \omega_A^2(\gamma + \omega_\chi) - N_A^2(1 - \xi^2)(\gamma + \omega_\eta) \right] = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Here  $\omega_A$  is Alfvén frequency,  $\omega_A^2 = k_z^2 c_A^2 = \frac{k_z^2 B_0^2}{4\pi\rho_0}$ ,  $N_A = \sqrt{g\beta A}$  is Vaytsel-Brent frequency, dependent on the temperature gradient,  $\kappa = 2\Omega\sqrt{1 + Ro}$  is epicyclic frequency,  $\xi = \frac{k_z}{|k|}$ .

Equation (27) after simple algebraic transformations splits into two dispersion equations of the following form:

$$(\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2 = 0 \tag{28}$$

$$(\gamma + \omega_\chi) \left[ ((\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2)^2 + \xi^2 \kappa^2 ((\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2) - 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2 \right] - N_A^2 (1 - \xi^2) (\gamma + \omega_\eta) \left[ (\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2 \right] = 0 \tag{29}$$

The dispersion equation (28) describes the attenuation of Alfvén waves in plasma with viscous and ohmic dissipation. In this equation, the influence of rotation and temperature stratification on the perturbation increment is not observed, therefore, we begin to analyze the dispersion equation (29). In some extreme cases, this equation gives the results, which are known by this time.

1). Let us consider the purely hydrodynamic limit, when the medium is homogeneous by temperature ( $A = 0$ ), non-dissipative, and rotates at the angular velocity  $\Omega = \Omega(R)$  (Couette flow) in the absence of the magnetic field, then from equation (29) we get:

$$\gamma^2 + \xi^2 \kappa^2 = 0 \tag{30}$$

From the above it follows that the necessary and sufficient condition for the stability of the rotating shear flow (Rayleigh criterion, see, for example, the review in [39]) is the reality of the epicyclic frequency  $\kappa^2 > 0$  or the realization of the inequality  $Ro > -1$ . For the flow with the Rossby profile  $Ro = -1$ , the axisymmetric perturbations in this extreme case are neutrally stable  $\gamma = 0$ .

2). Taking into account the stratification by temperature ( $A \neq 0$ ) and  $v = \chi = \eta = 0$ , from equation (29) we get:

$$\gamma^2 + \xi^2 \kappa^2 - N_A^2 \frac{k_R^2}{|k|^2} = 0 \tag{31}$$

In this case, the temperature stratification can either stabilize ( $N_A^2 < 0$ ) or destabilize ( $N_A^2 > 0$ ) the stable Couette flow ( $\kappa^2 > 0$ ), depending on the direction of the temperature gradient.

3). Within the limits of the ideal magnetic hydrodynamics ( $v = \chi = \eta = 0$ ) with  $A = 0$ ,  $\vec{B}_0 \neq 0$ ,  $\vec{\Omega} \neq 0$ , Chandrasekar [23] and Velikhov [24] have shown that the magnetic field destabilizes the Couette flow. Indeed, from equation (29) for this case we have:

$$(\gamma^2 + \omega_A^2)^2 + \xi^2 \kappa^2 (\gamma^2 + \omega_A^2) - 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2 = 0 \tag{32}$$

or

$$\gamma^2 + \omega_A^2 + \frac{\xi^2 \kappa^2}{2} = \pm \sqrt{\frac{\xi^4 \kappa^4}{4} + 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2} \tag{33}$$

From the above it follows that at moderate amplitudes of the magnetic field  $\omega_A < \Omega$ , the cumulative effect determined by the magnetic field is destabilizing, i.e. the development of instability currents at  $\kappa^2 > 0$  is assumed to be possible. This effect is the cause of the standard MRI.

4). With the temperature stratification taken into account, the equation (32) will take the form:

$$(\gamma^2 + \omega_A^2)^2 + (\xi^2 \kappa^2 - N_A^2 (1 - \xi^2)) (\gamma^2 + \omega_A^2) - 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2 = 0 \tag{34}$$

For the radially temperature-stratified plasma, when replacing  $-N_A^2 (1 - \xi^2)$  by  $\xi^2 N^2$  ( $N^2 = -\frac{1}{\Gamma\rho_0} \frac{dp_0}{dR} \frac{d}{dR} \left( \ln \frac{p_0}{\rho_0^\Gamma} \right)$ ,  $\Gamma$  is the adiabatic exponent), this equation was derived in [25] and actively studied in [40].

5). With only the rotation and the magnetic field in a homogeneous ( $A = 0$ ) dissipative medium taken into account, the equation (29) is transformed into the dispersion equation of the following form:

$$((\gamma + \omega_v)(\gamma + \omega_\eta) + \omega_A^2)^2 + \xi^2 \kappa^2 ((\gamma + \omega_\eta)^2 + \omega_A^2) - 4\Omega^2 \xi^2 \omega_A^2 = 0 \quad (35)$$

This equation was studied in detail in [41–43], and its generalization, with the radial thermal stratification of the medium taken into account, was presented in [27].

6). In the absence of the rotation and the magnetic field, in the case of a nonconductive medium, from equation (29) we obtain the dispersion equation:

$$\gamma^2 + \gamma(\omega_v + \omega_\chi) + \omega_v \omega_\chi - N_A^2(1 - \xi^2) = 0 \quad (36)$$

When utilizing the dimensionless variables  $\gamma \rightarrow \frac{V}{h^2} \gamma$ ,  $k_R h \rightarrow k$ ,  $k_z h \rightarrow \pi n$  in equation (36), we obtain the Rayleigh equation describing free convection in the liquid layer with thickness  $h$ . Its solution has the form, given in [2]:

$$\gamma_n = -\frac{(1 + \text{Pr})}{2 \text{Pr}} (k^2 + \pi^2 n^2) \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Pr} - 1}{2 \text{Pr}}\right)^2 (k^2 + \pi^2 n^2)^2 + \frac{Ra k^2}{\text{Pr}(k^2 + \pi^2 n^2)}}, \quad (37)$$

where  $n$  is an integral number characterizing the scale vertically. The magnitude of the instability increment  $\gamma_n$  depends on the dimensionless numbers of Rayleigh  $Ra = \frac{g\beta AL^4}{\nu\chi}$ , Prandtl  $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ , and the wave number  $K = \sqrt{k^2 + \pi^2 n^2}$ . The condition for the stability of small perturbations lies in the positiveness of the radicand, which corresponds to the Rayleigh numbers  $Ra > 0$ .

In contrast to [27], the dispersion equation (29), which we derived, takes into account the thermal dissipation (terms with  $\omega_\chi$ ) and vertical stratification (terms with  $N_A$ ) by temperature in the field of gravitation. Let us analyze the stability by writing down the dispersion equation (29) in the form of the fifth degree polynomial relative to  $\gamma$ :

$$P(\gamma) \equiv a_0 \gamma^5 + a_1 \gamma^4 + a_2 \gamma^3 + a_3 \gamma^2 + a_4 \gamma + a_5 = 0, \quad (38)$$

where the coefficients  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  have the appropriate form:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2(\omega_\eta + \omega_v) + \omega_\chi, \\ a_2 &= (\omega_v + \omega_\eta)^2 + 2(\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_v) + 4\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro) - N_A^2(1 - \xi^2) + 2\omega_\chi(\omega_\eta + \omega_v), \\ a_3 &= 2(\omega_v + \omega_\eta)(\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_v) + 8\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro)(\omega_\eta + \omega_\chi/2) + \omega_\chi(\omega_v + \omega_\eta)^2 + 2\omega_\chi(\omega_A^2 + \omega_v \omega_\eta) - \\ &\quad - N_A^2(1 - \xi^2)(2\omega_\eta + \omega_v), \\ a_4 &= (\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_v)^2 - 4\xi^2 \Omega^2 \omega_A^2 + 4\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro)(\omega_\eta^2 + \omega_A^2) + 8\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro)\omega_\eta \omega_\chi + 2\omega_v \omega_\eta^2 \omega_\chi - \\ &\quad - N_A^2(1 - \xi^2)(\omega_\eta^2 + 2\omega_v \omega_\eta + \omega_A^2), \\ a_5 &= \omega_\chi((\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_v)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 \omega_\eta^2 + 4\xi^2 \Omega^2 Ro(\omega_\eta^2 + \omega_A^2)) - N_A^2(1 - \xi^2)(\omega_\eta \omega_A^2 + \omega_\eta^2 \omega_v). \end{aligned} \quad (39)$$

The dispersion equation (39) is the equation of the fifth degree relative to  $\gamma$ , so the analytical determination of its roots in general case is not possible. However, the conclusion about stability of the perturbations described by equation (39) with real coefficients can be made without solving it, but only by analyzing its coefficients using the Routh-Hurwitz or Lienar-Shipar criteria [44]. In the latter criterium the number of determinant inequalities is approximately half as much as in that of Routh-Hurwitz, therefore its application is advisable. The Liénard-Chipart criterion for the perturbations asymptotic stability, described by the algebraic equation (38), is as follows. For  $P(\gamma)$  polynomial to have all roots with negative real parts, it is necessary and sufficient that:

a) all the coefficients of  $P(\gamma)$  polynomial were positive:  $a_n > 0, n = 0 \dots 5$ ;

b) the inequalities for the Hurwitz determinants were satisfied:  $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0 \dots$ , where  $\Delta_m$  denoted the Hurwitz determinant of  $m$  order:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_m \end{vmatrix}$$

By using the algorithm of Leenard-Shepard we obtain necessary and sufficient conditions for stability of the non-uniformly rotating plasma with the constant temperature gradient:

$$a_n > 0, n = 0 \dots 5, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0 \tag{40}$$

Here, the determinants  $\Delta_2$  and  $\Delta_4$  are correspondingly equal:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \{ a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 + 2 a_1 a_5 \} - a_5 \{ a_2 (a_1 a_2 - a_3) + a_5 \} \tag{41}$$

Substituting the values of coefficients  $a_n$  from (39), into the conditions of (40) we find the following inequalities:

1)  $(a_1 > 0) \Rightarrow 2(\omega_\eta + \omega_\nu) + \omega_\chi > 0$ , this inequality is performed automatically;

2)  $(a_2 > 0) \Rightarrow (\omega_\nu + \omega_\eta)^2 + 2(\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_\nu) + 4\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro) + 2\omega_\chi (\omega_\eta + \omega_\nu) > N_A^2 \frac{k_R^2}{|k|^2}$

This inequality shows that viscous, ohmic and thermal conductivity dissipation naturally lead to stabilization of the plasma flows stability. The stabilizing factors are also: the uniform magnetic field (Alfvén effect), non-uniform rotation (if the profile of the angular velocity of rotation is close to  $\Omega(R) \sim R^{-2}$  ( $\kappa^2 > 0$ ) and the temperature gradient at  $A < 0$ . In the limits of the nondissipative and homogeneous electrically conducting fluid in the uniform magnetic field this inequality transforms into the well-known Velikhov stability criterion [24]:

$$\omega_A^2 + \frac{\xi^2 \kappa^2}{2} > 0;$$

3) inequality  $a_3 > 0$ :

$$2(\omega_\nu + \omega_\eta)(\omega_A^2 + \omega_\eta \omega_\nu) + 8\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro)(\omega_\eta + \omega_\chi/2) + \omega_\chi (\omega_\nu + \omega_\eta)^2 + 2\omega_\chi (\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta) > N_A^2 \frac{k_R^2}{|k|^2} (2\omega_\eta + \omega_\nu)$$

does not contain any new conditions for stabilization of disturbances;

4) inequality  $a_4 > 0$ :

$$(\omega_A^2 + \omega_\nu \omega_\eta)^2 + 2\omega_\nu \omega_\eta^2 \omega_\chi + 4\xi^2 \Omega^2 Ro \omega_A^2 + 4\xi^2 \Omega^2 (1 + Ro)(\omega_\eta^2 + 2\omega_\nu \omega_\chi) > N_A^2 \frac{k_R^2}{|k|^2} (\omega_\eta^2 + 2\omega_\nu \omega_\eta + \omega_A^2)$$

5)  $a_5 > 0$ , or

$$1 - \frac{Ro}{Ro_{cr}} + \frac{Ro_T}{Ro_{cr}} \cdot \frac{k_R^2}{k_z^2} \cdot \frac{\omega_A^2 \omega_\eta + \omega_v \omega_\eta^2}{(\omega_A^2 + \omega_\eta^2) \omega_\chi} > 0, \quad Ro_{cr} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_v \omega_\eta)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 \omega_\eta^2}{4\Omega^2 \xi^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2)} \quad (42)$$

The parameter  $Ro_{cr}$  in inequality (42) corresponds to the critical value of the Rossby number  $Ro$  for the standard MRI (SMRI), which was obtained in [29]. The dimensionless parameters:  $Ro_T = N_A^2/4\Omega^2 = Ra/TaPr$  is the thermal number of Rossby, the numbers:  $Ra = g\beta AL^4/\nu\chi$  – of Rayleigh,  $Ta = 4\Omega^2 L^4/\nu^2$  – of Taylor on the typical scale of stratification  $L$ ,  $Pr = \nu/\chi$  is the Prandtl number.

Now we turn to the stability conditions b) consisting of inequalities with Hurwitz determinants (40). For the determinant  $\Delta_2 > 0$  we get:

$$\frac{2(\omega_\eta^3 + \omega_v^3) + 8\omega_v \omega_\eta (\omega_\eta + \omega_v + \omega_\chi) + 3\omega_\chi (\omega_\eta^2 + \omega_v^2) + 2\omega_A^2 (\omega_v + \omega_\eta)}{\omega_v + \omega_\chi} - \frac{2\omega_A^2 \omega_\chi}{\omega_v + \omega_\chi} > g\beta A \frac{k_R^2}{k^2} \quad (43)$$

In this inequality a new destabilizing term (the second fraction) has appeared, which has a significant impact, provided that the Prandtl number  $Pr \ll 1$  is small. Under the condition  $Pr \approx 1$  and  $Pr \gg 1$  the perturbations stabilization by the magnetic field in a dissipative medium takes place. After substituting the values of coefficients  $a_n$  into the expression for the Hurwitz determinant  $\Delta_4$ , we obtain the last of the stability conditions:  $\Delta_4 > 0$ . We do not give the explicit form of inequality  $\Delta_4 > 0$  because of the cumbersome form of the included expressions. However, note that the stability criterion  $\Delta_4 > 0$  contains the previous stability criterion (43).

## RAYLEIGH-BENARD PROBLEM FOR A THIN LAYER OF THE INHOMOGENEOUSLY ROTATING MAGNETIC PLASMA

### Formulation of the problem and basic equations

The system of equations (6) obtained in the previous section will be used to describe convective phenomena in the thin layer of the inhomogeneously rotating conducting medium (plasma) with thickness  $h \ll (R_{out} - R_{in})$ . The temperature of the lower part of the layer is denoted by  $T_d$ , and the upper one – by  $T_u$ , while  $T_d > T_u$  is the heating from the bottom (Fig. 3).

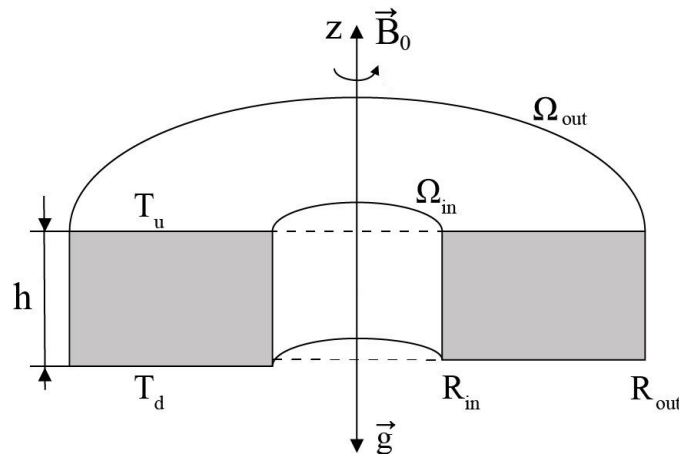


Fig. 3. The geometry of the problem for the inhomogeneously rotating magnetoconvection. The electrically conductive fluid fills the layer between two rotating cylinders with angular velocities  $\Omega_{in}$  and  $\Omega_{out}$ , respectively. The bottom surface of the layer has the temperature  $T_d$ , and the top one –  $T_u$ :  $T_d > T_u$ .

Such a formulation of the problem generalizes the classical Rayleigh-Benard problem for free convection. For this problem the typical scale of the medium inhomogeneity in the horizontal plane is larger than in the vertical direction  $L_R \gg L_h$ . Therefore, we will be able to apply the local WKB method for the disturbances depending on the horizontal coordinates  $(R, \phi)$ . We expand all the quantities into the Taylor series in the vicinity of the fixed points  $(R_0, \phi_0)$ , leaving the terms of the zero order in the local coordinates  $\tilde{R} = R - R_0$ ,  $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ . As a result, we obtain the system of differential equations (6) with constant coefficients. In this case the following relations will be taken into account:

$$\Omega_0 = \Omega(R_0), \nabla^2 \rightarrow \widehat{D}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{R}^2} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \widetilde{R}} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \widetilde{\phi}^2}, \widehat{D} \equiv \frac{d}{dz},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \right)_R = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix},$$

$$\left( \nabla^2 \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \right)_\phi = \nabla^2 \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_R \\ b_R \end{pmatrix} - \frac{1}{R_0^2} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix}.$$

Like in the previous section, our studies will be restricted to the axisymmetric perturbations  $\partial/\partial\phi = 0$ . Then all the perturbations in the system of equations (6) can be represented in the form of plane waves.

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{b} \\ \theta \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{U}(z) \\ \vec{H}(z) \\ \Theta(z) \\ \tilde{P}(z) \end{pmatrix} \exp(\gamma t + ik\tilde{R}) \tag{44}$$

then, in the short-wave approximation  $k \gg \frac{1}{R_0}$ , neglecting the terms  $\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}$ , we obtain

$$(\widehat{D}^2 - \gamma - k^2)U_R + \sqrt{Ta}U_\phi + Pr Pm^{-1}Ha^2\widehat{D}H_R - ik\tilde{P} = 0 \tag{45}$$

$$(\widehat{D}^2 - \gamma - k^2)U_\phi - \sqrt{Ta}(1 + Ro)U_R + Pr Pm^{-1}Ha^2\widehat{D}H_\phi = 0 \tag{46}$$

$$(\widehat{D}^2 - \gamma - k^2)U_z + Pr Pm^{-1}Ha^2\widehat{D}H_z + Ra\Theta - \widehat{D}\tilde{P} = 0 \tag{47}$$

$$(\widehat{D}^2 - Pm\gamma - k^2)H_R + Pr^{-1} Pm\widehat{D}U_R = 0 \tag{48}$$

$$(\widehat{D}^2 - Pm\gamma - k^2)H_\phi + Pr^{-1} Pm\widehat{D}U_\phi + \sqrt{Ta}PmRoH_R = 0 \tag{49}$$

$$(\widehat{D}^2 - Pm\gamma - k^2)H_z + Pr^{-1} Pm\widehat{D}U_z = 0 \tag{50}$$

$$(\widehat{D}^2 - Pr\gamma - k^2)\Theta + U_z = 0, \tag{51}$$

$$\widehat{D}U_z + ikU_R = 0, \widehat{D}H_z + ikH_R = 0, \tag{52}$$

The system of equations (45)-(52) is written down in a dimensionless form, in which the dimensionless values retain the form of dimensional ones:

$$z \rightarrow h^{-1}z, (U_R, U_\phi, U_z) \rightarrow \chi h^{-1}(U_R, U_\phi, U_z), (H_R, H_\phi, H_z) \rightarrow B_0^{-1}(H_R, H_\phi, H_z),$$

$$\Theta \rightarrow \Theta(Ah)^{-1}, \tilde{P} \rightarrow \tilde{P} \left( \frac{h^2}{\rho_0 v \chi} \right), t \rightarrow t \left( \frac{v}{h^2} \right), \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{h^2}{v} \frac{\partial}{\partial t}.$$

In equations (45)-(52) the following dimensionless parameters are introduced  $Pr = \nu/\chi$  is the Prandtl number,  $Pm = \nu/\eta$  is the Prandtl magnetic number, the numbers:  $Ta = 4\Omega_0^2 h^4/\nu^2$  is of Taylor,  $Ha = B_0 h/\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}$  is of Hartmann,  $Ra = g\beta Ah^4/\nu\chi$  is of Rayleigh on the scale  $h$ . Then, instead of the Hartman number  $Ha$  we will use the Chandrasekhar number  $Q = Ha^2$ . Using the equation of the solenoidal character of fields (52), we exclude pressure  $\tilde{P}$  from equations (45) and (46):

$$\tilde{P} = Ra \cdot \frac{\widehat{D}\Theta}{\widehat{D}^2 - k^2} + \frac{ik\sqrt{Ta}}{\widehat{D}^2 - k^2} \cdot U_\phi \tag{53}$$



In order to reduce the number of variables, we introduce indications for  $z$ -component of the vortex -  $\xi = (\text{rot}U)_z = ikU_\phi$ , of the current -  $\zeta = (\text{rot}H)_z = ikH_\phi$  and for  $z$ -component of the velocity -  $W = U_z$ . With the new indications taken into account equations (45)-(52) will take the form:

$$(\hat{D}^2 - k^2)(\hat{D}^2 - k^2 - \gamma)W + \tilde{Q}(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}H_z - \sqrt{Ta}\hat{D}\xi = k^2 Ra\Theta \quad (54)$$

$$(\hat{D}^2 - k^2 - \gamma)\zeta + \sqrt{Ta}(1 + Ro)\hat{D}W + \tilde{Q}\hat{D}\xi = 0 \quad (55)$$

$$(\hat{D}^2 - Pm\gamma - k^2)H_z + \text{Pr}^{-1} Pm\hat{D}W = 0 \quad (56)$$

$$(\hat{D}^2 - Pm\gamma - k^2)\xi + \text{Pr}^{-1} Pm\hat{D}\zeta - \sqrt{Ta}PmRo\hat{D}H_z = 0 \quad (57)$$

$$(\hat{D}^2 - \text{Pr}\gamma - k^2)\Theta + W = 0, \quad (58)$$

where  $\tilde{Q} = \text{Pr} Pm^{-1}Q$ . We complete equations (54)-(58) with the following boundary conditions: for "free" (free-free boundaries) surfaces at  $z = 0, 1$ :

$$W = \Theta = \hat{D}H_z = 0, \hat{D}^2W = \hat{D}\zeta = \xi = 0 \quad (59)$$

and for "rigid" (rigid-rigid boundaries) surfaces at  $z = 0, 1$ :

$$W = \Theta = H_z = 0, \hat{D}W = \zeta = \hat{D}\xi = 0 \quad (60)$$

Equations (54)-(58) with boundary conditions of (59)-(60) describe the linear (for small perturbations) convection in the thin layer of the non-uniformly rotating magnetized fluid.

### STATIONARY CONVECTION FOR FREE BOUNDARIES

#### Chandrasekhar variation principle

Let us consider the stationary convection mode, i.e. when the system is in a neutral state  $\gamma = 0$ . In this case, the problem of the eigenvalues of equations (54)-(58) lies in finding the critical Rayleigh numbers  $Ra$  that satisfy the following equation:

$$\left[ (\hat{D}^2 - k^2)((\hat{D}^2 - k^2)^2 - Q\hat{D}^2)^2 + Ta(1 + Ro)(\hat{D}^2 - k^2)^2\hat{D}^2 - TaRoPmQ\hat{D}^4 \right] W = \quad (61)$$

$$= -k^2 Ra ((\hat{D}^2 - k^2)^2 - Q\hat{D}^2) W$$

with boundary conditions:  $W = \hat{D}^{(p)}W = 0$  ( $p = 2, 4, 6, 8, 10$ ) at  $z = 0, 1$ . According to these boundary conditions, the even derivatives of the function  $W$  at the surface boundaries  $z = 0$  and  $z = 1$  should become zero.

We formulate the problem of finding the eigenvalues (the Rayleigh number  $Ra$ ) of equation (61) using the Chandrasekhar variational principle. For this, from the system of equations (54)-(58), provided that  $\gamma = 0$ , we exclude the perturbations for the components of the vortex  $\xi$  and current  $\zeta$ . As a result we get:

$$\hat{L}(\hat{D}^2 - k^2)^2 W + \tilde{Q}\hat{L}(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}H_z - \sqrt{Ta}\hat{D}\hat{L}\xi = k^2 Ra\hat{L}\Theta \quad (62)$$

$$\hat{L}\zeta = -\sqrt{Ta}(1 + Ro)(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}W - \sqrt{Ta}Q\text{Pr}Ro\hat{D}^2H_z, \quad (63)$$

$$(\hat{D}^2 - k^2)H_z + \text{Pr}^{-1} Pm\hat{D}W = 0 \quad (64)$$

$$(\hat{D}^2 - k^2)\Theta + W = 0, \quad (65)$$

where the operator is  $\hat{L} = (\hat{D}^2 - k^2)^2 - Q\hat{D}^2$ .

We multiply the equation (62) from the left by  $W$  and integrate it by  $z$ :

$$\int_0^1 W\hat{L}(\hat{D}^2 - k^2)^2 W dz + \tilde{Q}\int_0^1 W\hat{L}(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}H_z dz + Ta(1 + Ro)\int_0^1 W(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}^2 W dz + \quad (66)$$

$$+TaQPrRo \int_0^1 W \widehat{D}^3 H_z dz = k^2 Ra \int_0^1 W \widehat{L} \Theta dz$$

With equations (64) and (65) taken into account, equation (66) takes the form:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 W \left( \widehat{L}^2 + Ta(1 + Ro)(\widehat{D}^2 - k^2)\widehat{D}^2 \right) W dz + \frac{Pr^2}{Pm} TaQRo \int_0^1 [(\widehat{D}^2 H_z)^2 - k^2 H_z \widehat{D}^2 H_z] dz = \\ & = -k^2 Ra \int_0^1 (\widehat{D}^2 - k^2) \Theta \widehat{L} \Theta dz \end{aligned} \tag{67}$$

In equation (67) we carry out partial integration for several times using the boundary conditions of (59). As a result, we obtain the expression for  $Ra$ , as the ratio of positive definite integrals:

$$Ra = \frac{1}{k^2 I_4} \left( I_1 + Ta(1 + Ro) \cdot I_2 + \frac{Pr^2}{Pm} TaQRo \cdot I_3 \right), \tag{68}$$

where indications for integrals  $I_{1,2,3,4} > 0$  are introduced:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 [(\widehat{D}^4 W)^2 + 6k^4 (\widehat{D}^2 W)^2 + 4k^2 (\widehat{D}^3 W)^2 + 4k^6 (\widehat{D} W)^2 + k^8 W^2] dz + \\ &+ 2Q \int_0^1 [(\widehat{D}^3 W)^2 + 2k^2 (\widehat{D}^2 W)^2 + k^4 (\widehat{D} W)^2] dz + Q^2 \int_0^1 (\widehat{D}^2 W)^2 dz, \\ I_2 &= \int_0^1 [(\widehat{D}^2 W)^2 + k^2 (\widehat{D} W)^2] dz, \quad I_3 = \int_0^1 [(\widehat{D}^2 H_z)^2 + k^2 (\widehat{D} H_z)^2] dz, \\ I_4 &= \int_0^1 [(\widehat{D}^3 \Theta)^2 + 3k^2 (\widehat{D}^2 \Theta)^2 + 3k^4 (\widehat{D} \Theta)^2 + k^6 \Theta^2 + Q \int_0^1 [(\widehat{D}^2 \Theta)^2 + k^2 (\widehat{D} \Theta)^2] dz. \end{aligned}$$

Now we will consider the variation of the Rayleigh number  $\delta Ra$  subject to the variations  $\delta W, \delta H_z, \delta \Theta$ . In the first order of the variations smallness we get:

$$\begin{aligned} \delta Ra &= \frac{1}{k^2 I_4} \left[ \delta I_1 + Ta(1 + Ro) \cdot \delta I_2 + \frac{Pr^2}{Pm} TaQRo \cdot \delta I_3 \right] - \\ & - \left( I_1 + Ta(1 + Ro) \cdot I_2 + \frac{Pr^2}{Pm} TaQRo \cdot I_3 \right) \frac{\delta I_4}{k^2 I_4^2} = \\ & = \frac{1}{k^2 I_4} \left[ \delta I_1 + Ta(1 + Ro) \cdot \delta I_2 + \frac{Pr^2}{Pm} TaQRo \cdot \delta I_3 - k^2 Ra \cdot \delta I_4 \right] \end{aligned} \tag{69}$$

Next, we find variations of the integrals  $\delta I_{1,2,3,4}$ .

$$\delta I_1 = 2 \int_0^1 \widehat{L}^2 W \cdot \delta W dz, \quad \delta I_2 = 2 \int_0^1 \widehat{D}^2 (\widehat{D}^2 - k^2) W \cdot \delta W dz,$$

$$\delta I_3 = 2 \int_0^1 \widehat{D}^2 (\widehat{D}^2 - k^2) H_z \cdot \delta H_z dz, \quad \delta I_4 = -2 \int_0^1 (\widehat{D}^2 - k^2) \widehat{L} \Theta \cdot \delta \Theta dz,$$

and then we substitute them into equation (69). Using equations (64)-(65) and boundary conditions of (59), we obtain the final expression for  $\delta Ra$  :

$$\delta Ra = \frac{2}{k^2 I_4} \times \quad (70)$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \left[ (\widehat{D}^2 - k^2) \widehat{L}^2 W + Ta(1 + Ro)(\widehat{D}^2 - k^2)^2 \widehat{D}^2 W - TaRoPmQ\widehat{D}^4 W + k^2 Ra \widehat{L} W \right] \cdot \frac{\delta W dz}{(\widehat{D}^2 - k^2)} \right\}$$

From the above it follows that  $\delta Ra = 0$  for any arbitrary variation  $\delta W \neq 0$ , if

$$(\widehat{D}^2 - k^2) \widehat{L}^2 W + Ta(1 + Ro)(\widehat{D}^2 - k^2)^2 \widehat{D}^2 W - TaRoPmQ\widehat{D}^4 W = -k^2 Ra \widehat{L} W,$$

i.e. equation (60) is satisfied. Then the function  $W$ , by which  $Ra$  is expressed (see equation (68)), is a solution for the problem of the characteristic values of equation (60).

#### Exact solutions to the problem of characteristic values

We choose a function  $W$ , that satisfies the free boundary conditions of (59), in the following form:

$$W = W_0 \sin n\pi z \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (71)$$

where  $W_0 = const$  is the disturbances amplitude of  $z$ -velocity component.

By restricting to the single-mode approximation ( $n=1$ ), while substituting (71) into (76), we obtain the expression for the critical value of the Rayleigh number  $Ra_c$  of stationary convection:

$$Ra_c = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2 (\pi^2 + k^2) Q}{k^2} + \frac{\pi^2 (\pi^2 + k^2)^2 Ta}{k^2 ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q Pm)}{k^2 ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q)} \quad (72)$$

In the new variables

$$x = \frac{k^2}{\pi^2}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\pi^2}, \quad T_1 = \frac{Ta}{\pi^4}, \quad R_1 = \frac{Ra_c}{\pi^4},$$

introduced by Chandrasekhar [1], equation (72) takes the form:

$$R_1 = \frac{(1+x)((1+x)^2 + Q_1)^2 + (1+x)^2(1+Ro)T_1 + RoPmQ_1T_1}{x((1+x)^2 + Q_1)} \quad (73)$$

The function  $R_1(x)$  takes extreme values for the corresponding  $x$ , which satisfy the following equation:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = Q_1 + T_1(1+Ro) \cdot \frac{(1+x)^4 - (x^2 - 1)Q_1}{((1+x)^2 + Q_1)^2} + \frac{RoPmQ_1T_1((1+x)(1+3x) + Q_1)}{((1+x)^2 + Q_1)^2} \quad (74)$$

Figure 4 shows diagrams of the dependence of the stationary Rayleigh number  $R_1$ , determined by equation (73), on the wave numbers  $x = k^2/\pi^2$  for the fixed parameters of the magnetic field  $Q_1$  and of the rotation  $T_1$ . Curves 1,2,3 in Fig. 4 correspond to the case of the uniform (or solid-state) rotation  $Ro = 0$ , and they completely agree with the results of Chandrasekhar [1].

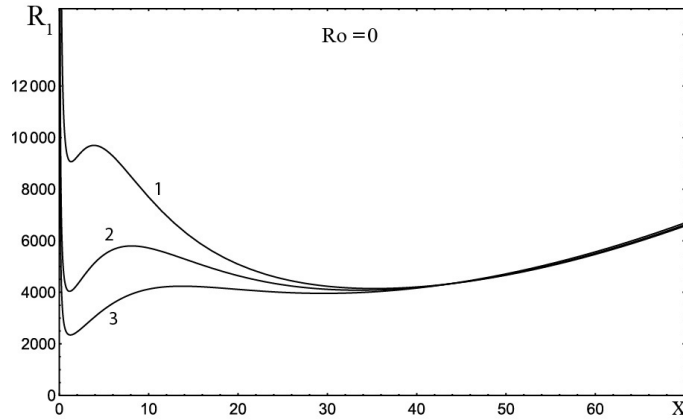


Fig. 4. Dependence of the Rayleigh number  $R_1$  on the wave numbers  $x = k^2/\pi^2$  for the Rossby numbers  $Ro = 0$  with constant parameters: curve 1 –  $Q_1 = 40$ ,  $T_1 = 10^5$ ; curve 2 –  $Q_1 = 100$ ,  $T_1 = 10^5$ ; curve 3 –  $Q_1 = 200$ ,  $T_1 = 10^5$ .

The diagrams in Figures 5 and 6 show the dependence of the Rayleigh number  $Ra_c$  on  $\pi/k$ , and are plotted for different Rossby numbers  $Ro$ . The diagram in Fig. 5 corresponds to the parameters  $Ta = 500$ ,  $Q = 100$ . Here we can see that with an increase in the positive profile of the Rossby number  $Ro$ , the minimum value of the critical Rayleigh number also increases, i.e. the threshold of the instability development rises. On the other hand, for the negative rotation profiles: of Keplerian ( $Ro = -3/4$ ) and of Rayleigh ( $Ro = -1$ ), we observe a decrease in the critical Rayleigh number, i.e. a lower threshold of the instability development, as compared to the case of the uniform ( $Ro = 0$ ) and non-uniform ( $Ro = 2$ ) rotation. The diagrams in Fig. 6a,b are plotted respectively for Taylor numbers  $Ta = 10^4$  and  $Ta = 10^5$ . From these diagrams it follows that with the rotation increase (Taylor number  $Ta$ ) with a negative Rossby profile ( $Ro < 0$ ), no extreme values of the Rayleigh number are observed.

Now let us find out how the inhomogeneous rotation affects the process of stationary convection by calculating the derivative  $dR_1/dRo$ :

$$f(x) = \frac{dR_1}{dRo} = \frac{T_1((1+x)^2 + Q_1 Pm)}{x((1+x)^2 + Q_1)}.$$

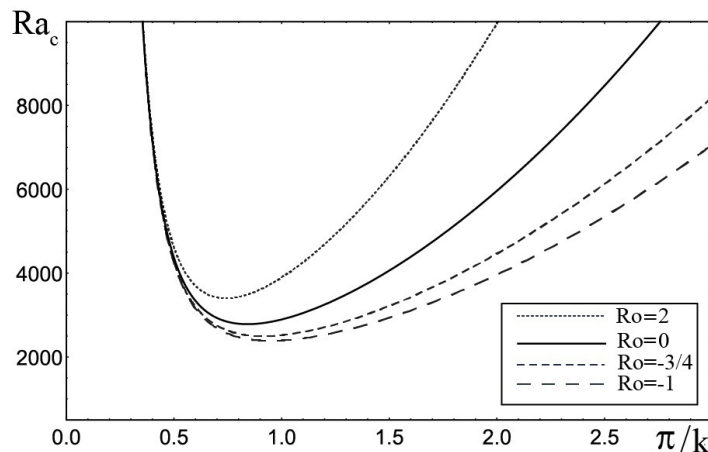


Fig. 5. Dependence of the Rayleigh number  $Ra_c$  on  $\pi/k$  for different Rossby numbers  $Ro$  with constant parameters:  $Q = 100$ ,  $Ta = 500$ . The Prandtl magnetic number is assumed to be equal to one:  $Pm = 1$ .

The function graph  $f(x)$  is shown in Fig. 7. It shows that with the increase in the Taylor number  $T_1$  (from 5000 to  $10^5$ ) at the fixed value of the magnetic field  $Q_1 = 100$ , the rate of variation of the value  $dR_1/dRo$  increases towards small  $x$  (long-wave disturbances  $\sim k^{-1}$ ), which is true for positive values of the Rossby number  $Ro > 0$ .

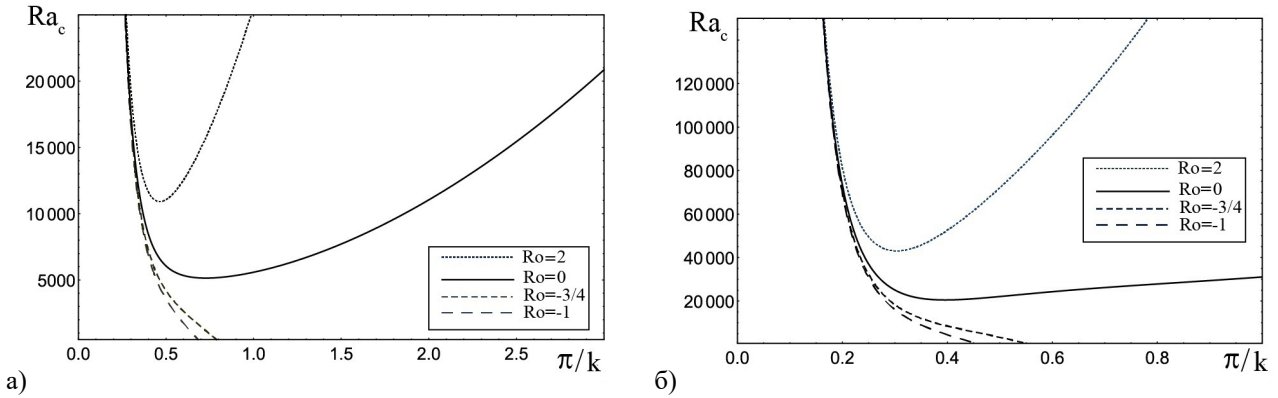


Fig. 6. Dependence of Rayleigh number  $Ra_c$  on  $\pi/k$  for different Rossby numbers  $Ro$  with constant parameters: a)  $Q = 100$ ,  $Ta = 10^4$ . b)  $Q = 100$ ,  $Ta = 10^5$ . The magnetic Prandtl number is assumed to be equal to one:  $Pm = 1$ .

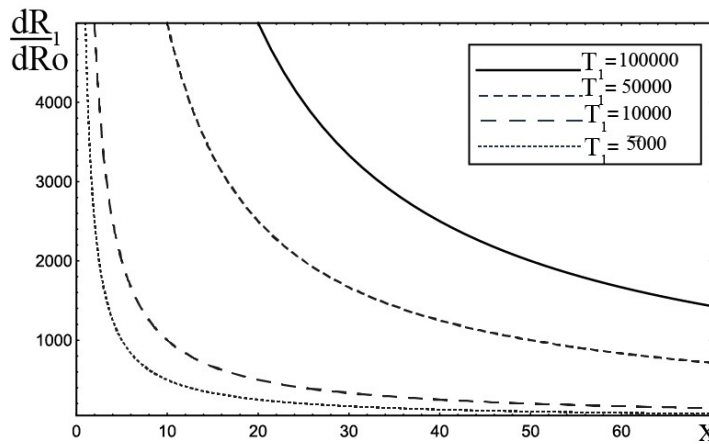


Fig. 7. The diagram of the  $dR_1/dRo$  variation rate dependence on the wave numbers  $x = k^2/\pi^2$  for different values of the Taylor number  $T_1$  with constant parameters  $Q_1 = 100$  and  $Pm = 1$ .

Fig. 8 shows graphs of variations in the Rayleigh number  $R_1$  from the value  $Ro$  in the interval  $[-1, 2]$ . These graphs show that the rotation with a negative angular velocity profile  $Ro < 0$  has a destabilizing effect on the development of stationary convection.

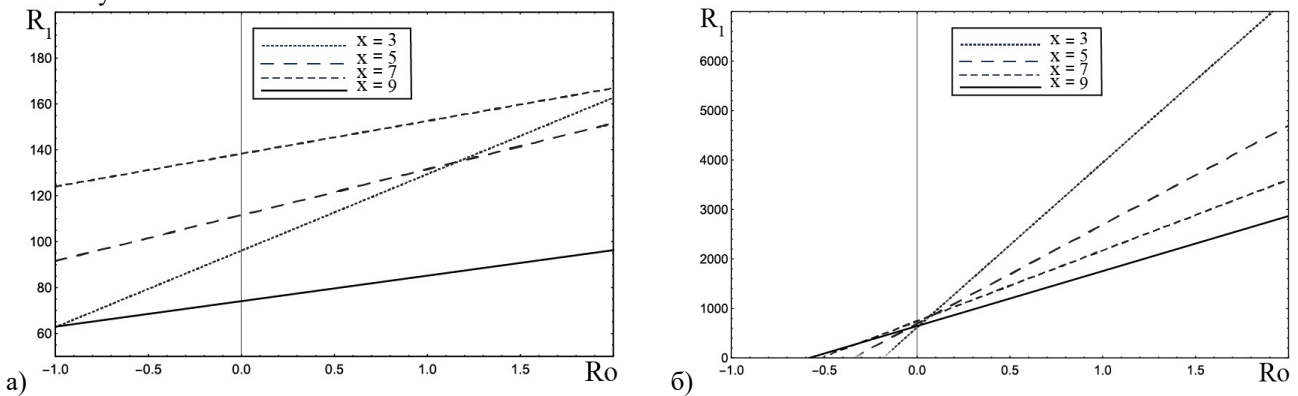


Fig. 8. Dependence of the Rayleigh number  $R_1$  on the Rossby number  $Ro$  for various wave numbers  $x = k/\pi$  with constant parameters: a)  $Q_1 = 50$ ,  $T_1 = 100$ ,  $Pm = 1$ ; b)  $Q_1 = 100$ ,  $T_1 = 1000$ ,  $Pm = 1$ .

Without considering the thermal processes, i.e. when there is no preheating  $Ra = 0$ , from equation (72) we obtain the threshold value of the hydrodynamic Rossby number  $Ro$  for the standard MRI (SMRI) taking into account dissipative processes (see, for example, [29]):

$$Ro_{cr} = -\frac{a^2(a^4 + \pi^2 Ha^2)^2 + \pi^2 a^4 Ta}{\pi^2 Ta(a^4 + \pi^2 Ha^2 Pm)}, \quad a^2 = k^2 + \pi^2$$

When turning to the dimensional variables  $\frac{\pi^2 Ha^2}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_v \omega_\eta}$ ,  $\frac{\pi^2 Ha^2 Pm}{a^4} \rightarrow \frac{\omega_A^2}{\omega_\eta^2}$ ,  $\frac{Ta}{a^4} \rightarrow \frac{4\Omega^2}{\omega_v^2}$ ,  $\frac{\pi^2}{a^2} \rightarrow \xi^2$

we find the expression for  $Ro_{cr}$  [29]:

$$Ro_{cr} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_v \omega_\eta)^2 + 4\xi^2 \Omega^2 \omega_\eta^2}{4\Omega^2 \xi^2 (\omega_A^2 + \omega_\eta^2)}.$$

Therefore, in the extreme case, when  $Ra = 0$ , a magneto-rotational instability arises in the inhomogeneously rotating layer of the electrically conducting fluid in the continuous magnetic field.

Then, using solution (71) from equations (56) and (58) we define the expression for the perturbations of the magnetic field  $H_z$  and temperature  $\Theta$  through amplitude  $W_0$ :

$$H_z = \frac{\pi Pm}{Pr(\pi^2 + k^2)} \cdot W_0 \cos \pi z, \quad \Theta = \frac{W_0}{\pi^2 + k^2} \cdot \sin \pi z \quad (75)$$

These solutions satisfy the free boundary conditions of (59). Then we find the expressions for the components of the vortex  $\xi$  and current  $\zeta$  from equations (55) and (57), which, when using (56), take the form:

$$(\hat{D}^2 - k^2)\zeta - \sqrt{Ta}(1 + Ro) Pr Pm^{-1}(\hat{D}^2 - k^2)H_z + \hat{Q}\hat{D}\xi = 0 \quad (76)$$

$$(\hat{D}^2 - k^2)\xi + Pr^{-1} Pm \hat{D}\zeta - \sqrt{Ta} Pm Ro \hat{D}H_z = 0 \quad (77)$$

Acting on equation (76) by operator  $\hat{D}^2 - k^2$ , and on equation (77) by operator  $\hat{Q}\hat{D}$ , and then subtracting one equation from the other, we'll find the equation for the current  $\zeta$ :

$$\left[ (\hat{D}^2 - k^2)^2 - \hat{Q}\hat{D}^2 \right] \zeta - \sqrt{Ta}(1 + Ro) Pr Pm^{-1}(\hat{D}^2 - k^2)^2 H_z + \sqrt{Ta} \hat{Q} Pr Ro \hat{D}^2 H_z = 0 \quad (78)$$

Substituting the solution for  $H_z$  from equation (75) into this equation we get:

$$\zeta = \frac{\pi \sqrt{Ta}(1 + Ro)(\pi^2 + k^2)^2 + \pi^3 \sqrt{Ta} \hat{Q} Pm Ro}{(\pi^2 + k^2)((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 \hat{Q})} \cdot W_0 \cos \pi z \quad (79)$$

Now we proceed to the definition of the equation for the vortex component  $\xi$  from equations (76)-(77). For this, we act on equation (76) by operator  $Pr^{-1} Pm$ , and on equation (77) by operator  $\hat{D}^2 - k^2$ , then subtracting one equation from the other, we find the equation for  $\xi$ :

$$\left[ (\hat{D}^2 - k^2)^2 - \hat{Q}\hat{D}^2 \right] \xi + \sqrt{Ta}(1 + Ro(1 - Pm))(\hat{D}^2 - k^2)\hat{D}H_z = 0 \quad (80)$$

Similarly, for this equation too, using the solution for  $H_z$  from (75), we obtain:

$$\xi = -\frac{\pi^2 \sqrt{Ta}(1 + Ro(1 - Pm))Pm}{((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 \hat{Q})Pr} \cdot W_0 \sin \pi z \quad (81)$$

The obtained expressions (79) and (81), respectively, for the components of the vortex and of the current, satisfy the boundary conditions of (59).

### Topological characteristics of stationary solutions

Note, that the stationary solutions obtained above for the hydrodynamic ( $W, \xi$ ) and magnetic ( $H_z, \zeta$ ) fields have a non-trivial topology. The average hydrodynamic helicity  $H_g = \int \bar{v} \text{rot} \bar{v} dV$  has the meaning of a measure of

“knotting” of the velocity field  $\vec{v}$  and, similarly, the current helicity  $H_c = \int \vec{B} \text{rot} \vec{B} dV$  is defined as a measure of “knotting” of the magnetic field force lines  $\vec{B}$  [45]. We calculated the helicity of  $H_g$  and  $H_c$  for the deterministic fields (of the velocity and magnetic field) of stationary roll convection with averaging over the whole layer volume ( $V$ ). As the calculations show, the current helicity  $H_c$  has an opposite sign relative to the hydrodynamic helicity  $H_g$ , and as a result, stabilizes the operation of the dynamo [46] due to generation of the hydrodynamic helicity by rotating the electrically conductive fluid.

The hydrodynamic helicity plays an important role in  $\alpha$ -effect onset, due to which large-scale magnetic and vortex fields are generated (see, for example, [6]). In the theory of turbulent dynamo [45] the mean helicity of the velocity field is the result of averaging over the ensemble of realizations of a random field in the given volume of fluid. Helicity naturally arises in the turbulence of a rotating body. The physical mechanism of the helicity origin is described in [47] by the example of the the Sun convective zone. In the northern hemisphere of the convective zone, the rising substance will expand and rotate under the action of Coriolis forces, resulting in a left-handed spiral movement. The sinking substance is compressed, and under the action of Coriolis forces is forced to rotate in the opposite direction, also making a left-handed spiral movement. It is obvious, that in the southern hemisphere the right-handed spiral movements will prevail. The uncompensated right-handed and left-handed movements lead to non-zero helicity. In other words, the properties of the turbulent velocity field are non-invariable with respect to the parity transformation, i.e. transition from the right coordinate system  $(x, y, z)$  to the left one  $(-x, -y, -z)$  (reflective non-invariance of the field  $\vec{v}$ ). The

$\alpha$ -coefficient estimate values for the conditions of the Sun convective zone range from a few cm/s to  $10^4$  cm/s, what means a greater degree of uncertainty when transferring the results of the calculations for the dynamo models to the real solar conditions [48–49]. However, as the astronomical observations show [50], the Sun convective zone has an evident orderliness, i.e. a developed cellular structure of different scale. In [49] a numerical simulation of cell-like flows, which are similar to the really observed ones, were carried out, what allowed calculating directly the velocity field average helicity. The helicity was averaged in [49] over the volume, and not over the ensemble of realizations, as long as the velocity field in such a formulation of the problem is deterministic. The analysis of the helicity of such quasi-ordered convective flows can reduce the spread in the estimate values, which are used in the theory of the medium fields dynamo.

Thus, the results of the calculation of the average hydrodynamic and magnetic helicity of stationary fields give all grounds for the development of the theory of convective dynamo in a non-uniformly rotating conducting medium with the external magnetic field.

**WEAKLY NONLINEAR STAGE OF STATIONARY CONVECTION**

To describe the nonlinear convective phenomena in the inhomogeneously rotating layer of the electrically conducting fluid, it is convenient to turn from the cylindrical coordinate system  $(R, \varphi, z)$  to the local Cartesian  $(X, Y, Z)$  one. If we consider a fixed region of the fluid layer with a radius  $R_0$  and angular velocity of rotation  $\Omega_0 = \Omega(R_0)$ , then the coordinates  $X = R - R_0$  correspond to the radial direction,  $Y = R_0(\varphi - \varphi_0)$  – to azimuthal, and  $Z = z$  - to vertical (see Fig. 9).

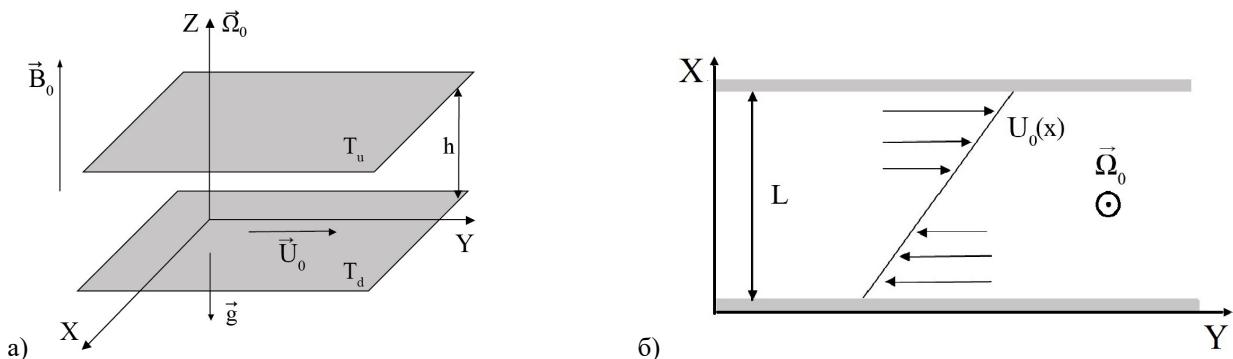


Fig. 9. a) Cartesian approximation of the problem for a non-uniformly rotating magnetic convection, inhomogeneous rotation in the local Cartesian coordinate system consisting of rotation with constant angular velocity  $\vec{\Omega}_0$  and shearing velocity  $U_0 \parallel OY$ ; b) Scheme of the shear flow in rotating flows, the flow being approximated in the local Cartesian coordinate system as a linear shift with velocity  $U_0(X)$ , with the value of the flow being limited by coordinates  $X \in [0, L]$  and  $Z \in [0, h]$ , and by coordinate  $Y$  being unlimited.

In this case, the fluid layer inhomogeneous rotation can be represented locally as the rotation with the constant angular velocity  $\vec{\Omega}_0$  and azimuthal shear [51], whose velocity profile is locally linear  $\vec{U}_0 = -q\Omega_0 X \vec{e}_y$ , where  $q \equiv -d \ln \Omega / d \ln R$  is the dimensionless shear parameter, determined from the profile of the angular velocity of rotation  $\Omega(R) = \Omega_0 (R/R_0)^{-q}$ . The shear parameter  $q$  is bound up with the hydrodynamic Rossby number  $Ro = \frac{R}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial R}$  by the relation  $q = -2Ro$ . Note, that the accretion disks with a shear parameter  $q = 3/2$  ( $Ro = -3/4$ ) correspond to the Keplerian disk,  $q = 2$  ( $Ro = -1$ ) corresponds to the disk with a constant angular momentum or the Rayleigh rotation profile. The case of  $q = 1$  ( $Ro = -1/2$ ) corresponds to the system with a flat rotation curve, and that of  $q = 0$  ( $Ro = 0$ ) - to the homogeneous (or solid- state) rotation with a constant angular velocity.

The equations for the perturbations of the velocity  $\vec{u} = (u, v, w)$  of the magnetic field  $\vec{b} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  and the temperature  $\theta$  in the local Cartesian coordinate system take the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} + (\vec{u}\nabla)\vec{U}_0 + 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left( (\vec{B}_0\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{b} \right) + g\beta\theta\vec{e} + \nu\nabla^2\vec{u} \\ \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \vec{b}}{\partial Y} - (\vec{B}_0\nabla)\vec{u} - (\vec{b}\nabla)\vec{U}_0 + (\vec{u}\nabla)\vec{b} - (\vec{b}\nabla)\vec{u} &= \eta\nabla^2\vec{b} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \theta}{\partial Y} + (\vec{u}\nabla)T_0 + (\vec{u}\nabla)\theta &= \chi\nabla^2\theta \\ \text{div}\vec{u} = 0, \quad \text{div}\vec{b} = 0 \end{aligned} \tag{82}$$

here the pressure  $\tilde{p}$  includes the perturbed magnetic pressure  $p_m = \frac{\vec{b}^2}{8\pi} + \frac{\vec{b}\vec{B}_0}{4\pi}$ :  $\tilde{p} = p + p_m$ .

Like in the previous sections, we will consider the dynamics of axisymmetric perturbations, when all the perturbed quantities in equations (82) will depend only on two variables  $(X, Z)$ . In this case it is convenient to represent the vector fields  $\vec{u}$  and  $\vec{b}$  by scalar stream functions  $\psi$  and  $\phi$ :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad \tilde{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial Z}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

For convenience, in equations (82) we turn to the dimensionless variables, which we mark with an asterisk.

$$(X, Z) = h(x^*, z^*), \quad t = \frac{h^2}{\nu} t^*, \quad \psi = \chi\psi^*, \quad \phi = hB_0\phi^*, \quad v = \frac{\chi}{h} v^*, \quad \tilde{v} = B_0\tilde{v}^*, \quad \theta = Ah\theta^*,$$

and performing some simple mathematical operations, we obtain a system of nonlinear equations for the inhomogeneously rotating magnetoconvection [36]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \psi \right) \nabla^2 \psi + \sqrt{Ta} \frac{\partial v}{\partial z} - \text{Pr} Pm^{-1} Q \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \text{Pr} Pm^{-1} Q \cdot J(\phi, \nabla^2 \phi) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) v - \sqrt{Ta} (1 + Ro) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Pr} Pm^{-1} Q \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} &= \text{Pr} Pm^{-1} Q \cdot J(\phi, \tilde{v}) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, v) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - Pm^{-1} \nabla^2 \right) \phi - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - Pm^{-1} \nabla^2 \right) \tilde{v} - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial v}{\partial z} + Ro \sqrt{Ta} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \text{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \right) \theta - \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \theta) \end{aligned} \tag{83}$$



In equations (83) the asterisk is omitted. In the absence of the thermal phenomena, the system of equations (83) was used to study the nonlinear saturation mechanism of the standard MRI [52]. The system of equations (83) is complemented by the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} \psi = \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ \psi = \nabla^2 \psi = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 1. \end{aligned} \quad (84)$$

Further, we apply the system of equations (83) and boundary conditions of (84) to study the weakly nonlinear convection mode.

### Equation of finite amplitude for the stationary convection

The weakly nonlinear theory of convective instability describes the evolution of perturbations of not too high, but finite amplitude. The small amplitude of convective cells is superimposed on the main flow. If this amplitude is of the  $O(\varepsilon^1)$  order, then the interaction of cells with one another leads to the second harmonic and to nonlinearity of the order  $O(\varepsilon^2)$ , and then to nonlinearity  $O(\varepsilon^3)$ , etc. Here the nonlinear terms in equations (83) are considered as a perturbed response for the linear convection problem. In this case the Rayleigh parameter  $Ra$ , which controls the convection is close to critical  $Ra_c$ , i.e. to steady state of convection. The influence of the unstable modes is small, and therefore our task is to obtain equations describing the interaction of these modes. The general scheme for formulation of the weakly nonlinear theory is as follows. Since the small parameter of our problem is the relative deviation of the Rayleigh number  $Ra$  from the critical value  $Ra_c$ :

$$\varepsilon^2 = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \ll 1,$$

then all the perturbed values  $V$  in the equations of the type  $\widehat{L}V = -N(V|V)$  are represented as a series in the perturbation theory:

$$V \rightarrow \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^3 V^{(3)} + \dots,$$

where  $N(V|V)$  are the nonlinear terms.

The equations for the perturbations in various orders of  $\varepsilon$  take the form:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \widehat{L}^{(0)} V^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon^2 : \widehat{L}^{(0)} V^{(2)} &= -N(V^{(1)} | V^{(1)}) \\ \varepsilon^3 : \widehat{L}^{(0)} V^{(3)} &= -\widehat{L}^{(2)} V^{(0)} - N(V^{(1)} | V^{(2)}) - N(V^{(2)} | V^{(1)}) \end{aligned}$$

The condition for solving this chain of nonlinear equations is known as Fredholm's alternative (see, for example, [53])

$$\langle V^\dagger, R.H. \rangle = 0 \quad (85)$$

Here  $V^\dagger$  is a non-trivial solution of the linear self-adjoint problem  $\widehat{L}^\dagger V^\dagger = 0$ , where  $\widehat{L}^\dagger$  is a self-adjoint operator, which is determined from the following relation:

$$\langle V^\dagger, \widehat{L}V \rangle \equiv \langle \widehat{L}^\dagger V^\dagger, V \rangle, \quad (86)$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the inner product, which here has the following definition:

$$\langle f, g \rangle = \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{2\pi/k_c} f \cdot g \, dx dz,$$

$R.H.$  are right sides of the perturbed equations with nonlinear terms. We apply these general principles of solving nonlinear equations to our problem. For simplicity we will take into account the nonlinear terms in (83) only in the heat balance equation. As will be shown below (see Appendix), this approximation is equivalent to the application of the Galerkin approximation of the minimal order (118) to equations (83). We represent all the variables in equations (83) as an asymptotic expansion:

$$\begin{aligned}
 Ra &= Ra_c + \varepsilon^2 Ra_2 + \varepsilon^4 Ra_4 + \dots \\
 \psi &= \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \dots \\
 v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots \\
 \phi &= \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots \\
 \tilde{v} &= \varepsilon \tilde{v}_1 + \varepsilon^2 \tilde{v}_2 + \varepsilon^3 \tilde{v}_3 + \dots \\
 \theta &= \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

We assume that the amplitudes of the perturbed quantities depend only on the slow time  $\tau = \varepsilon^2 t$ . Substituting the expansion of (87) into the system of equations (83), we solve it for different orders of  $\varepsilon$ . In the lowest order, we get the equation:

$$\widehat{L}M_1 = 0, \tag{88}$$

where  $M_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$ ,  $\widehat{L}$  is the matrix operator of the form:

$$\widehat{L} = \begin{bmatrix} -\nabla^4 & \sqrt{Ta} \frac{\partial}{\partial z} & -Pm^{-1} Pr Q \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & 0 & -Ra_c \frac{\partial}{\partial x} \\ -\sqrt{Ta}(1+Ro) \frac{\partial}{\partial z} & -\nabla^2 & 0 & -Pm^{-1} Pr Q \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -Pm^{-1} \nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & -Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial z} & Ro \sqrt{Ta} \frac{\partial}{\partial z} & -Pm^{-1} \nabla^2 & 0 \\ -Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -Pr^{-1} \nabla^2 \end{bmatrix}.$$

The solutions of the system of equations (88) with the boundary conditions of (84) have, respectively, the form:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= A(\tau) \sin k_c x \sin \pi z, \theta_1 = \frac{A(\tau) k_c}{a^2} \cos k_c x \sin \pi z, \phi_1 = \frac{A(\tau) \pi Pm}{a^2 Pr} \sin k_c x \cos \pi z, \\
 \tilde{v}_1 &= -\frac{A(\tau) \pi^2 \sqrt{Ta} (1+Ro(1-Pm)) Pm}{Pr(a^4 + \pi^2 Q)} \sin k_c x \sin \pi z, \\
 v_1 &= \frac{A(\tau) \pi \sqrt{Ta}}{a^2} \cdot \frac{(1+Ro)a^4 + \pi^2 Q Pm Ro}{a^4 + \pi^2 Q} \sin k_c x \cos \pi z, \quad a^2 = k_c^2 + \pi^2.
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

The amplitude  $A(\tau)$  is still unknown. The critical value of the Rayleigh number  $Ra_c$  for the stationary magnetoconvection in a non-uniformly rotating electrically conducting medium is found from the first equation of the system (88) and has the form of formula (72) obtained in the linear theory:

$$Ra_c = \frac{(\pi^2 + k_c^2)^3}{k_c^2} + \frac{\pi^2 (\pi^2 + k_c^2) Q}{k_c^2} + \frac{\pi^2 (\pi^2 + k_c^2)^2 Ta}{k_c^2 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)} + \frac{\pi^2 Ta Ro ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q Pm)}{k_c^2 ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 Q)}.$$

For the second order of  $\mathcal{E}$ , we have the following equation:

$$\widehat{L}M_2 = N_2, \tag{90}$$

$$\text{where } M_2 = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ \tilde{v}_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ N_{23} \\ N_{24} \\ N_{25} \end{bmatrix}; \quad N_{21} = N_{22} = N_{23} = N_{24} = 0,$$

$$N_{25} = -\text{Pr}^{-1} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right].$$

Using solutions of (89) and boundary conditions of (84), we find solutions to equations (90):

$$\psi_2 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{A^2(\tau)k_c^2}{8\pi a^2} \sin(2\pi z), \quad \phi_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \tilde{v}_2 = 0. \tag{91}$$

To analyze the intensity of the heat transfer, a horizontally-averaged heat flux is introduced at the boundary of the layer of electrically conducting fluid (Nusselt number):

$$Nu(\tau) = 1 + \frac{\left[ \frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi k_c} \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}{\left[ \frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi k_c} \left( \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}} = 1 + \frac{k_c^2}{4a^2} A^2(\tau) \tag{92}$$

The heat flow intensity (of Nusselt number) will be analyzed after the expression for the amplitude  $A(\tau)$  is obtained.

For the third order of  $\mathcal{E}$  we find:

$$\widehat{L}M_3 = N_3, \tag{93}$$

$$\text{where } M_3 = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ \tilde{v}_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} N_{31} \\ N_{32} \\ N_{33} \\ N_{34} \\ N_{35} \end{bmatrix}; \quad N_{31} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \psi_1 + Ra_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \left( a^2 \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - Ra_2 \frac{k_c^2 A(\tau)}{a^2} \right) \sin k_c x \sin \pi z,$$

$$N_{32} = -\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = -\frac{\pi \sqrt{Ta}}{a^2} \cdot \frac{(1 + Ro)a^4 + \pi^2 Q P m Ro}{a^4 + \pi^2 Q} \cdot \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \sin k_c x \cos \pi z,$$

$$N_{33} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} = -\frac{\pi P m}{a^2 \text{Pr}} \cdot \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \sin k_c x \cos \pi z$$

$$N_{34} = -\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tau} = \frac{\pi^2 \sqrt{Ta} (1 + Ro(1 - Pm)) P m}{\text{Pr}(a^4 + \pi^2 Q)} \cdot \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \sin k_c x \sin \pi z,$$

$$N_{35} = -\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - \text{Pr}^{-1} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] =$$

$$= -\frac{k_c}{a^2} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \cos k_c x \sin \pi z + \frac{\text{Pr}^{-1} k_c^3}{4a^2} A^3(\tau) \cos k_c x \sin \pi z \cos 2\pi z.$$

The solvability condition (an alternative of Fredholm) for the equations of the third order  $O(\varepsilon^3)$  is found from equation (85):

$$\int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{2\pi/k_c} \left[ \widehat{P}\psi_1^\dagger \cdot R_{31} + Ra_c \widehat{P}\theta_1^\dagger \cdot R_{32} + QPr^2 Pm^{-1} \widehat{P}\nabla^2 \phi_1^\dagger \cdot R_{33} + v_1^\dagger \cdot R_{34} \right] dx dz = 0, \quad (94)$$

where indications are introduced

$$\widehat{P} = (1 + Ro)\nabla^4 - QPmRo \frac{\partial^2}{\partial z^2}, R_{31} = N_{31}, R_{32} = N_{35}, R_{33} = N_{33},$$

$$R_{34} = -\nabla^4 N_{32} + QPr \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 N_{34} + \sqrt{Ta} QPmPrRo \frac{\partial^2 N_{33}}{\partial z^2}.$$

The expressions for  $\psi_1^\dagger, \theta_1^\dagger, \phi_1^\dagger, v_1^\dagger$  are determined from the solution of the linear self-adjoint problem  $\widehat{L}^\dagger M_1^\dagger = 0$ :

$$\psi_1^\dagger = A(\tau) \sin k_c x \sin \pi z, \quad \theta_1^\dagger = -\frac{A(\tau)k_c}{a^2} \cos k_c x \sin \pi z, \quad \phi_1^\dagger = -\frac{A(\tau)\pi Pm}{a^2 Pr} \sin k_c x \cos \pi z,$$

$$v_1^\dagger = -\frac{A(\tau)\pi\sqrt{Ta}}{a^2} \cdot \frac{(1 + Ro)a^4 + \pi^2 QPmRo}{a^4 + \pi^2 Q} \sin k_c x \cos \pi z.$$

The matrix  $M_1^\dagger$  has the form  $M_1^\dagger = (\psi_1^\dagger, \theta_1^\dagger, \phi_1^\dagger, v_1^\dagger)^{Tr}$  and  $\widehat{L}^\dagger$  is a self-adjoint matrix operator:

$$\widehat{L}^\dagger = \begin{bmatrix} -\nabla^4 & Ra_c \widehat{P} \frac{\partial}{\partial x} & Pm^{-1} Pr Q \widehat{P} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & -\sqrt{Ta} \widehat{P} \frac{\partial}{\partial z} \\ Ra_c \widehat{P} \frac{\partial}{\partial x} & -Ra_c \widehat{P} \nabla^2 & 0 & 0 \\ Pm^{-1} Pr Q \widehat{P} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & 0 & -QPr^2 Pm^{-2} \widehat{P} \nabla^4 & 0 \\ -\sqrt{Ta} \widehat{P} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \left( \nabla^4 - Q \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \nabla^2 \end{bmatrix} \quad (95)$$

When performing integration in (94), we obtain a nonlinear equation for the amplitude  $A(\tau)$ , which refers to the Ginzburg-Landau equation or the Bernoulli differential equation with constant coefficients:

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2 A + A_3 A^3 = 0 \quad (96)$$

Here the constant coefficients  $A_{1,2,3}$  have the form:

$$A_1 = \frac{a^2}{Pr} + \frac{k_c^2 Ra_c}{a^4} - \frac{\pi^2 QPm}{a^2 Pr} - \frac{\pi^2 Ta \left( (1 + Ro)a^4 + \pi^2 QPm(RoPm - 1) \right)}{(a^4 + \pi^2 Q)^2 Pr} - \frac{\pi^4 TaRoQPm^2}{a^4 (a^4 + \pi^2 Q) Pr}, \quad (97)$$

$$A_2 = \frac{k_c^2 Ra_c}{a^2 Pr}, \quad A_3 = \frac{k_c^4 Ra_c}{8a^4 Pr}.$$

The equation of the form (96) was obtained in many papers, where the weakly nonlinear mode of stationary convection was studied (see, for example, [14–20]). In contrast to these works, in our result (96) the non-uniform

rotation ( $Ro \neq 0$ ) of the electrically conducting fluid was taken into account. The analytical solution of equation (96) with a known initial condition  $A_0 = A(0)$  can be obtained using the Lagrange method (variations of the constant):

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{A_3}{A_2} A_0^2 + \left(1 - A_0^2 \frac{A_3}{A_2}\right) \exp\left(-\frac{2\tau A_2}{A_1}\right)}} \tag{98}$$

Assuming the initial amplitude to be equal to  $A_0 = 0.7$  and  $Ra_2 \approx Ra_c$ , by using the solution of (98), we can determine the variation in the heat transfer (of Nusselt number  $Nu$ ) with time  $\tau$ . The diagram of dependency  $Nu(\tau)$  is presented in Fig. 10. The diagram clearly shows the establishment of the final value  $Nu(\tau)$  due to the relationship between the number  $Nu(\tau)$  and the amplitude  $A(\tau)$  (see equation (92)). The excess of number  $Nu$  over the unit is caused by the convection occurrence. Fig. 10 shows that in the course of time the heat transfer intensity proceeds most smoothly for the case of the non-uniform rotation with a negative profile ( $Ro < 0$ ). Fig. 11 presents the diagram of the Nusselt number  $Nu$  versus the Rossby number  $Ro$ . Here we see (curves 1-4) that the heat transfer intensity increases in the direction of positive Rossby numbers ( $Ro > 0$ ).

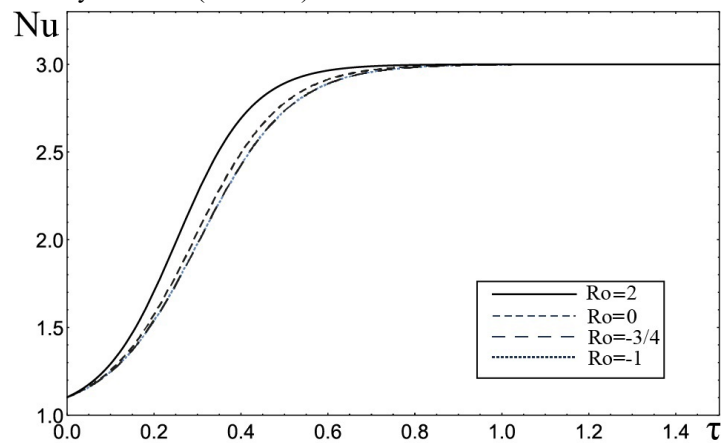


Fig. 10. The dependence of the Nusselt number  $Nu$  on time  $\tau$  for different values of Rossby numbers  $Ro$  with constant parameters:  $Q_1 = 80$ ,  $T_1 = 10^5$ ,  $R_1 = 9500$ ,  $Pm = 1$ ,  $Pr = 10$ .

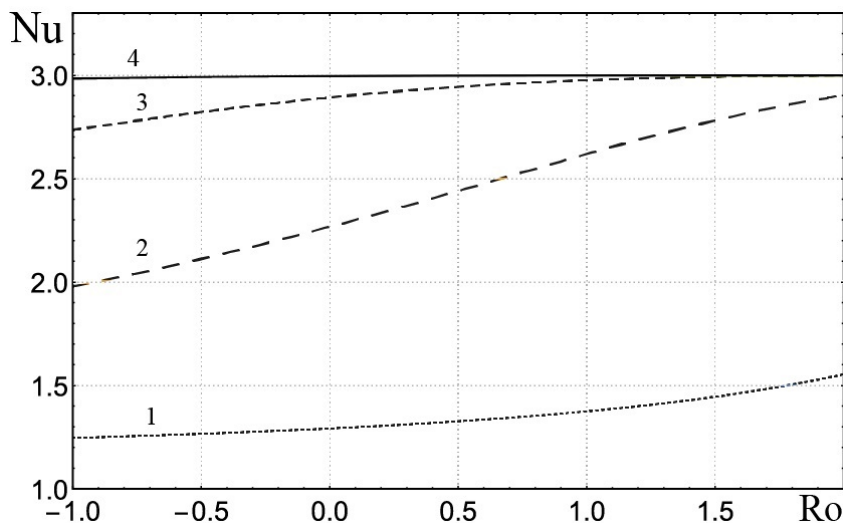


Fig. 11. Dependence of the Nusselt number  $Nu$  on the Rossby numbers  $Ro$  with constant parameters:  $Q_1 = 80$ ,  $T_1 = 10^5$ ,  $R_1 = 9500$ ,  $Pm = 1$ ,  $Pr = 10$ ; 1,2,3,4 curves correspond to times  $\tau = 0.1, 0.3, 0.5, 1$ .

### CONCLUSION

Applying the Lyenard-Shepard algorithm, we obtained the stability criteria for the inhomogeneously rotating plasma in the axially uniform magnetic field with a vertical temperature gradient under the condition of weak stratification. This problem was also investigated for thin rotating layers of the magnetized fluid with different temperatures on the layer surfaces (the Rayleigh-Benard convection).

A linear and weakly nonlinear theory of stationary convection in the non-uniformly rotating electrically conducting fluid in the axial magnetic field was developed. In the linear approximation, or in the first order in the small parameter of supercriticality of the Rayleigh number  $\varepsilon = \sqrt{(Ra - Ra_c)/Ra_c}$ , we obtained an expression for the critical Rayleigh number  $Ra_c$ , which in the limit of the uniform rotation  $Ro = 0$  coincides with the known results of Chandrasekhar [1]. In the absence of the temperature gradient ( $Ra = 0$ ) we obtaine the known criterion for MRI occurrence [29]. The case of the negative profile of the inhomogeneous rotation  $Ro < 0$  leads to some decrease in the instability threshold, and thus has a destabilizing effect on the instability development. And on the contrary, the positive rotation profiles  $Ro > 0$  increase the critical value of the Rayleigh number, thus making a stabilizing effect on the convection development. In the third order of  $\varepsilon$ , we obtained the nonlinear Ginzburg-Landau equation, describing the evolution of the perturbation amplitude  $A(\tau)$ . The analysis of this equation solution has shown, that the flow intensity increases with the medium rotation at the positive Rossby numbers  $Ro > 0$ . In addition, it is shown that the weakly nonlinear convection, based on the equations of the six-mode (6D) Lorentz model from [36], is transformed into the identical Ginzburg-Landau equation.

In conclusion, we note, that the helicity properties of the stationary fields (vortex and magnetic) create preconditions for the development of the theory of convective dynamo in the rotating conducting medium with the external magnetic field and shear flow.

### APPENDIX

#### DERIVATION OF GINZBURG-LANDAU EQUATION FROM 6D-LAURENTZ EQUATIONS

In [36] the nonlinear system of equations (83) was solved by the Galerkin method utilizing the minimal order expansion in  $x$  and  $z$  - directions for the values  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $v$ ,  $\tilde{v}$  and  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= A(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ v &= E(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \phi(x, z, t) &= B(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \tilde{v} &= F(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ \theta(x, y, t) &= C(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + D(t) \sin(2\pi z),\end{aligned}\tag{99}$$

where  $k = 2\pi h/L$  is the dimensionless wave number,  $L$  is the typical layer length in the horizontal direction, and  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  are the amplitudes of the perturbations. As a result of expansion of (99) substitution into equations (83), with the properties of the functions orthogonality taken into account, we obtain the Lorentz equations for the six-dimensional (6D) phase space [36]:

$$\begin{cases} \dot{X} = -X + RY - TV - HU \\ \dot{V} = -V + HW + \sqrt{Ta}(1 + Ro)X \\ \dot{U} = -Pm^{-1}U + Pr^{-1}X \\ \dot{W} = -Pm^{-1}W - Pr^{-1}V + Ro\sqrt{Ta}U \\ \dot{Y} = Pr^{-1}(-Y + X - XZ) \\ \dot{Z} = Pr^{-1}(-\gamma Z + XY) \end{cases}\tag{100}$$

where a dot above denotes the time differentiation  $\tilde{t} = a^2 t$ . For convenience, the following indications are introduced into (100):

$$R = \frac{k^2 Ra}{a^6}, \quad T = \frac{\pi^2 \sqrt{Ta}}{a^6}, \quad H = \frac{\pi^2 QPr}{a^4 Pm}, \quad \gamma = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

and amplitudes  $A, B, C, D, E, F$  were rescaled in the form:

$$X(\tilde{t}) = \frac{k\pi}{a^2 \sqrt{2}} A(\tilde{t}), V(\tilde{t}) = \frac{kE(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, U(\tilde{t}) = \frac{kB(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, W(\tilde{t}) = \frac{a^2 k}{\pi \sqrt{2}} F(\tilde{t}),$$

$$Y(\tilde{t}) = \frac{\pi C(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, Z(\tilde{t}) = -\pi D(\tilde{t}).$$

Following the method of [54], we represent all the perturbed values in equations (100) as an expansion into a series in the small supercriticality parameter of  $\mathcal{E}$  :

$$\mathbf{X} = \mathcal{E} X_1 + \mathcal{E}^2 X_2 + \mathcal{E}^3 X_3 + \dots, \quad \mathbf{X} = [X, V, U, W, Y, Z]^T \tag{101}$$

$$R = R_0 + \mathcal{E}^2 R_2 + \dots$$

The amplitudes of the perturbed quantities depend only on the slow time  $\tilde{t} = \mathcal{E}^2 t$ . For the first order of  $\mathcal{E}$ , after substituting expansion (101) into (100), we obtain a linear system of equations:

$$L X_1 = 0, \mathbf{X}_1 = [X_1, V_1, U_1, W_1, Y_1, Z_1]^T, \tag{102}$$

where  $L$  matrix has the form:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & -T & -H & 0 & R_0 & 0 \\ \sqrt{Ta}(1+Ro) & -1 & 0 & H & 0 & 0 \\ Pr^{-1} & 0 & -Pm^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Pr^{-1} & Ro\sqrt{Ta} & -Pm^{-1} & 0 & 0 \\ -Pr^{-1} & 0 & 0 & 0 & -Pr^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma Pr^{-1} \end{bmatrix}.$$

The solutions of equations (102) have, respectively the form:

$$\mathbf{X}_1 = \left[ X_1, \frac{\sqrt{Ta}((1+Ro)Pr + HRoPm^2)}{Pr + HPm} X_1, \frac{Pm}{Pr} X_1, -\frac{\sqrt{Ta}Pm(1+Ro(1-Pm))}{Pr + HPm} X_1, X_1, 0 \right]^T \tag{103}$$

For the second order of  $\mathcal{E}$ , we have the following equation:

$$L X_2 = [\mathfrak{R}_{21}, \mathfrak{R}_{22}, \mathfrak{R}_{23}, \mathfrak{R}_{24}, \mathfrak{R}_{25}, \mathfrak{R}_{26}]^T, \mathbf{X}_2 = [X_2, V_2, U_2, W_2, Y_2, Z_2]^T, \tag{104}$$

where the nonlinear terms have, respectively, the form:

$$\mathfrak{R}_{21} = 0, \mathfrak{R}_{22} = 0, \mathfrak{R}_{23} = 0, \mathfrak{R}_{24} = 0, \mathfrak{R}_{25} = -Pr^{-1} X_1 Z_1, \mathfrak{R}_{26} = Pr^{-1} X_1 Y_1.$$

The solutions of equations (104) have the form:

$$\mathbf{X}_2 = \left[ X_2, \frac{\sqrt{Ta}((1+Ro)Pr + HRoPm^2)}{Pr + HPm} X_2, \frac{Pm}{Pr} X_2, -\frac{\sqrt{Ta}Pm(1+Ro(1-Pm))}{Pr + HPm} X_2, X_2, \frac{1}{\gamma} X_1^2 \right]^T \tag{105}$$

Next we turn to the equations of the third order of  $\mathcal{E}$  :

$$L X_3 = [\mathfrak{R}_{31}, \mathfrak{R}_{32}, \mathfrak{R}_{33}, \mathfrak{R}_{34}, \mathfrak{R}_{35}, \mathfrak{R}_{36}]^T, \mathbf{X}_3 = [X_3, V_3, U_3, W_3, Y_3, Z_3]^T, \tag{106}$$

where the nonlinear terms have, respectively, the form:

$$\mathfrak{R}_{31} = -\frac{\partial X_1}{\partial \tilde{\tau}} + R_2 Y_1, \mathfrak{R}_{32} = -\frac{\partial V_1}{\partial \tilde{\tau}}, \mathfrak{R}_{33} = -\frac{\partial U_1}{\partial \tilde{\tau}}, \mathfrak{R}_{34} = -\frac{\partial W_1}{\partial \tilde{\tau}},$$

$$\mathfrak{R}_{35} = -\text{Pr}^{-1}(X_1 Z_2 + X_2 Z_1), \mathfrak{R}_{36} = -\frac{\partial Z_1}{\partial \tilde{\tau}} + \text{Pr}^{-1}(X_1 Y_2 + X_2 Y_1).$$

The condition of solvability (Fredholm alternative) of the nonlinear equations (106) in the third order of  $\mathcal{E}$ , according to the definition in (91), has the following form:

$$\sum_{j=1}^5 \Lambda_{3j} X_1^\dagger = 0, \tag{107}$$

where

$$\Lambda_{31} = \Pi \text{Pr}^{-1} \left( \frac{\partial X_1}{\partial \tau} - R_2 Y_1 \right), \Pi = \sqrt{Ta} \left( 1 + Ro + HRo \frac{Pm^2}{Pr} \right),$$

$$\Lambda_{32} = \Pi R_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \tilde{\tau}} + \Pi R_0 \text{Pr}^{-1}(X_1 Z_2 + X_2 Z_1), \Lambda_{33} = -\frac{\partial Z_1}{\partial \tilde{\tau}} + \text{Pr}^{-1}(X_1 Y_2 + X_2 Y_1),$$

$$\Lambda_{34} = -H\Pi \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{\tau}}, \Lambda_{35} = -T \text{Pr}^{-1} \frac{\partial V_1}{\partial \tilde{\tau}} - THPm \text{Pr}^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial \tilde{\tau}} - THRoPm^2 \sqrt{Ta} \text{Pr}^{-1} \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{\tau}}.$$

The elements of the matrix  $X_1^\dagger = [X_1^\dagger, Y_1^\dagger, Z_1^\dagger, U_1^\dagger, V_1^\dagger]^T$  are the solutions of the linear self-adjoint problem  $L^\dagger X_1^\dagger = 0$ , where the self-adjoint matrix  $L^\dagger$  is determined as:

$$L^\dagger = \begin{bmatrix} \Pi \text{Pr}^{-1} & -R_0 \Pi \text{Pr}^{-1} & 0 & H\Pi \text{Pr}^{-1} & T\Pi \text{Pr}^{-1} \\ -R_0 \Pi \text{Pr}^{-1} & R_0 \Pi \text{Pr}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \text{Pr}^{-1} & 0 & 0 \\ H\Pi \text{Pr}^{-1} & 0 & 0 & -Pm^{-1} \Pi H & 0 \\ T\Pi \text{Pr}^{-1} & 0 & 0 & 0 & -(1 + HPm \text{Pr}^{-1}) T \text{Pr}^{-1} \end{bmatrix}.$$




From equation (107) we get a non-linear equation for amplitude  $A(\tau)$ , here the equation completely coincides with the Ginzburg-Landau equation (96):

$$A_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} - A_2 A + A_3 A^3 = 0 \tag{108}$$

Here the type of coefficients  $A_{1,2,3}$  completely coincides with expressions (97). When deriving equation (108), we utilised the relationship of the rescaled derivative over the slow time:  $\tilde{\tau} : \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau}$ .

Thus, applying the asymptotic expansion of the perturbation theory to the (6D) Lorentz equations (100), we obtained the Ginzburg-Landau equation, which is identical to equation (96) obtained in the weakly non-linear theory for the finite amplitude.

**ORCID IDs**

Michael Kopp  <https://orcid.org/0000-0001-7457-3272>, Anatoly Tur  <https://orcid.org/0000-0002-3889-8130>, Volodymyr Yanovsky  <https://orcid.org/0000-0003-0461-749X>

**REFERENCES**

[1]. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability* (Oxford Uni. Press, London, 1961), p. 652.  
 [2]. G.Z. Gershuni and E.M. Zhukhovitskii, *Convective Stability of Incompressible Fluids* (Nauka, Moscow, 1972), p. 392 (in Russian)  
 [3]. A.V. Getling, *Rayleigh-Benard Convection: Structures and Dynamics* (URSS, Moscow, 1999), p. 235. (in Russian)  
 [4]. Chris A. Jones, *Dynamo theory* (University of Leeds, UK, 2007).  
 [5]. P.H. Roberts and G.A. Glatzmaier, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **94**(1), 47-84 (2001).  
 [6]. A. Tur and V. Yanovsky, *Coherent Vortex Structures in Fluids and Plasmas* (Springer, New York, 2017). p. 253.  
 [7]. I.A. Eltayeb, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **326**, 229-254 (1972).



- [8]. I.A. Eltayeb, *J. Fluid Mech.* **71**(1), 161–179 (1975), doi:10.1017/S0022112075002480.
- [9]. R. Avila and A. Cabello, *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, 1-15 (2013), doi:10.1155/2013/236901.
- [10]. W.V.R. Malkus and G. Veronis, *J. Fluid Mech.* **4**(3), 225-260 (1958), doi:10.1017/S0022112058000410.
- [11]. J.K. Bhattacharjee, *J. Phy. A: Math. Gen.* **22**(24), L1135-L1189 (1989), doi:10.1088/0305-4470/22/24/001.
- [12]. J.K. Bhattacharjee, *Phy. Rev. A.* **41**, 5491-5494 (1990), doi:10.1103/PhysRevA.41.5491.
- [13]. B.S., Bhadauria and P. Kiran, *Ain Shams Eng. J.* **5**(4), 1287-1297 (2015), doi:10.1016/j.asej.2014.05.005.
- [14]. R. Ramya, E.J. Shelin and G.K. Sangeetha, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, **54**(6), 477-484 (2018), doi:10.14445/22315373/IJMTT-V54P558
- [15]. P. Kiran, *Ain Shams Eng. J.* **7**(2), 639-651 (2016), doi:10.1016/j.asej.2015.06.005
- [16]. P.G. Siddheshwar, B.S. Bhadauria and A. Srivastava, *Transp. Porous Media*, **91**(2), 585- 604 (2012), doi:10.1007/s11242-011-9861-3
- [17]. B.S. Bhadauria, P.G. Siddheshwar, J. Kumar and O.P. Suthar, *Trans. Porous Med.* **73**(3), 633-647 (2012), doi:10.1007/s11242-011-9925-4
- [18]. P.G. Siddheshwar, B.S. Bhadauria, Pankaj Mishra and A.K. Srivastava, *Int. J. Non Linear Mech.* **47**, 418-425 (2012), doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2011.06.006.
- [19]. B.S. Bhadauria and P. Kiran, *J. Appl. Fluid Mech.* **8**(4), 735-746 (2015), doi:10.18869/acadpub.jafm.73.238.22740.
- [20]. B.S. Bhadauria and P. Kiran, *Transp. Porous Media*. **100**, 279-295 (2013), doi:10.1007/s11242-013-0216-0.
- [21]. B.S. Bhadauria, P. Kiran, *Phys. Scr.* **89**(9), 095209 (2014), doi:10.1088/0031-8949/89/9/095209.
- [22]. S. Aniss, M. Belhaq and M. Souhar, *J. Heat Transfer*, **123**(3), 428-433 (2001), doi:10.1115/1.1370501.
- [23]. S. Chandrasekhar, On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. // *Proc. Natl Acad. Sci. USA*, **42**(5), 273-276 (1956), doi:10.1073/pnas.42.5.273
- [24]. E.P. Velikhov, Stability of an ideally conducting fluid flowing between cylinders rotating in a magnetic field, *JETP*, **36**, 1398-1404 (1959). (in Russian)
- [25]. S.A. Balbus and J.F. Hawley, *Astrophys. J.* **376**, 214-222 (1991), doi:10.1086/170270
- [26]. C. Nipoti and L. Posti, e-print arXiv:1206.3890v2 [astro-ph.GA] (2012).
- [27]. V.P. Lakhin and V.I. Ilgisonis, On the Influence of Dissipative Effects on Instabilities of Differentially-Rotating Plasmas, *JETP*. **137**(4), 783-788 (2010). (in Russian)
- [28]. O.N. Kirillov and F. Stefani, Proceedings of the International Astronomical Union. **8**, 233-234 (2012), doi: 10.1017/S1743921312019771.
- [29]. O.N. Kirillov, F. Stefani and Y. Fukumoto, *J. Fluid Mech.* **760**, 591- 633 (2014), doi:10.1017/jfm.2014.614
- [30]. G. Rüdiger, R. Hollerbach and L.L. Kitchatinov, *Magnetic Processes in Astrophysics: Theory, Simulations, Experiment.-* (Wiley-VCH, 2013). p.356, doi:10.1002/9783527648924.
- [31]. A.M. Soward, *Phys. Earth Planet Int.* **20**(2-4), 134-151 (1979), doi:10.1016/0031-9201(79)90036-0.
- [32]. S. Childress and A.M. Soward, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 837-839 (1972), doi:10.1103/PhysRevLett.29.837.
- [33]. F.H. Busse, *Phys. Earth Planet. Int.* **12.**, 350-358 (1976), doi:10.1016/0031-9201(76)90030-3.
- [34]. F. Busse and F. Finocchi, *Physics of The Earth and Planetary Interiors.* **80**(1-2), 13-23 (1993), doi:10.1016/0031-9201(93)90069-L.
- [35]. E. Kurt, F.H. Busse and W. Pesch, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **18**, 251-263 (2004), doi:10.1007/s00162-004-0132-6.
- [36]. M.I. Kopp, A.V. Tur and V.V. Yanovsky, *Problems of Atomic Science and Technology*, **4**(116), 230-234 (2018), arXiv: 1805.11894v1[astro-ph.EP](2018).
- [37]. V.P. Maslov and M.V. Fedoriuk, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики [Quasi-Classical Approximation for Quantum Mechanics Equations]*, (Nauka, Moscow, 1976), p. 296. (in Russian)
- [38]. A.B. Mikhailovskii, *Теория плазменных неустойчивостей. Т.2. Неустойчивости неоднородной плазмы [Theory of Plasma Instabilities V.2, Inhomogeneous plasma instabilities]*, (Atomizdat, Moscow, 1971). p. 312. (in Russian)
- [39]. D.A. Shalybkov, *Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта [Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow]*, *Usp. Fiz. Nauk*, **179**(9), 971-993 (2009), doi:10.3367/UFNe.0179.200909d.0971. (in Russian)
- [40]. R. Narayan, E. Quataert, I.V. Igumenshchev and M.A. Abramowicz, *Astrophys. J.* **577**, 295-301 (2002).
- [41]. H. Ji, J. Goodman and A. Kageyama, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **325**, L1-L5 (2001), doi:10.1046/j.1365-8711.2001.04647.x.
- [42]. K. Noguchi, V.I. Pariev, S.A. Colgate, H.F. Beckley and J. Nordhaus, *Astrophys. J.* **575**, 1151-1162 (2002).
- [43]. E.P. Velikhov, A.A. Ivanov, V.P. Lakhin, and K.S. Serebrennikov, *Phys. Letters A.* **356**, 357-365 (2006), doi:10.1016/j.physleta.2006.03.073.
- [44]. F.R. Gantmakher, *Лекции по аналитической механике [Lectures in analytical mechanics]*, (Fizmatlit, Moscow, 2005), p. 264. (in Russian)
- [45]. Moffat G. *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде [Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids]*, (Mir, Moscow, 1980), p. 343p. (in Russian)
- [46]. G. Rudiger and M. Kuker, arXiv:1601.03877v1[astro-ph.SR] (2016).
- [47]. F. Krauze and K.H. Redler, *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо [Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory]*, (Mir, Moscow, 1984), p. 314p. (in Russian)
- [48]. A.V. Getling, *Astronomy Reports*, **45**, 569-576 (2001), doi:10.1134/1.1383816.
- [49]. A.V. Getling, *Astronomy Reports*, **56**, 395-402 (2012), doi:10.1134/S106377291.
- [50]. A.V. Getling, *Solar Physics*, **239**, 93–111 (2006), doi:10.1007/s11207-006-0231-1.
- [51]. P. Goldreich and D. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **130**(2), 125-158 (1965), doi:10.1093/mnras/130.2.125.
- [52]. E. Knobloch and K. Jullien, *Physics of Fluids*, **17**(9), 094106 (2005), doi:10.1063/1.2047592.
- [53]. R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4th ed. (Pearson/Prentice Hall, N.J., 2004), p. 769.
- [54]. P.G. Siddheshwar and C. Kanchana, *Int. J. Mech. Sci.* **131**, 1061–1072 (2017), doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.07.050.

PACS: 12.38.Gc

## CHIRAL FERMIONS ALGORITHMS IN LATTICE QCD

Dafina Xhako<sup>1\*</sup>, Rudina Zeqirllari<sup>2</sup><sup>1</sup>*Department of Physics Engineering, Faculty of Mathematical Engineering and Physical Engineering, Polytechnic University of Tirana, Tirana, Albania*<sup>2</sup>*Department of Physics, Faculty of Natural Sciences, University of Tirana, Tirana, Albania*\*E-mail: [dafinaxhako@yahoo.com](mailto:dafinaxhako@yahoo.com)

Received November 28, 2018; revised January 24, 2019; accepted January 26, 2019

The theory that explains the strong interactions of the elementary particles, as part of the standard model, it is the so-called Quantum Chromodynamics (QCD) theory. In regimes of low energy this theory it is formulated and solved in a lattice with four dimensions using numerical simulations. This method it is called the lattice QCD theory. Quark propagator it the most important element that is calculated because it contains the physical information of lattice QCD. Computing quark propagator of chiral fermions in lattice means that we should invert the chiral Dirac operator, which has high complexity. In the standard inversion algorithms of the Krylov subspace methods, that are used in these kinds of simulations, the time of inversion is scaled with the inverse of the quark mass. In lattice QCD simulations with chiral fermions, this phenomenon it is knowing as the critical slowing-down problem. The purpose of this work is to show that the preconditioned GMRESR algorithm, developed in our previous work, solves this problem. The preconditioned GMRESR algorithm it is developed in U(1) group symmetry using QCDLAB 1.0 package, as good “environment” for testing new algorithms. In this paper we study the escalation of the time of inversion with the quark mass for this algorithm. It turned out that it is a fast inversion algorithm for lattice QCD simulations with chiral fermions, that “soothes” the critical slowing-down of standard algorithms. The results are compared with SHUMR algorithm that is optimal algorithm used in these kinds of simulations. The calculations are made for 100 statistically independent configurations on 64 x 64 lattice gauge U(1) field for three coupling constant and for some quark masses. The results showed that for the preconditioned GMRESR algorithm the coefficient  $k$ , related to the critical slowing down phenomena, it is approximately  $-0.3$  compared to the inverse proportional standard law ( $k = -1$ ) that it is scaled SHUMR algorithm, even for dense lattices. These results make more stable and confirm the efficiency of our algorithm as an algorithm that avoid the critical slowing down phenomenon in lattice QCD simulations. In our future studies we have to develop the preconditioned GMRESR algorithm in four dimensions, in SU (3) lattice gauge theory.

**KEYWORDS:** algorithms, chiral, critical-slowing, fermions, lattice, QCD

## АЛГОРИТМИ ХІРАЛЬНИХ ФЕРМІОНІВ У РЕШІТЧАСТІЙ КХД

Dafina Xhako<sup>1</sup>, Rudina Zeqirllari<sup>2</sup><sup>1</sup>*Кафедра фізичної інженерії, факультет математичної інженерії та фізичного машинобудування, Політехнічний університет Тірани, Тірана, Албанія*<sup>2</sup>*Кафедра фізики, Факультет природничих наук, Університет Тірани, Тірана, Албанія*

Теорія, яка пояснює сильні взаємодії елементарних частинок, як частина стандартної моделі, це так звана теорія квантової хромодинаміки (КХД). У режимах малої енергії ця теорія формулюється і вирішується у чотирьох-вимірній решітці за допомогою чисельного моделювання. Цей метод називається решітчаста КХД-теорія. Кварк пропагатор є найважливішим обчислювальним елементом, оскільки він містить фізичну інформацію про КХД решітку. Обчислення пропагатора кварків хіральних ферміонів в решітці означає, що ми повинні інвертувати хіральний оператор Дірака, який має високу складність. У стандартних алгоритмах інверсії методами Крилова, які використовуються в цих моделях, час інверсії масштабується з оберненою масою кварків. У решітчастому КХД-моделюванні з хіральними ферміонами це явище відоме як критична проблема уповільнення. Метою даної роботи є показати, що розроблений нами попередній алгоритм GMRESR вирішує цю проблему. Запропонований алгоритм GMRESR розроблений у груповій симетрії U (1) за допомогою пакета QCDLAB 1.0, як хорошого «середовища» для тестування нових алгоритмів. У цій роботі досліджується збільшення часу інверсії від маси кварків для цього алгоритму. Виявилось, що це швидкий алгоритм інверсії для решітчастих КХД моделювань з хіральними ферміонами, що «заспокоює» критичне уповільнення стандартних алгоритмів. Результати порівнюються з алгоритмом SHUMR, який є оптимальним алгоритмом, що використовується в цих видах моделювання. Розрахунки проводяться для 100 статистично незалежних конфігурацій на 64×64 решіточному калібровочному полі U(1) для трьох констант зв'язку і для деяких мас кварків. Отримані результати показали, що для попереднього алгоритму GMRESR коефіцієнт  $k$ , пов'язаний з критичними явищами уповільнення, становить приблизно  $-0,3$  порівняно зі зворотним пропорційним стандартним законом ( $k = -1$ ), що він є масштабованим алгоритмом SHUMR, навіть для щільних решіток. Ці результати роблять більш стабільними і підтверджують ефективність нашого алгоритму як такого, що дозволяє уникнути критичного явища уповільнення в решітчастих КХД-моделюваннях. У наших майбутніх дослідженнях ми розвинемо попередній алгоритм GMRESR у чотирьох вимірах, для решітчастої калібровочної теорії SU(3).

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** алгоритми, хіральність, критичні сповільнення, ферміони, решітки, КХД

Quantum Chromodynamics (QCD) is the quantum theory of strong interactions of particles like quarks and gluons. It studies the physics of strong interactions for different regimes of energy, from low to high regimes. At high energies since asymptotic freedom of quarks it is displayed [1], we can make perturbative calculations of QCD. At low energies it is displayed the quark confinement [1] where the coupling between quarks it is very strong. At these regimes we can make only non-perturbative calculations. One of the most powerful methods at this point it is the lattice regularization of gauge theories. It was proposed by Wilson in 1974 [2] as a lattice gauge theory that is formulated on a lattice with

four dimensions, in space and time, where fields of quarks are positioned at lattice sites and the gluon fields are positioned on the links connecting neighboring sites. Lattice QCD with chiral fermions is very important in development of the QCD theory. Thus, we have to formulate QCD with chiral fermions on the lattice; for this purpose, exist two main formulations: the domain wall fermions [3, 4] and the overlap fermions [5, 6], which are closely related [7]. Specifically, the truncated overlap of domain wall fermions [8], as it is showed in [9] at any lattice spacing, it is equivalent to overlap fermions in four dimensions. To take physical information from these theories we have to calculate quark propagators, which are combined to takes meson, nucleon and other elementary particle propagators. So, the basic major computing problem in lattice QCD simulations with chiral fermions is the calculation of quark propagator.

### MATERIALS AND METHODS

Since we have to simulate the lattice QCD theory with chiral fermions we can use the chiral Dirac operator that is in fact the Neuberger operator or the so-called overlap operator [10]. The calculation of the overlap quark propagator means that we have to solve large linear systems of the type:

$$D \cdot x = b. \quad (1)$$

In Eq. (1) operator  $D \in \mathbb{C}^{N \times N}$  is a sparse and large matrix operator representing the overlap Dirac operator on a four-dimensional space-time lattice,  $x \in \mathbb{C}^N$  is the quark propagator and  $b \in \mathbb{C}^N$  the source of quark. Due to high complexity of this operator, generally, this problem requires very intensive computations and high computing power.

For the solution of large linear systems as expressed in (1), there are standard tested methods. The optimal methods for chiral fermions are those from the Krylov subspace methods [11] such as: GMRES (Generalized Minimal Residual) [11], CGNE (Conjugate Gradient on Normal Equation) [11], SHUMR (Shifted Unitary Minimal Residual) [11]. These algorithms considerably slowed down for light quarks and in some cases don't converges. The inversion time in the Krylov's inversion algorithms [12] escalate in a disproportionate proportion with the quark mass. This phenomenon it is called the critical slowdown of simulation algorithms in lattice QCD with chiral fermions. For this reason we use simulations of lattice gauge theory with U(1) symmetry or the simulations of the Quantum Electrodynamics (QED), in a lattice with two dimensions, space and time lattice. The QED it is a good "environment" for testing new algorithms of QCD. In [13] we have developed a faster inversion algorithm used for chiral fermions, called *the preconditioned GMRESR (Generalized Minimal Residual - Recursive)* algorithm. The feature of our preconditioned part is that we used the relation between the overlap operator and the truncated overlap operator with finite extra dimension. For implementation of the preconditioned GMRESR algorithm, we have used a software called QCDCALAB [14, 15] which is a package designed for lattice QCD simulations and new algorithms. Specifically, we used the QCDCALAB 1.0 version (a free-shared package that can be downloaded from QCDCALAB project homepage [16]) [14], which has the lattice Schwinger model because this model owns similar characteristic and algorithms with lattice QCD. The idea of the preconditioned part in a lattice QCD algorithm it is developed also in [17]. With our algorithm in lattice with two dimension, we gain a factor of 2 if we compare our results with [17] for the same quark mass tested. Also, with this algorithm we have calculated the propagator of the domain wall fermions, and we have used the truncated overlap of domain wall fermions, in this case in 2+1 dimensions. Our new algorithm gives a significant contribution to the lattice QCD algorithms and it is a new code that it is added to the QCDCALAB 1.0 package, in U(1) gauge field background. A typical test of the inversion algorithms is to study the convergence history of these algorithms, specifically the residual norm convergence. This test shows the graphical results of the residual norm of the algorithm with the number of the Dirac operator multiplications. Such kind of study for the preconditioned GMRESR algorithm we have done in [18].

In this paper, we bring another important study on the efficiency and speed of an algorithm in the numerical simulations of the lattice QCD with chiral fermions. It is the escalation of the algorithm with the quark mass. In the standard inversion algorithms of the Krylov subspace methods, the time  $t$  of inversion of chiral Dirac operator is scaled with the inverse of the quark mass  $m_q$  (in lattice unit)

$$t \sim (m_q)^k, \quad (2)$$

where  $k = -1$  and this phenomenon is known as the critical slowing down. An inversion algorithm will be optimal one if the coefficient  $k \approx 0$ , so totally independent from quark mass. Equation (2) in logarithmic scale will take the form:

$$\log t \sim k \log m_q. \quad (3)$$

To study this phenomenon in our case we have calculated for the preconditioned GMRESR algorithm and for the SHUMR algorithm the time of inversion of overlap operator (in seconds) for different quark masses. Simulations for this work were performed at the Polytechnic University of Tirana -grid cluster. The cluster consists of 6 node cluster for computing problems. Each node is an HP ProLiant DL320 Server with dual-core Intel Xeon 3040, 1.86GHz, 2GB RAM + 80GB HDD and two Gigabit Ethernet cards. Total number of cores is 12.

**RESULTS**

We have performed numerical calculations for 100 gauge field configurations in U(1) lattice gauge theory which are statistically independent. The coupling constant of the gauge field background has been tested for three values  $\beta = 1.0, \beta = 1.1, \beta = 1.2$  as sufficient values to finalize the obtained results, in  $64 \times 64$  lattice volume. Using the three values of coupling constant, simulations were performed for heavy to light quarks at the range of values  $m_q = [0.5, 0.45, 0.4, 0.35, 0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01]$ , in lattice units, for each of them. We have done identical numerical calculations for both algorithms, the preconditioned GMRESR and the SHUMR. The numerical results of simulations are presented in Table 1, Table 2 and Table 3 for three tested values of the coupling constant, respectively  $\beta = 1.0, \beta = 1.1, \beta = 1.2$ .

Table 1.

Inversion time of chiral operator for coupling constant  $\beta = 1.0$  in lattice  $64^2$ .

Quark Mass (in Lattice Unit)	Algorithms	Inversion Time (in Seconds)
0.5	SHUMR	110.47
	GMRESR	43.120
0.45	SHUMR	120.42
	GMRESR	42.800
0.4	SHUMR	142.83
	GMRESR	42.830
0.35	SHUMR	184.15
	GMRESR	43.080
0.3	SHUMR	208.04
	GMRESR	45.230
0.25	SHUMR	256.73
	GMRESR	46.840
0.20	SHUMR	369.05
	GMRESR	47.030
0.15	SHUMR	689.95
	GMRESR	50.180
0.1	SHUMR	1024.19
	GMRESR	61.230
0.05	SHUMR	2843.24
	GMRESR	90.910
0.001	SHUMR	13863.2
	GMRESR	117.213

Table 2.

Inversion time of chiral operator for coupling constant  $\beta = 1.1$  in lattice  $64^2$ .

Quark Mass (in Lattice Unit)	Algorithms	Inversion Time (in Seconds)
0.5	SHUMR	102.20
	GMRESR	40.430
0.45	SHUMR	116.78
	GMRESR	41.630
0.4	SHUMR	137.23
	GMRESR	42.130
0.35	SHUMR	154.25
	GMRESR	42.660
0.3	SHUMR	198.64
	GMRESR	43.930
0.25	SHUMR	216.03
	GMRESR	44.100
0.20	SHUMR	289.11
	GMRESR	45.130
0.15	SHUMR	410.17
	GMRESR	50.760
0.1	SHUMR	919.65
	GMRESR	61.530
0.05	SHUMR	2746.23
	GMRESR	76.110
0.001	SHUMR	118705.1
	GMRESR	97.930

Table 3.

Inversion time of chiral operator for coupling constant  $\beta = 1.2$  in lattice  $64^2$ .

Quark Mass (in Lattice Unit)	Algorithms	Inversion Time (in Seconds)
0.5	SHUMR	96.340
	GMRESR	37.190
0.45	SHUMR	103.780
	GMRESR	40.630
0.4	SHUMR	127.280
	GMRESR	41.240
0.35	SHUMR	134.250
	GMRESR	42.660
0.3	SHUMR	168.640
	GMRESR	43.030
0.25	SHUMR	198.030
	GMRESR	44.100
0.20	SHUMR	259.110
	GMRESR	45.130
0.15	SHUMR	330.170
	GMRESR	49.760
0.1	SHUMR	824.190
	GMRESR	60.530
0.05	SHUMR	1446.24
	GMRESR	76.110
0.001	SHUMR	9904.27
	GMRESR	91.930

In graphical form according (2) the results are showed in Figure 1, Figure 2 and Figure 3.

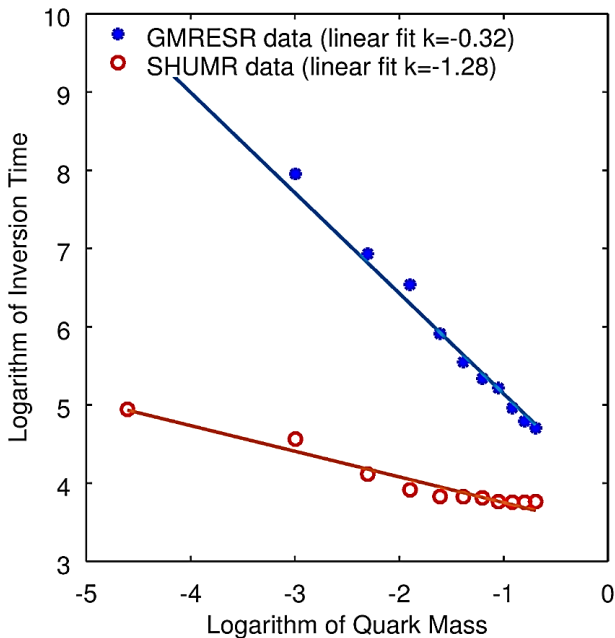


Fig. 1. The graphic of inversion time (in seconds) of the overlap chiral operator from the quark mass on the logarithmic scale using the preconditioned GMRESR and SHUMR algorithms, in  $64 \times 64$  lattice with  $U(1)$  gauge field and  $\beta = 1.0$ . The linear fit of our data for the preconditioned GMRESR algorithm gives  $k = -0.32$  and for SHUMR,  $k = -1.28$ .

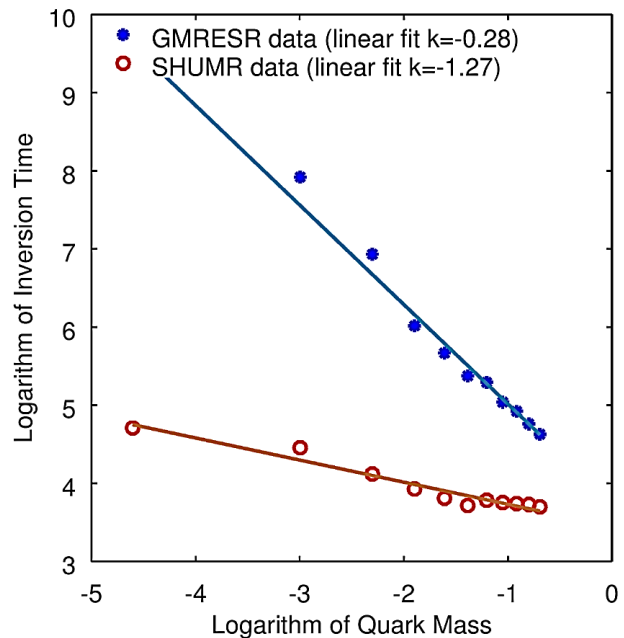


Fig. 2. The graphic of inversion time (in seconds) of the overlap chiral operator from the quark mass on the logarithmic scale using the preconditioned GMRESR and SHUMR algorithms, in  $64 \times 64$  lattice with  $U(1)$  gauge field and  $\beta = 1.1$ . The linear fit of our data for the preconditioned GMRESR algorithm gives  $k = -0.28$  and for SHUMR,  $k = -1.27$ .

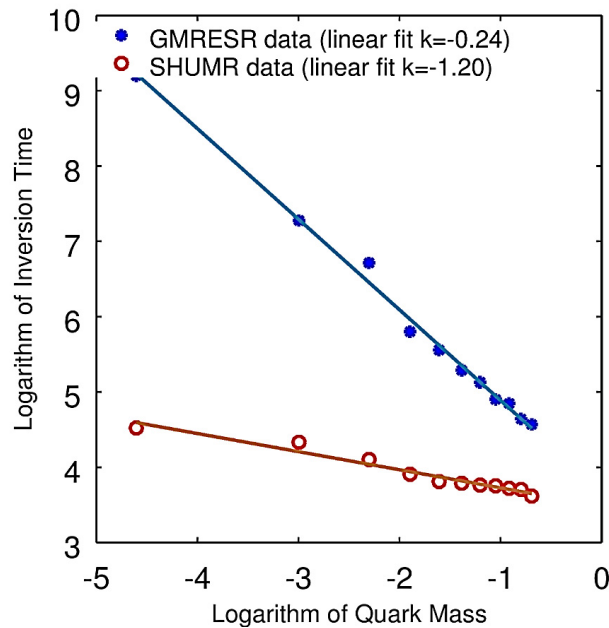


Fig. 3. The graphic of inversion time (in seconds) of the overlap chiral operator from the quark mass on the logarithmic scale using the preconditioned GMRESR and SHUMR algorithms, in 64x64 lattice with U (1) gauge field and  $\beta = 1.2$ . The linear fit of our data for the preconditioned GMRESR algorithm gives  $k = -0.24$  and for SHUMR,  $k = -1.20$ .

Figure 1, Figure 2 and Figure 2 represents the graphics of inversion time (in seconds) of the overlap chiral operator from the quark mass for both algorithms. The graphics are on logarithmic scale in order to find the coefficient  $k$ . As we have explained above, we have used the preconditioned GMRESR and SHUMR algorithms, in 64 x 64 lattice with U (1) gauge field.

### DISCUSSIONS

In Figure 1 the preconditioned GMRESR algorithm escalate with the quark mass as  $(m_q)^{-0.32}$  and the SHUMR as  $(m_q)^{-1.28}$ . So, the coefficient  $k$  for SHUMR algorithm is 4 times greater than for the preconditioned GMRESR algorithm for coupling constant  $\beta = 1.0$ . In Figure 2 the preconditioned GMRESR algorithm escalate with the quark mass as  $(m_q)^{-0.28}$  and the SHUMR as  $(m_q)^{-1.27}$ . So, the coefficient  $k$  for SHUMR algorithm is 4.5 times greater than for the preconditioned GMRESR algorithm for coupling constant  $\beta = 1.1$ . In Figure 3 the preconditioned GMRESR algorithm escalate with the quark mass as  $(m_q)^{-0.24}$  and the SHUMR as  $(m_q)^{-1.20}$ . So, the coefficient  $k$  for SHUMR algorithm is 5 times greater than for the preconditioned GMRESR algorithm for coupling constant  $\beta = 1.2$ . So finally, the inversion time of chiral operator from the quark mass, in lattice QCD simulations, using the preconditioned GMRESR algorithm, doesn't escalate with the invers of quark mass as SHUMR algorithm. So, it "soothes" the critical slowing down of standard algorithms used in chiral simulations of lattice QCD.

### ACKNOWLEDGMENTS

This work is done using the parallel computing system of the Faculty of Information Technology and with the support of the Department of Engineering Physics in the Faculty of Engineering Mathematics and Engineering Physics (FIMIF), Polytechnic University of Tirana, and the Department of Physics in the Faculty of Natural Science, University of Tirana, Albania.

### ORCID IDs

Dafina Xhako  <https://orcid.org/0000-0002-0937-2471>,  
Rudina Zeqirllari  <https://orcid.org/0000-0002-0367-9560>,





### REFERENCES

- [1]. M. Lüscher, Annales Henri Poincare, **4**, 197-210 (2003).
- [2]. K. G. Wilson, Phys. Rev. D, **10**, 2445 (1974), doi: 10.1103/PhysRevD.10.2445.
- [3]. D. B. Kaplan, Phys. Lett. B, **228**, 342 (1992), doi: 10.1016/0370-2693(92)91112-M.
- [4]. V. Furman and Y. Shamir, Nucl. Phys. B, **439**, 54 (1995), doi: 10.1016/0550-3213(95)00031-M.

- [5]. R. Narayanan and H. Neuberger, *Phys. Lett. B* **302**, 62 (1993), doi: 10.1016/0370-2693(93)90636-V.
- [6]. R. Narayanan and H. Neuberger, *Nucl. Phys. B* **443**, 305 (1995), doi: 10.1016/0550-3213(95)00111-5.
- [7]. A. Boriçi, in: *QCD and Numerical Analysis III Proceedings*, edited by A. Boriçi, A. Frommer, B. Joó, A. Kennedy and B. Pendleton (Springer, Germany, 2005), pp. 25-39.
- [8]. A. Boriçi, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **83**, 771 (2000), doi: 10.1016/S0920-5632(00)91802-4.
- [9]. A. Boriçi, in: *Lattice Fermions and Structure of the Vacuum*, edited by V. Mitrjushkin and G. Schierholz, (Kluwer Academic Publishers, London, 2006), pp. 41-54.
- [10]. H. Neuberger, *Phys. Lett. B* **417**, 141 (1998), doi: 10.1016/S0370-2693(97)01368-3.
- [11]. A. Boriçi, PhD thesis, No. CSCS TR-96-27, ETH Zurich (1996).
- [12]. A. Boriçi and P. Forcrand, in: *Physics Computing '94 Proceedings*, edited by R. Gruber and M. Tomassini (European Physical Society, Switzerland, 1994), pp. 711–714.
- [13]. D. Xhako and A. Boriçi, *American Journal of Physics and Applications*, **2**, 67 (2014), doi: 10.11648/j.ajpa.20140202.15.
- [14]. A. Boriçi, *High Energy Physics - Lattice (hep-lat)*, (2006), arXiv:hep-lat/0610054.
- [15]. A. Boriçi, Invited talk given at the: *Domain Wall Fermions at Ten Years*, 2007 March 15-17, Brookhaven National Laboratory, arXiv:hep-lat/0703021.
- [16]. QCDLAB software, <http://phys.fshn.edu.al/qcdlab>.
- [17]. N. Cundy, *Comput. Phys. Commun.* **165**, 22 (1974), doi: 10.1016/j.cpc.2004.10.005.
- [18]. D. Hyka (Xhako) and R. Osmanaj (Zeqirllari), in: *35<sup>th</sup> International Symposium on Lattice Field Theory - Lattice 2017 Proceedings*, edited by M. D. Morte, E. G. Sanchez, P. Fritzsche and C. P. Ruano, (EPJ Web of Conferences, France, 2018), pp. 14005-14061.

PACS: 12.38.Bx, 14.65.Dw, 14.65.Fy, 13.85.-t

## PRODUCTION OF $c\bar{c}$ – AND $b\bar{b}$ – QUARK PAIRS IN $pp$ COLLISIONS AT ENERGIES OF EXPERIMENTS AT THE LARGE HADRON COLLIDER

 Taras Horbatiuk<sup>1</sup>,  Volodymyr Kotlyar<sup>1,2\*</sup>,  
 Mykola Maslov<sup>2</sup>,  Anton Safronov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kharkiv V.N. Karazin National University  
 Sq. Svobody 4, Kharkiv, 61022, Ukraine

<sup>2</sup>National Science Center “Kharkiv Institute of Physics and Technology”  
 1, Akademichna Str., Kharkiv, 61108, Ukraine

\*E-mail: kotlyarv@kipt.kharkov.ua

Received December 29, 2018; revised February 4, 2019; accepted February 14, 2019

Production of charm and beauty quark–antiquark pairs in proton–proton collisions is simulated with the codes generated in the framework of MadGraph5\_aMC@NLO. The tree–level partonic processes are taken into account in first three orders of the perturbative quantum chromodynamics. The considered hard processes have two, three, and four partons in the final states. These final states contain one or two heavy quark–antiquark pairs. The calculations are performed with parton distribution functions (PDF) obtained with neural network methods by NNPDF collaboration. Influence of the multiple partonic interactions (MPI), initial– and final–state showers on the cross sections (CSs) is studied consistently taking advantage of Pythia 8 event generator. The CSs are computed in central and forward rapidity regions under conditions of the ALICE and LHCb experiments at the Large Hadron Collider at CERN. The studied transverse momentum interval of the heavy quarks spreads up to 30 GeV/c. The CSs calculated at the leading order (LO) with Pythia 8, in the tree approximation with MadGraph5, and within Fixed Order plus Next–to–Leading Logarithms (FONLL) approach agree with each other within bands of the uncertainties inherent to underlying theory and methods. Inclusion of next–to–leading order (NLO) and N<sup>2</sup>LO partonic processes into calculations in addition to LO ones results in growth of the CSs. This increase reduces to some extent discrepancies with the CSs measured by ALICE and LHCb. Variations of the CSs due to renormalization– and factorization–scale dependence are much larger than the increase of the CSs in NLO and N<sup>2</sup>LO, than the uncertainties springing in the NNPDF model, and then the accuracy achieved in the ALICE and LHCb cross section measurements. Effects of the MPI, the space– and time–like partonic showers on the heavy quark CSs are found to be not very essential.

**KEYWORDS:** charm and bottom quark, LHC, ALICE, LHCb, MadGraph5\_aMC@NLO, Pythia 8

### НАРОДЖЕННЯ $c\bar{c}$ – ТА $b\bar{b}$ – КВАРКОВИХ ПАР В $pp$ ЗІТКНЕННЯХ ПРИ ЕНЕРГІЯХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ НА ВЕЛИКОМУ АДРОННОМУ КОЛАЙДЕРІ

Т.М. Горбатюк<sup>1</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, М.І. Маслов<sup>2</sup>, А.С. Сафронов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна

<sup>2</sup>Національний науковий центр “Харківський фізико-технічний інститут”

вул. Академічна, 1, Харків, 61108, Україна

Народження зачарованих і боттом кварк–антикваркових пар в протон–протонних зіткненнях моделюється за допомогою комп'ютерних програм, що було стеновано за допомогою MadGraph5\_aMC@NLO. Деревинні партонні процеси враховуються в перших трьох порядках теорії збурень у квантовій хромодинаміці. Розглянуті жорсткі процеси мають два, три та чотири партони в кінцевих станах. Ці кінцеві стани містять одну або дві пари важких кварк–антикварків. Розрахунки виконуються з функціями розподілу партонів, отриманих колаборацією NNPDF з використанням методів нейронних мереж. Вплив багаторазових партонних взаємодій, злив в початковому та кінцевому станах на інтегральні перерізи (ІП) вивчається узгоджено з використанням генератора подій Pythia 8. ІП обчислюються в центральній області бистрот та під малими кутами емісії важких кварків за умовами експериментів ALICE та LHCb на Великому адронному колайдері ЦЕРН. Реакції досліджено при поперечних імпульсах важких кварків до 30 ГэВ /с. ІП, що було розраховано в лідируючому порядку (ЛП) з Pythia 8, в деревинному наближенні з MadGraph5, а також на основі FONLL–підходу, узгоджуються між собою в межах смуг невизначеностей властивих теорії та методам, що використовуються. Включення у розрахунки партонних процесів в наступному за лідируючим порядком (НЛП) і Н<sup>2</sup>ЛП на додаток до ЛП приводить до зростання ІП. Це збільшення зменшує неузгодженість з перерізами, що було отримано ALICE та LHCb. Варіації ІП, пов'язані зі шкалами перенормування та факторизації, значно перевищують отримане збільшення ІП в НЛП та Н<sup>2</sup>ЛП, невизначеності моделі NNPDF, і точність вимірів перерізів, які було виконано ALICE та LHCb. Багаторазові партонні взаємодії, просторово- та часо-подібні партонні зливи не змінюють суттєво ІП.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** зачаровані і боттом кварки, LHC, ALICE, LHCb, MadGraph5\_aMC@NLO, Pythia 8

### РОЖДЕНИЕ $c\bar{c}$ – И $b\bar{b}$ – КВАРКОВИХ ПАР В $pp$ СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЕНЕРГИЯХ ЕКСПЕРИМЕНТОВ НА БОЛЬШОМ АДРОННОМ КОЛАЙДЕРЕ

Т.М. Горбатюк<sup>1</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Н.И. Маслов<sup>2</sup>, А.С. Сафронов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, Харьков, 61022, Украина

<sup>2</sup>Национальный Научный Центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая, 1, Харьков, 61108, Украина

Рождение очарованных и боттом кварк–антикварковых пар в протон–протонных столкновениях моделируется с помощью компьютерных программ, которые были получены с помощью MadGraph5\_aMC@NLO. Деревянные партонные процессы



учитываются в первых трех порядках теории возмущений квантовой хромодинамики. Рассматриваются жесткие процессы с двумя, тремя и четырьмя партонами в конечных состояниях. Эти конечные состояния содержат одну или две пары тяжелых кварк-антикварков. Расчеты выполняются с функциями распределения партонов, полученными коллаборацией NNPDF с использованием методов нейронных сетей. Влияние многократных партонных взаимодействий, ливней в начальном и конечном состояниях на интегральные сечения (ИС) изучается согласованно с генератором событий Pythia 8. ИС вычисляются в центральной области быстрой и под малыми углами эмиссии тяжелых кварков в условиях экспериментов ALICE и LHCb на Большом адронном коллайдере ЦЕРН. Реакции исследуются при поперечных импульсах тяжелых кварков до 30 ГэВ/с. ИС, рассчитанные в лидирующем порядке (ЛП) с Pythia 8, в древесном приближении с MadGraph5, а также на основе FONLL-подхода, согласуются между собой в пределах полос неопределенностей, присущих используемым теории и методам. Включение в расчеты партонных процессов в следующем за лидирующим порядке (НЛП) и Н<sup>2</sup>ЛП в дополнение к ЛП приводит к росту ИС. Это увеличение уменьшает рассогласование с сечениями, которые были получены ALICE и LHCb. Вариации ИС, связанные со шкалами перенормировки и факторизации, значительно превышают полученное увеличение ИС в НЛП и Н<sup>2</sup>ЛП, неопределенности модели NNPDF, а также точность измерений сечений, которые были выполнены ALICE и LHCb. Изменения ИС при учете многократных партонных взаимодействий, пространственно и времени-подобных партонных ливней не являются существенными.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** очарованные и боттом кварки, LHC, ALICE, LHCb, MadGraph5\_aMC@NLO, Pythia 8

Open charm and beauty production is a subject of intensive experimental and theoretical researches. The heavy quarks,  $D$ - and  $B$ -mesons, baryons that contain  $c$ - or  $b$ -quarks are detected in the LHC experiments ALICE, ATLAS, CMS, and LHCb. The integral and differential CSs of the processes are obtained making available excellent testing grounds for calculations within perturbative quantum chromodynamics (pQCD) and for QCD-motivated phenomenological models that incorporate non-perturbative effects. Provided that the reaction mechanisms are under strict control, heavy flavor production can be also a tool to investigate gluon distribution properties in protons and nuclei. Various frameworks and event generators (EGs), e.g. FONLL approach [1,2], MadGraph5\_aMC @ NLO [3], Pythia 8 [4], POWHEG-BOX [5], HERWIG [6], Sherpa [7], along with the PDF model, e.g. NNPDF [8], are employed for interpretation of the data.

An objective of this paper is to simulate processes of heavy quark production at the LHC energies under conditions of ALICE [9] and LHCb [10,11] experiments. ALICE measurements in central rapidity region  $|y| \leq 0.5$  compliment the LHCb studies at pseudorapidities  $2 \leq \eta \leq 5$ . Area of relatively small transverse momenta  $p_T \lesssim 20 \dots 30$  GeV/c can be explored by both detectors. We aim to carry out calculations of the cross section for charmed and bottom quark production at LO, NLO and at N<sup>2</sup>LO within the tree approximation of pQCD and to demonstrate how corrections beyond LO affect the CSs. MadGraph5\_aMC @ NLO and Pythia 8 are to be used with this end. Results of calculations are to be compared with the experimental data and theoretical uncertainties are to be discussed.

### SIMULATION OF HEAVY QUARK PRODUCTION BEYOND LEADING ORDER OF PERTURBATIVE QUANTUM CHROMODYNAMICS

Heavy quark anti-quark pairs are created in hard partonic processes, e.g.  $g + g \rightarrow Q + \bar{Q}$ , where  $Q$  is charmed or bottom quark. Codes for modeling these processes in proton-proton scattering are generated with MadGraph5\_aMC @ NLO [3] in the tree approximation. Calculations are performed for groups of processes

$$p + p \rightarrow Q + \bar{Q}, \quad (1)$$

$$p + p \rightarrow Q + \bar{Q}, \quad Q + \bar{Q} + jet, \quad (2)$$

$$p + p \rightarrow Q + \bar{Q}, \quad Q + \bar{Q} + jet, \quad Q + \bar{Q} + 2jet, \quad 2(Q + \bar{Q}), \quad (3)$$

that have from two up to four partons in the final states. In (1) ... (3)  $p$  and  $jet$  denote gluon or one of the quarks  $u, d, s$  for  $Q=c$  and  $u, d, s, c$  for  $Q=b$ . Particles  $p$  and  $jet$  can be respective anti-quarks. In model employed in the simulations charmed and bottom quarks in the final states are massive. In protons and in jets quarks  $u, d, s, c$  have zero masses. LO Born, NLO, and N<sup>2</sup>LO gluon scattering that results in  $b\bar{b}$ -pair creation at the tree level is illustrated in Fig. 1. Processes initiated by two gluons together with quark-gluon scattering determine sensitivity of the observables to gluon distribution in colliding hadrons.

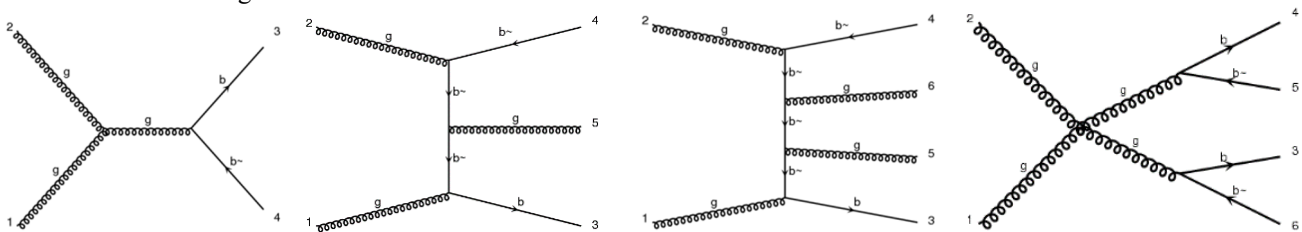


Fig. 1. Gluon interaction that results in final states with two, three, and four particles. The diagrams are generated by MadGraph

Partonic events obtained with the MadGraph codes are showered then with Pythia 8 [4] and MPI are simulated also with this EG. NNPDF parton distribution functions [8] are used in the computations.

### CROSS SECTIONS OF $c\bar{c}$ – AND $b\bar{b}$ – PRODUCTION

Integral cross sections (CS) are calculated with MadGraph5\_aMC @ NLO [3] in junction with Pythia 8 [4] at LO, NLO, and N<sup>2</sup>LO at tree level and with Pythia 8 at LO. Computed CSs are compared with results obtained within FONLL approach [1,2].

As seen from Fig. 2, where CSs integrated over all rapidity range are shown, inclusion of processes with three and four partons in the final states in addition to ones with single  $Q\bar{Q}$ -pair does not affect the CSs values essentially in comparison with the uncertainties of the CSs that originate from variation of the renormalization and factorization scales. In calculation with MadGraph and Pythia these uncertainties are determined for scale factors from 1/2 up to 2 that change independently for renormalization and factorization scales. CSs obtained with MadGraph and Pythia, Pythia, and FONLL differ insignificantly.

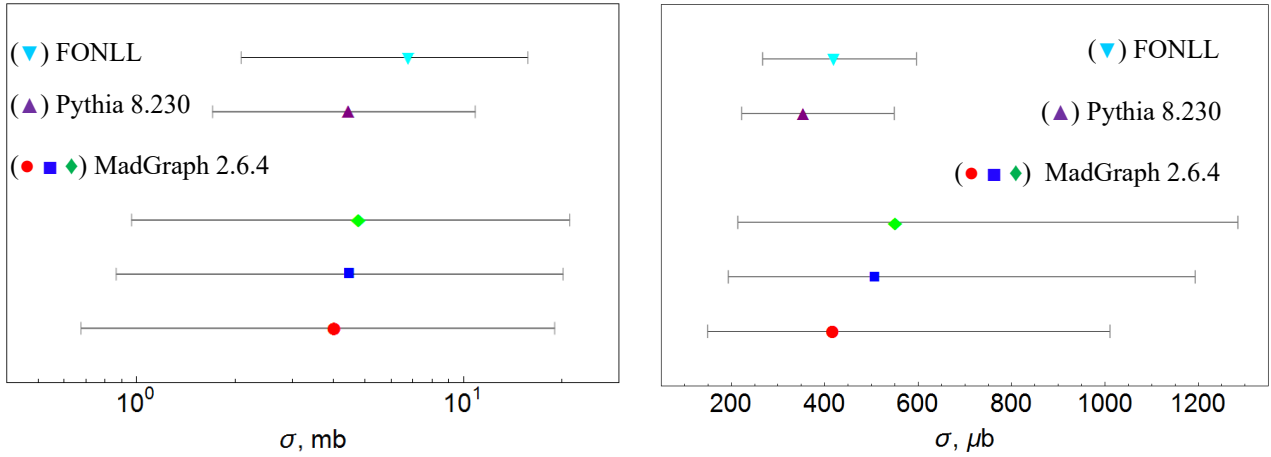


Fig. 2. The CSs of charmed (left) and bottom (right) quark anti-quark pair production in pp collisions at  $s^{1/2} = 13$  TeV. CSs calculated with MadGraph for groups of partonic processes (1), (2), and (3) are shown by ●, ■, and ◆, respectively

In simulations with MadGraph we chose minimal value of jet transverse momenta  $p_{T,jet\ min} = 10$  GeV/c that is set to be equal to the minimal distance in the momentum space between the partons in accepted events. Solid curves in Fig. 3 demonstrate that the integral CS changes very slowly when  $p_{T,jet\ min}$  exceeds value  $\sim 10$  GeV/c. Further decrease of the CS from momenta  $p_{T,jet\ min} = 20$  up to 60 GeV/c is 2.4%. In the present calculations at  $s^{1/2} = 13$  TeV, the integral CSs are obtained for the transverse momenta of the heavy quarks  $p_{T,c\ min}$  and  $p_{T,b\ min} = 0$ . Swift decline of the CS with growth of  $p_{T,c\ min}$  is illustrated by the dashed curve in fig. 3. This decrease of the CS is followed by reduction of the scale uncertainties as shown in Fig. 4. Thus, positive uncertainty falls from 348% at  $p_{T,c\ min} = 0$  down to 127% at  $p_{T,c\ min} = 5$  GeV/c and then to 88.6% at  $p_{T,c\ min} = 20$  GeV/c.

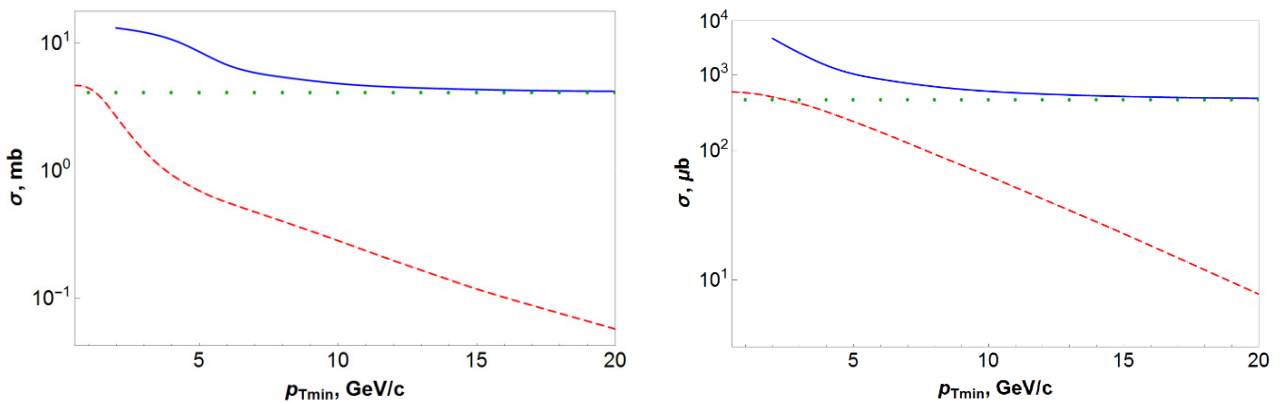


Fig. 3. The integral CSs for production of  $c\bar{c}$ -quarks (left) and  $b\bar{b}$ -quarks (right) at  $s^{1/2} = 13$  TeV. The CSs  $\sigma(p_{T,jet\ min}, p_{T,Q\ min} = 0)$  and  $\sigma(p_{T,jet\ min} = 10\ GeV/c, p_{T,Q\ min})$  at N<sup>2</sup>LO are shown by solid and dashed curves, dots — CSs at LO of pQCD. Heavy quark  $Q$  is charmed or bottom one

The CSs of charmed and bottom quark production in central rapidity region  $|y| < 0.5$  are compared in Fig. 5 with the ALICE data. The experimental values of the heavy quark differential CS at  $y=0$ , shown in Fig. 5, have been extracted in [9] from the ALICE data on dielectron production. Within approach [9] simulation with EGs is employed. Results [9] obtained with PYTHIA and POWHEG [5] are indicated by up ▲ and down ▼ triangles.

The CSs of heavy quark production in the forward rapidity region are shown in Fig. 6 together with the LHCb data. As can be seen from Fig. 5 and Fig. 6 results of calculations for bottom quarks do not contradict to the results of

ALICE and LHCb measurements. Experimental data for charmed quark CSs lie within the scale variations of the calculations.

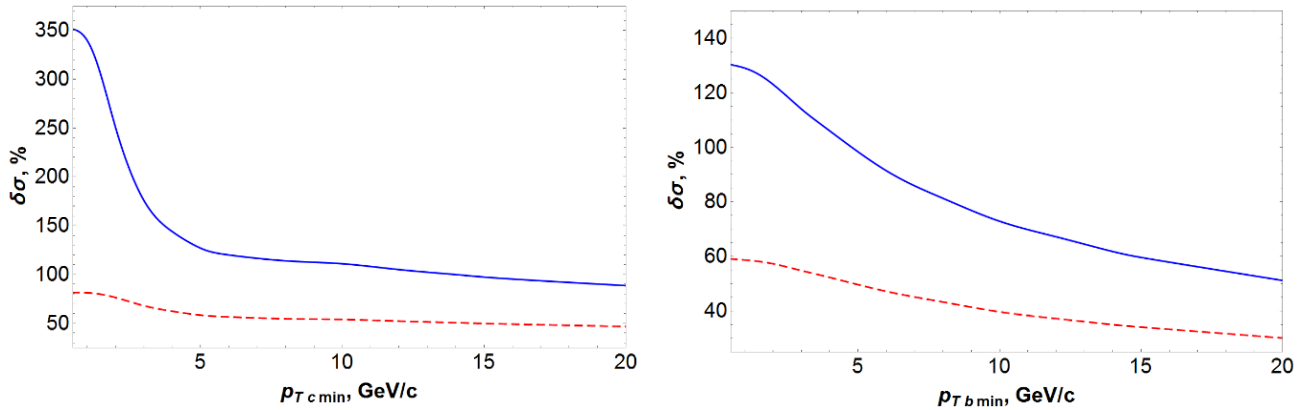


Fig. 4 Scale uncertainties of the  $c\bar{c}$ -quarks (left) and  $b\bar{b}$ -quarks (right) production CSs as functions of  $p_{TQmin}$ , where Q is for c- and b-quarks. Solid and dashed curves are for positive and negative CS variations

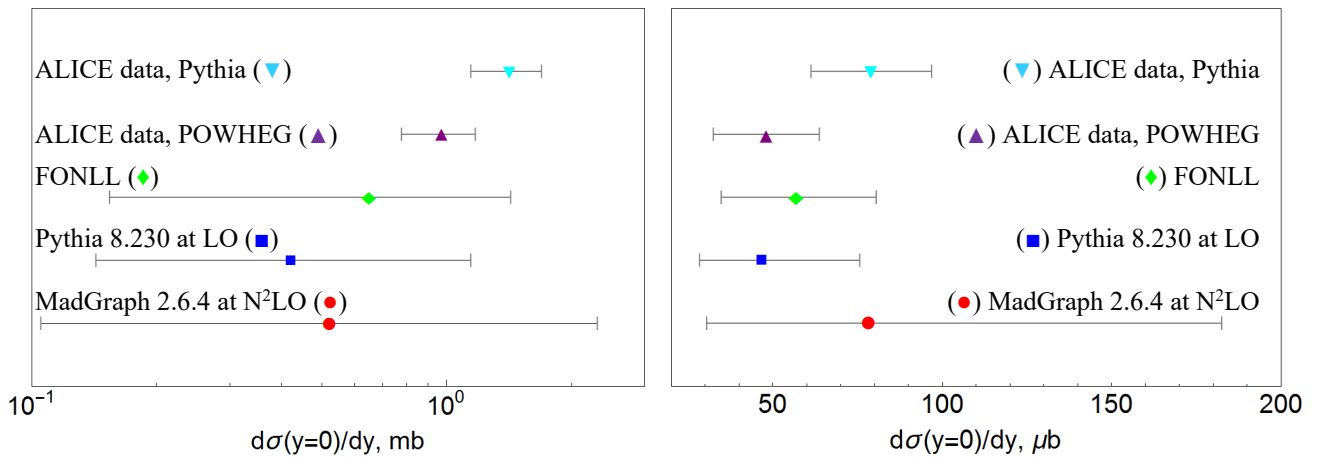


Fig. 5. The differential CSs of  $c\bar{c}$  (left) and  $b\bar{b}$  (right) production at zero rapidity in pp scattering at  $s^{1/2} = 13$  TeV. The ALICE data  $\blacktriangle$  and  $\blacktriangledown$  are taken from [9]

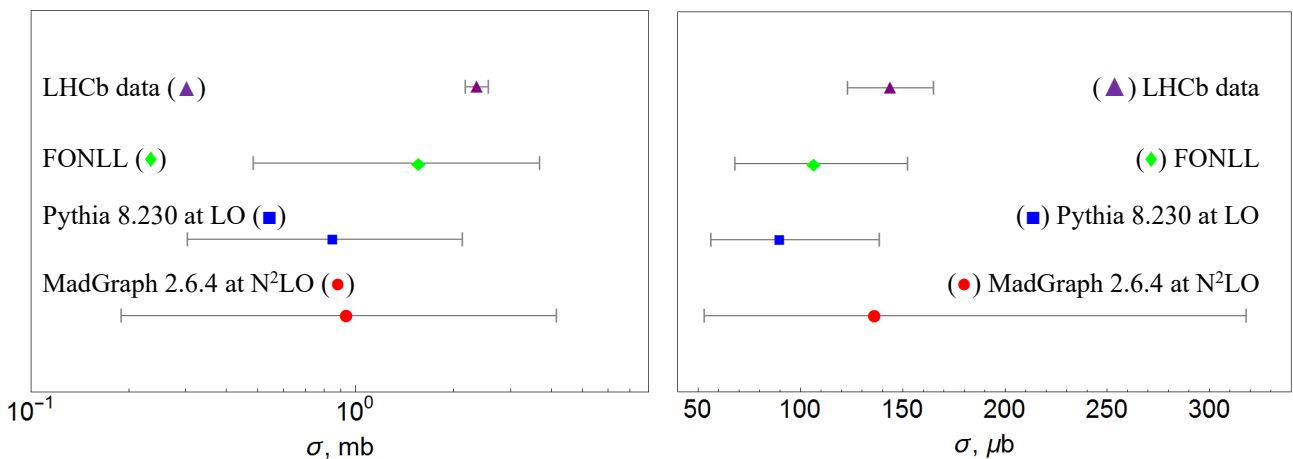


Fig. 6. The integral CSs for charmed (left) and bottom (right) quark anti-quark pair production in the forward rapidity region in pp scattering at  $s^{1/2} = 13$  TeV. The LHCb data  $\blacktriangle$  are from [10,11]

The differential CSs of bottom quark production as function of pseudorapidity  $\eta$  that are obtained with MadGraph 5 and Pythia 8 at the tree level at  $N^2LO$  are compared in Fig. 7 with the LHCb data. Note that being dependent on total energy  $s^{1/2}$  and interval of integration over the transverse momenta, the relative size of scale uncertainties for  $\eta$ -distributions in Fig. 7 keeps constant regardless of the values  $\eta$  takes.

As seen from Fig. 7, the experimental CS  $\eta$ -dependences have maxima. At  $s^{1/2} = 13$  TeV this feature of the CS is more distinct than in the data at 7 TeV. The calculations do not reproduce this behavior of CS  $d\sigma/d\eta$ . The reasons for this discrepancy may be caused by use of the tree approximation or by choice of some cut-off in the phase space that are not in full correspondence with the measurement procedure and the data analysis.

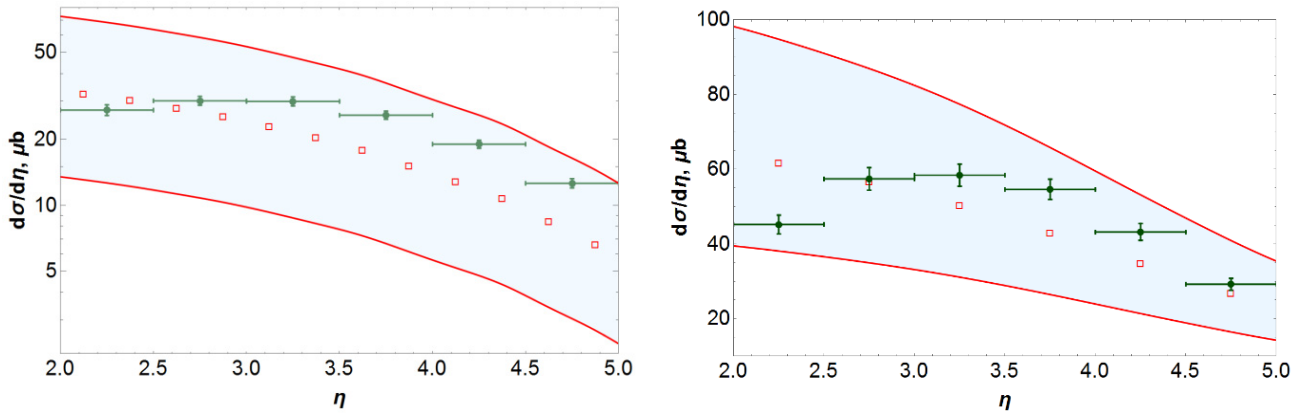


Fig. 7. The differential CSs for  $b\bar{b}$ -pair production in pp scattering at  $s^{1/2} = 7$  (left) and 13 TeV (right).

Calculations with MadGraph 5 and Pythia 8 are shown by squares  $\square$ , the scale uncertainties — by the band. The LHCb data  $\bullet$  are from [11]

Figs. 5-7, in which the results of simulations are compared with the LHC data, demonstrate that for all measurements the experimental uncertainties are smaller as compared with theoretical ones.

### CONCLUSIONS

Charmed and bottom quark production in proton–proton scattering is simulated at  $s^{1/2} = 7$  and 13 TeV. Calculations are performed at the tree level of pQCD with the codes for hard partonic processes, generated by MadGraph5\_aMC @ NLO [3]. First three order of QCD perturbation theory are taken into account. Space- and time-like partonic showers, multiparton interactions are included into the modeling with the help of Pythia 8 [4] event generator.

The integral cross sections of  $c$  and  $b$  quark anti-quark pair production are calculated both in the central and forward rapidity regions under conditions of ALICE [9] and LHCb [10,11] experiments. The pseudorapidity dependence of the differential cross section for  $b\bar{b}$ -pair production is also computed in the LHCb kinematic area. NLO and N<sup>2</sup>LO contributions increase the integral cross sections and results obtained with MadGraph5\_aMC@NLO in junction with Pythia 8 at N<sup>2</sup>LO are in agreement with the ALICE and LHCb data within the band of uncertainties due to renormalization and factorization scale variations. At the same time, the  $b\bar{b}$  differential cross sections at 7 and 13 TeV as functions of pseudorapidity differ in form from ones measured by the LHCb.

Calculations show that the influence of NLO and N<sup>2</sup>LO terms on the integral cross sections reduces with growth of jet minimal transverse momenta and at  $p_{T, \text{jet min}} \sim 10$  GeV/c becomes inessential. In the present simulation, the value of  $p_{T, \text{jet min}}$  equals the minimal distance in phase space between the partons in final states of hard processes. Thus, selection of events with well-separated jets together with elimination of events with soft jets can be used to suppress the contributions springing beyond LO in pQCD, to simplify the relevant reaction mechanisms, and to enhance sensitivity of the observables to the parton distributions functions, in particular to gluon ones.

Changes in the computed cross sections under scale variations turn out to be much larger than experimental uncertainties. Rapid exponential decrease of the cross sections with increase of minimal transverse momenta  $p_{T, Q \text{ min}}$  of the heavy quark,  $Q = c$  or  $b$ , is followed by reduction of the scale uncertainty size. It appears to be significant in the case of charmed quarks. Region of  $p_{T, c \text{ min}} \gtrsim 5$  GeV/c, where strip width of these uncertainties narrows, proves to be suitable for verification of the pQCD methods and of QCD-based models, employed in the simulations.

No substantial effect of partonic showers and multiparton interactions on the integral cross sections under considered kinematic cut-offs is found. Influence of these mechanisms on differential observables needs further studying.

### ACKNOWLEDGMENTS

V.V.K. acknowledges partial support of these researches by the National Academy of Sciences of Ukraine (project no. 0118U006495) and by the Ministry of Education and Science of Ukraine (project no. 0117U004866).

### ORCID IDs

Taras Horbatiuk <https://orcid.org/0000-0002-1915-9383>, Volodymyr Kotlyar <https://orcid.org/0000-0002-0264-5772>, Mykola Maslov <https://orcid.org/0000-0001-8315-3579>, Anton Safronov <https://orcid.org/0000-0002-0586-0830>

## REFERENCES

- [1]. M. Cacciari, S. Frixione, N. Houdeau, M. L. Mangano, P. Nason and G. Ridolfi, *J. High Energy Phys.* **1210**, 137 (2012).
- [2]. M. Cacciari, <http://www.lpthe.jussieu.fr/~cacciari/fonll/fonllform.html>.
- [3]. J. Alwall, R. Frederix, S. Frixione, V. Hirschi, F. Maltoni, O. Mattelaer, H.-S. Shao, T. Stelzer, P. Torrielli and M. Zaro, *J. High Energy Phys.* **1407**, 079 (2014).
- [4]. T. Sjöstrand, S. Ask, J. R. Christiansen, R. Corke, N. Desai, P. Ilten, S. Mrenna, S. Prestel, C. O. Rasmussen and P. Z. Skands, *Comput. Phys. Commun.* **191**, 159 (2015).
- [5]. S. Alioli, P. Nason, C. Oleari and E. Re, *J. High Energy Phys.* **1006**, 043 (2010).
- [6]. J. Bellm, S. Gieseke, D. Grellscheid, S. Plätzer, M. Rauch, C. Reuschle, P. Richardson, P. Schichtel, M. H. Seymour, A. Siódmok, A. Wilcock, N. Fischer, M. A. Harrendorf, G. Nail, A. Papaefstathiou and D. Rauch, *Eur. Phys. J. C*, **76**, 196 (2016).
- [7]. T. Gleisberg, S. Hoeche, F. Krauss, M. Schonherr, S. Schumann, F. Siegert and J. Winter, *J. High Energy Phys.* **0902**, 007 (2009).
- [8]. R. D. Ball et al. (NNPDF Collaboration), *J. High Energy Phys.* **1504**, 040 (2015).
- [9]. S. Acharya et al. (ALICE Collaboration), *Phys. Lett. B.* **788**, 505 (2018).
- [10]. R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), *J. High Energy Phys.* **1603**, 159 (2016), Erratum: *J. High Energy Phys.* **1609**, 013 (2016), Erratum: *J. High Energy Phys.* **1705**, 074 (2017).
- [11]. R. Aaij et al. (LHCb Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **118**, 052002 (2017), Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **119**, 169901 (2017).

PACS: 75.10.-b

## SPECTRA OF COLLECTIVE EXCITATIONS AND LOW-FREQUENCY ASYMPTOTICS OF GREEN'S FUNCTIONS IN UNIAXIAL AND BIAxIAL FERRIMAGNETICS

 Anton Glushchenko,  Michail Kovalevsky,  Valentina Matskevych\*

*Kharkiv Institute of Physics and Technology*

*Academichna 1, Kharkiv, 61108, Ukraine*

*\*E-mail: matskevych.vt@gmail.com*

Received January 12, 2019; revised January 31, 2019; accepted February 21, 2019

The paper studies the dynamic description of uniaxial and biaxial ferrimagnetics with spin  $s = 1/2$  in alternative external field. The nonlinear dynamic equations with sources are obtained, on basis on which low-frequency asymptotics of two-time Green functions in the uniaxial and biaxial cases of the ferrimagnet are obtained. Energy models are constructed that are specific functions of Casimir invariants of the algebra of Poisson brackets for magnetic degrees of freedom. On their basis, the question of the stable magnetic states has been solved for the considered systems. These equations were linearized, an explicit form of the collective excitations spectra was found, and their character was analyzed. The article studies the uniaxial case of a ferrimagnet, as well as biaxial cases of an antiferromagnet, easy-axis and easy-plane ferrimagnets. It is shown that for a uniaxial antiferromagnet the spectrum of magnetic excitations has a Goldstone character. For biaxial ferrimagnetic materials, it was found that the spectrum has either a quadratic character or a more complex dependence on the wave vector. It is shown that in the uniaxial case of an antiferromagnet the Green function of the type  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  and  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$  have regular asymptotic behavior, and the Green function of type  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^2$  and  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega^2$  have a pole feature in the wave vector and frequency. Biaxial ferrimagnetic states have another type of the features of low-frequency asymptotics of the Green's functions. In the case of a ferrimagnet, the "easy-axis" of the asymptotic behavior of the Green functions  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  have a pole character. For the case of the "easy-plane" type ferrimagnet, the asymptotics of the Green functions  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  have a pole character, and the Green function  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, \omega)$  contains both the pole component and the regular part. A comparative analysis of the low-frequency asymptotics of Green functions shows that the nature of magnetic anisotropy significantly effects the structure of low-frequency asymptotics for uniaxial and biaxial cases of ferrimagnet. Separately, we note the non-Bogolyubov character of the Green function asymptotics for ferrimagnet with biaxial anisotropy  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^4$ .

**KEY WORDS:** spin, ferromagnetic, spectra of collective excitations, Green's functions

### СПЕКТРИ КОЛЛЕКТИВНИХ ЗБУДЖЕНЬ ТА НИЗЬКОЧАСТОТНІ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦІЙ ГРІНА В ОДНОВІСНИХ ТА ДВОВІСНИХ ФЕРІМАГНЕТИКАХ

А.В. Глущенко, М.Ю. Ковалевський, В.Т. Мацкевич

*Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»*

*вул. Академічна, 1, м Харків, 61108, Україна*

У роботі дано опис динаміки одновісних і двовісних ферімагнетиків зі спіном  $s = 1/2$  в зовнішньому змінному полі. Отримано нелінійні динамічні рівняння з джерелами, на основі яких обчислені низькочастотні асимптотики двочасових функцій Гріна ферімагнетика в одновісному і двовісному випадках. Побудовано моделі енергії, які є певними функціями інваріантів Казимира алгебри дужок Пуассона для магнітних ступенів свободи. На їх основі виявлено питання про стійкі магнітні стани таких магнітних систем. Проведена лінеаризація зазначених рівнянь, знайдений явний вигляд спектрів колективних збуджень і проаналізовано їх характер. У статті вивчені одновісний випадок ферімагнетика, а також двовісні випадки антиферомагнетика, ферімагнетиків типу «легка вісь» і «легка площина». Показано, що для одновісного антиферомагнетика спектр магнітних збуджень має голдстоунівський характер. Для двовісних ферімагнетиків з'ясовано, що спектр має або квадратичний характер, або більш складну залежність від хвильового вектора. Показано, що в одновісному випадку антиферомагнетика функції Гріна типу  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  та  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$  мають регулярний характер асимптотик, а функції Гріна типу  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^2$  та  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega^2$  мають полюсну особливість по хвильовому вектору та частоті. Двовісні ферімагнітні стани мають особливості низькочастотних асимптотик функцій Гріна іншого типу. У разі ферімагнетика «легка вісь» асимптотики функцій Гріна  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  мають полюсний характер. Для випадку ферімагнетика типу «легка площина» асимптотики функцій Гріна  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  мають полюсний характер, а функція Гріна

$G_{s_{\alpha s \beta}}(k, \omega)$  містить як полюсну складову, так і регулярну частину. Проведений порівняльний аналіз низькочастотних асимптотик функцій Гріна показує істотний вплив характеру магнітної анізотропії на структуру низькочастотних асимптотик для одноосного і двохосного випадків ферромагнетика. Особливо відзначимо, небоголюбівський характер асимптотики функції Гріна ферромагнетика з двохосною анізотропією  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^4$ .

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** спин, ферромагнетик, спектри колективних збуджень, функції Гріна

## СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ И НИЗКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ОДНООСНЫХ И ДВУХОСНЫХ ФЕРРИМАГНЕТИКАХ

А.В. Глушенко, М.Ю. Ковалевский, В.Т. Мацкевич

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

В работе дано описание динамики одноосных и двухосных ферромагнетиков со спином  $s=1/2$  во внешнем переменном поле. Получены нелинейные динамические уравнения с источниками, на основе которых вычислены низкочастотные асимптотики двухвременных функций Грина ферромагнетика в одноосном и двухосном случаях. Построены модели энергии, которые являются определенными функциями инвариантов Казимира алгебры скобок Пуассона для магнитных степеней свободы. На их основе выяснен вопрос об устойчивых магнитных состояниях изучаемых магнитных систем. Проведена линеаризация указанных уравнений, найден явный вид спектров коллективных возбуждений и проанализирован их характер. В статье изучены одноосный случай ферромагнетика, а также двухосные случаи антиферромагнетика, ферромагнетиков типа «легкая ось» и «легкая плоскость». Показано, что для одноосного антиферромагнетика спектр магнитных возбуждений имеет голдстоуновский характер. Для двухосных ферромагнетиков выяснено, что спектр имеет либо квадратичный характер, либо более сложную зависимость от волнового вектора. Показано, что в одноосном случае антиферромагнетика функции Грина типа  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  и  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$  имеют регулярный характер асимптотик, а функции Грина типа  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^2$  и  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega) \sim 1/\omega^2$  имеют полюсную особенность по волновому вектору и частоте. Двухосные ферромагнитные состояния имеют особенности низкочастотных асимптотик функций Грина другого типа. В случае ферромагнетика «легкая ось» асимптотики функций Грина  $G_{s_{\alpha s \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  имеют полюсной характер. Для случая ферромагнетика типа «легкая плоскость» асимптотики функций Грина  $G_{s_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(0, \omega)$ ,  $G_{s_{\alpha n \beta}}(k, 0)$ ,  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0)$  имеют полюсной характер, а функция Грина  $G_{s_{\alpha s \beta}}(k, \omega)$  содержит как полюсную составляющую, так и регулярную часть. Проведенный сравнительный анализ низкочастотных асимптотик функций Грина показывает существенное влияние характера магнитной анизотропии на структуру низкочастотных асимптотик для одноосного и двухосного случаев ферромагнетика. Отдельно отметим, небоголюбивский характер асимптотики функции Грина ферромагнетика с двухосной анизотропией  $G_{n_{\alpha n \beta}}(k, 0) \sim 1/k^4$ .

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** спин, ферромагнетик, спектры коллективных возбуждений, функции Грина

An effective method for studying magnetic systems is the Green function method. For a wide range of problems of statistical mechanics two-time Green functions [1–4] are used, whose knowledge allows one to investigate both the equilibrium state and the peculiarities of non-equilibrium processes, if deviations from equilibrium are small. When finding the Green's functions for condensed states, various approximate methods are used. These include the quasiparticle approximation, the random phase method, expansion in a small parameter and approximation with the uncontrolled nature of the approximation [2–4]. The calculation of the Green's functions in the low-frequency region is closely related to the behavior of the physical system at large times and possibly in two ways. One of them is the “memory” function method [5]. Another approach is the “sources” method, which was developed for superfluid media and degenerate magnetic systems with spin  $s=1/2$  [6–9]. These methods were used to study the features of the two-time Green functions of isotropic superfluid and magnetic states, or with uniaxial magnetic anisotropy of equilibrium states.

In this paper we consider the influence of magnetic anisotropy on the collective behavior of uniaxial and biaxial ferrimagnetics. The aim of the research is to clarify the relationship of these factors with the spectra of collective excitations and the explicit form of the Green functions of these magnetics in the hydrodynamic limit, when the wave vector and frequency tend to zero. These data are useful in the study of the magnetic structure of these condensed media using cold neutrons.

The study of the dynamics of ferrimagnetic materials is based on the Hamiltonian formalism, which is widely used when considering various physical systems at the “hydrodynamic” stage of evolution [10] to describe slow nonequilibrium processes. In the following sections degenerate equilibrium states of ferrimagnetic materials with uniaxial and biaxial anisotropy are discussed. Nonlinear equations of the dynamics of the studied magnetic systems in an external alternating field are obtained. The spectra of collective excitations are found and low-frequency asymptotics of the two-time Green functions are obtained. The similarities and differences of such asymptotics, depending on the nature of the anisotropy of the physical system, are discussed.

**DYNAMICS OF UNIAXIAL AND BIAxIAL FERRIMAGNETICS IN ALTERNATIVE EXTERNAL FIELD**

Consider multi-sublattice magnetics with spin  $s=1/2$  in the case of uniaxial and biaxial  $SO(3)$  symmetry breaking of the equilibrium state. Normal equilibrium states of such magnetics are described by the Gibbs statistical operator

$$\hat{w}(Y) = \exp(\Omega(Y) - Y_0 \hat{H} - Y_\alpha \hat{S}_\alpha).$$

Here  $\Omega(Y)$  is the thermodynamic potential, which is a function of the thermodynamic forces  $Y_\alpha$  associated with additive integrals of motion. In the case of degenerate equilibrium states of magnets with one sublattice the Gibbs statistical operator has the form

$$\hat{w}(Y, \hat{F}_1(\mathbf{m})) = \exp(\Omega(Y) - Y_0 \hat{H} - Y_\alpha \hat{S}_\alpha - Y_0 V \hat{F}_1(\mathbf{m})),$$

where, according to the concept of quasi-averages, the source  $\hat{F}_1(\mathbf{m})$  breaking symmetry is a functional of the spin density operator

$$\hat{F}_1 = \int d^3x m_\alpha \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}).$$

Here  $m_\alpha$  is the axis of spontaneous magnetic anisotropy. In the case of several magnetic sublattices, along with the source  $\hat{F}_1$ , there is another possibility of breaking the magnetic symmetry, which is determined by the source of the form

$$\hat{F}_2 = \int d^3x n_\alpha \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}),$$

where  $\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x})$  is the order parameter operator. In the limit  $Y_\alpha \rightarrow 0$  the equilibrium state  $\hat{w}(\hat{F}_1(\mathbf{m}))$  describes uniaxial symmetry breaking of the equilibrium state. In a magnetic with several sublattices, with  $Y_\alpha = 0$ , the Gibbs statistical operator specifies the biaxial nature of the violation of the magnetic symmetry of the equilibrium state.

Two-time lagging Green functions are determined by the equality [1]:

$$G_{ab}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i\theta(t-t') Sp \hat{w}[\hat{a}(\mathbf{x}, t), \hat{b}(\mathbf{x}', t')].$$

Here, the local operators in the Heisenberg representation  $\hat{a}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{a}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t}$ ,  $\hat{b}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{b}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t}$  and the Hamiltonian are definite functionals of the Bose operators of creation and annihilation. As we will see later, the structure of the spontaneous magnetic anisotropy of the Gibbs statistical operator will significantly affect the form of the low-frequency asymptotics of the Green functions. The linear response of a local physical quantity  $\delta a_\xi(\mathbf{x}, t)$  to a weak external disturbance is

$$\delta a_\xi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d^3x' \delta \xi(\mathbf{x}', t') G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t').$$

Here  $\delta \xi(\mathbf{x}, t)$  is the potential of the interaction of the magnetic system with the external field. In the Fourier representation this ratio is written as

$$\delta a_\xi(\mathbf{k}, \omega) = G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) \delta \xi(\mathbf{k}, \omega). \tag{1}$$

In the study of low-frequency asymptotics of Green's functions we do not use the formalism of quantum mechanics. To solve this problem it is sufficient for us to obtain the equations of the dynamics of the magnetics under study in the hydrodynamic limit. The linearized version of these equations connects the deviation of the local physical quantity  $\delta a$  and the potential of the external field  $\delta \xi$  and thus allows us to find the asymptotics of the two-time Green functions in the low-frequency  $\omega \tau_r \ll 1$  and small wave vectors  $kl \ll 1$  range. Here  $\tau_r$  is the time of randomization (the time of establishing the local equilibrium of the magnetic system) and  $l$  are the characteristic spatial scales of change in physical quantities. The full Hamiltonian of the magnetic system in the presence of an external field is of the form  $H(t) = H + V(t)$ . Here  $H = \int d^3x e(\mathbf{x}, \varphi(x', t))$  is the Hamiltonian of the magnetic system, which includes strong exchange interactions. Here  $\varphi(\mathbf{x}', t)$  is a set of dynamic variables describing the magnetic system under study. The energy of interaction of the magnetic system with the external field  $V(t)$  is

$$V(t) = \int d^3x \delta \xi(\mathbf{x}, t) b(\mathbf{x}, t),$$



where  $b(\mathbf{x}, t)$  is the local physical quantity. We believe that the change in the external field is rather slow, so that the characteristic frequency of its change is small compared to  $\tau_r^{-1}$ . In this case, the physical system manages to adapt to the instantaneous values of the field. In the time domain  $t \gg \tau_r$ , the dependence on time of magnitude  $b(\mathbf{x}, t)$  is

$$b(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{t \gg \tau_r} b(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}', t)).$$

For the physical systems studied in this work, the magnetic degrees of freedom  $\varphi(\mathbf{x}', t)$  are the spin vector  $s_\alpha$  and the antiferromagnetism vector  $n_\alpha$ , whose Poisson brackets are well known [11]:

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Here  $\delta(\mathbf{x})$  is the Dirac delta function. The algebra of the Poisson brackets (2) has a Casimir invariant  $s_\alpha^2$ . Extended algebra (2), (3) contains two Casimir invariants:  $s_\alpha n_\alpha$  and  $n_\alpha^2$ . Below, in terms of these invariants, a model of the exchange interaction of a ferrimagnet will be constructed. Formulas (2), (3) allow us to establish the dynamics of uniaxial and biaxial ferrimagnetics:

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k s_{\alpha k} + \eta_{s_\alpha}, \quad \dot{n}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial e}{\partial s_\beta} - \nabla_k \frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta} \right) s_\gamma + \eta_{n_\alpha}. \quad (4)$$

Here  $s_{\alpha k}$  is the spin flux density, which has the form:

$$s_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta} s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial \nabla_k n_\beta} n_\gamma \right).$$

When obtaining the spin flux density we took into account the SO(3) symmetry of the strong exchange interaction:  $\{S_\alpha, H\} = 0$ . Sources due to the external field are determined by the formulas:

$$\eta_{s_\alpha} = \{s_\alpha, V\} = \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial b}{\partial s_\beta} s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial n_\beta} n_\gamma \right), \quad \eta_{n_\alpha} = \{n_\alpha, V\} = \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial b}{\partial s_\beta} n_\gamma. \quad (5)$$

In the used method of "sources" not always external variable fields can be given an obvious physical meaning. The role of a fictitious external field is to remove the local physical quantity of interest from the state of statistical equilibrium. By virtue of the definition of two-time Green's functions, these external fields are not included in the final expressions of the Green's functions.

Consider the equilibrium state of ferrimagnetic materials. The density of the exchange energy has SO(3) symmetry and depends on two vector quantities: the spin density and the antiferromagnetic order parameter

$$e(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = e_0(\mathbf{s}, \mathbf{n}) + e_n(\mathbf{s}, \mathbf{n}, \nabla \mathbf{s}, \nabla \mathbf{n}).$$

The model of the homogeneous part of this energy  $e_0$  is chosen in the following form [12]:

$$e_0(\varphi_1, \varphi_2) = -A\varphi_1^2/2 - C\varphi_2^2/2 + B\varphi_1^4/4 + D\varphi_2^4/4 + E\varphi_1^2\varphi_2^2/2. \quad (6)$$

Energy density arguments  $\varphi_1, \varphi_2$  are related to the Casimir invariants by equalities

$$\varphi_1^2 = (\mathbf{sn})^2 = s_\parallel^2, \quad \varphi_2^2 = s^2 - (\mathbf{sn})^2 = s_\perp^2.$$

As two independent arguments of the homogeneous energy density  $e_0 = e_0(s_\parallel, s_\perp)$  it is convenient to choose the values of the transverse and longitudinal components of the spin with respect to the anisotropy axis  $\mathbf{n}$  [13], which are determined by the equalities  $s_\alpha = n_\alpha s_\parallel + m_\alpha s_\perp$ ,  $s_\alpha n_\alpha = s_\parallel$ ,  $\mathbf{nm} = 0$ ,  $\mathbf{m} = \mathbf{s}_\perp / s_\perp$ . Conditions of extremum and stability

$$\left. \frac{\partial e_0}{\partial s_\perp} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial e_0}{\partial s_\parallel} \right|_0 = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial s_{\perp}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial s_{\parallel}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial s_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial^2 e_0}{\partial s_{\parallel}^2} - \left( \frac{\partial^2 e_0}{\partial s_{\perp} \partial s_{\parallel}} \right)^2 > 0$$

allow us to find the corresponding values of the magnetic degrees of freedom in equilibrium. The heterogeneous density of the exchange energy will be represented in the form of two quadratic forms:

$$e_n = J_{\alpha\beta}(\mathbf{s}, \mathbf{n})(\nabla s_{\alpha})(\nabla s_{\beta})/2 + K_{\alpha\beta}(\mathbf{s}, \mathbf{n})(\nabla n_{\alpha})(\nabla n_{\beta})/2.$$

Due to the transformational properties of spin vectors and antiferromagnetism and exchange energy density relative to time reversal transformations

$$Ts_{\alpha}T^{+} = -s_{\alpha}, \quad T\Delta_{\alpha}T^{+} = -\Delta_{\alpha}, \quad Te_nT^{+} = e_n,$$

for tensor exchange integrals  $\hat{J}$  and  $\hat{K}$  the relations are valid the relations

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = J_{\alpha\beta}(-\mathbf{s}, -\mathbf{n}), \quad K_{\alpha\beta}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = K_{\alpha\beta}(-\mathbf{s}, -\mathbf{n}).$$

From the symmetry conditions

$$\{P_k, e_n\} = \nabla e_n, \quad \{L_i, e_n\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l e_n, \quad \{S_{\alpha}, e_n\} = 0,$$

corresponding to the properties of translational invariance, as well as spatial and spin isotropy, we arrive at the following type of inhomogeneous exchange energy of a ferrimagnet:

$$e_n = J^{(1)}(\nabla s_{\alpha})^2/2 + J^{(3)}(n_{\alpha} \nabla s_{\alpha})^2/2 + K^{(1)}(\nabla n_{\alpha})^2/2. \quad (8)$$

For positive definiteness of a non-uniform exchange energy, the constants of this exchange must be greater than zero:  $J^{(1)} > 0, J^{(3)} > 0, K^{(1)} > 0$ . Using further the form of energy (8), we obtain the linearized equations of dynamics

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{s}_{\alpha} &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( J^{(1)} \Delta \delta \mathfrak{s}_{\beta} s_{\gamma}^0 + J^{(3)} n_{\beta}^0 (n_{\sigma}^0 \Delta \delta \mathfrak{s}_{\sigma}) s_{\gamma}^0 + K^{(1)} \Delta \delta \mathfrak{n}_{\beta} n_{\gamma}^0 \right) + \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial b}{\partial s_{\beta}} s_{\gamma}^0 + \frac{\partial b}{\partial n_{\beta}} n_{\gamma}^0 \right), \\ \delta \mathfrak{n}_{\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_{\gamma}^0 \left( \delta \left( \frac{\partial e_0}{\partial s_{\beta}} \right) - J^{(1)} \Delta \delta \mathfrak{s}_{\beta} + \xi \frac{\partial b}{\partial s_{\beta}} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial e_0}{\partial s_{\beta}} \delta \mathfrak{n}_{\gamma}. \end{aligned} \quad (9)$$

Further, based on them, we obtain the spectra of magnetic excitations and calculate the low-frequency asymptotics of the Green functions of a ferrimagnetic with uniaxial and biaxial anisotropy.

### SPECTRA OF COLLECTIVE EXCITATIONS AND LOW-FREQUENCY ASYMPTOTICS OF GREEN'S FUNCTIONS IN UNIAXIAL FERRIMAGNETICS

Consider magnetic states with uniaxial anisotropy, where in equilibrium  $s_{\alpha}^0 = 0$ . Equations (9) in this case are simplified and have the form:

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{s}_{\alpha} &= -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_{\gamma}^0 \left( K^{(1)} \Delta \delta \mathfrak{n}_{\beta} + \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial b}{\partial n_{\beta}} \right), \\ \delta \mathfrak{n}_{\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_{\gamma}^0 \left( A \delta \mathfrak{s}_{\beta} - J^{(1)} \Delta \delta \mathfrak{s}_{\beta} + \xi \frac{\partial b}{\partial s_{\beta}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

For ferrimagnetics the deviation of a local quantity  $a$  from an equilibrium state is of the form

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial s_{\alpha}} \delta \mathfrak{s}_{\alpha} + \frac{\partial a}{\partial n_{\alpha}} \delta \mathfrak{n}_{\alpha}.$$

From the linearized equations (10), we obtain Fourier-images of the deviation of the spin vector and the antiferromagnetism vector  $\delta s_{\alpha}, \delta n_{\alpha}$  from equilibrium states:

$$\delta n_\alpha = \frac{1}{i\omega} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0 \left( A \delta_\beta + \xi \frac{\partial b}{\partial s_\beta} \right), \quad \delta s_\alpha = \xi D_{\alpha\beta}^{-1} \left( B_{\beta\mu} \frac{\partial b}{\partial s_\mu} + C_{\beta\mu} \frac{\partial b}{\partial n_\mu} \right),$$

where matrices  $\hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$  are determined by formulas

$$B_{\beta\mu} = k^2 K^{(1)} \delta_{\beta\mu}^\perp(\mathbf{n}^0), \quad C_{\beta\mu} = -i\omega \varepsilon_{\beta\mu\nu} n_\nu^0, \quad D_{\beta\mu}(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 \delta_{\beta\mu} - AK^{(1)} k^2 \delta_{\beta\mu}^\perp(\mathbf{n}^0)$$

Using the written formulas, we obtain expressions for the low-frequency asymptotics of the two-time Green's functions of antiferromagnetics with uniaxial anisotropy:

$$G_{s_\alpha s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k^2 K^{(1)} \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)},$$

$$G_{s_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{i\omega \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}, \quad G_{n_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{A \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}.$$

Here are the notation  $\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - k^2 \kappa^2$ ,  $\kappa^2 = K^{(1)} A > 0$  and  $A = 2 \frac{\partial e_0}{\partial s_\perp^2} \Big|_0$ . The expressions given above coincide with

the previously obtained Green's functions of [14]. The above formulas demonstrate a rather simple asymptotic structure of Green functions in uniaxial antiferromagnets. In particular, the relations are true

$$G_{s_\alpha s_\beta}(\mathbf{k}, 0) = -\frac{\delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{A}, \quad G_{s_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, 0) = 0, \quad G_{n_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, 0) = -\frac{\delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{k^2 K^{(1)}},$$

$$G_{s_\alpha s_\beta}(0, \omega) = 0, \quad G_{s_\alpha n_\beta}(0, \omega) = -\frac{i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\omega}, \quad G_{n_\alpha n_\beta}(0, \omega) = \frac{A \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{\omega^2}.$$

### SPECTRA OF COLLECTIVE EXCITATIONS AND LOW-FREQUENCY ASYMPTOTICS OF GREEN'S FUNCTIONS BIAxIAL FERRIMAGNETICS

We now consider the equilibrium states that are characterized by biaxial magnetic anisotropy with the axes  $\mathbf{n}$  and  $\mathbf{m}$ . The conditions of extremum and stability (7) for the energy density model (6) lead to equilibrium states:

- 1) antiferromagnetic:  $s_\parallel = 0, s_\perp = 0$ . The state is stable if  $Q = \frac{\partial^2 e_0}{\partial s_\perp^2} \Big|_0 = -A > 0$ ,  $\frac{\partial^2 e_0}{\partial s_\parallel^2} = -C > 0$ ;
- 2) ferrimagnetic of easy axis type:  $s_\parallel = C/D, s_\perp = 0$ . The state is stable if  $Q = -A + Es_\parallel^2 > 0, C > 0$ ;
- 3) ferrimagnetic of easy plane type:  $s_\parallel = 0, s_\perp = A/B$ . The state is stable if  $Q = -A + 3Bs_\perp^2 > 0$ ,

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial s_\parallel^2} = -C + Es_\perp^2 > 0.$$

The state of a ferrimagnet with magnetic degrees of freedom in equilibrium  $s_\parallel \neq 0, s_\perp \neq 0$  we do not consider in the article. The linearized equations of the dynamics of a magnetic system in an external field, valid near the above three biaxial equilibrium states, in the Fourier representation have the form:

$$i\omega \delta s_\alpha = k^2 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left\{ s_\perp^0 m_\gamma^0 J^{(3)} n_\sigma^0 \delta s_\sigma n_\beta^0 + J^{(1)} s_\gamma^0 \delta s_\beta + K^{(1)} \delta n_\beta n_\gamma^0 \right\} + \delta \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial b}{\partial s_\beta} s_\gamma^0 + \frac{\partial b}{\partial n_\beta} n_\gamma^0 \right),$$

$$i\omega \delta n_\alpha = l_\alpha Q m_\sigma^0 \left\{ \delta s_\sigma - s_\parallel^0 \delta n_\sigma \right\} + \delta \xi \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial b}{\partial s_\beta} n_\gamma^0.$$

Here  $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{l}$ . Next, acting in a similar way, we obtain the expression of the two-time asymptotic behavior of the Green function in terms of the basis Green functions:

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\partial a}{\partial s_\alpha} G_{s_\alpha s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial b}{\partial s_\beta} + \frac{\partial a}{\partial n_\alpha} G_{n_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial b}{\partial n_\beta} + \frac{\partial a}{\partial s_\alpha} G_{s_\alpha n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial b}{\partial n_\beta} + \frac{\partial a}{\partial n_\alpha} G_{n_\alpha s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial b}{\partial s_\beta}. \quad (11)$$

The general structure of the low-frequency asymptotics of the Green's functions can be represented as

$$\begin{aligned}
 G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= D_{\alpha\gamma}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) A_{\beta\delta}(\mathbf{k}, \omega), \\
 G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= -iQ l_\alpha^0 m_\sigma^0 D_{\sigma\beta}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) B_{\beta\beta} / \omega, \\
 G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= D_{\alpha\gamma}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) B_{\beta\beta}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

The notation is entered here:

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= i\omega\delta_{\alpha\beta} + k^2 s_\perp^0 J^{(3)} l_\alpha^0 n_\beta^0 - k^2 J^{(1)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma^0 - ik^2 K^{(1)} Q m_\alpha^0 m_\beta^0 / \omega, \\
 A_{\beta\gamma}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{ik^2 K^{(1)}}{\omega} \delta_{\beta\gamma}^\perp(\mathbf{n}^0) + \frac{k^2 (s_\parallel^0)^2 K^{(1)} Q}{\omega^2} m_{\beta\gamma}^0 + \varepsilon_{\beta\gamma\rho} s_\rho^0, \quad B_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma\rho} n_\rho^0.
 \end{aligned}$$

Let us analyze the Green's functions for the above three states of magnetism and find the explicit dependence of these functions on the wave vector and frequency. For the case of 1) antiferromagnet with biaxial anisotropy, the following form of the basis Green functions is obtained:

$$\begin{aligned}
 G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k^2 K^{(1)}}{\Delta(\mathbf{k}, \omega) \omega^2} (\omega^2 \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0) - k^2 \kappa^2 l_\alpha^0 l_\beta^0), \\
 G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{Q^2 l_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}, \quad G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\omega} + \frac{ik^2 \kappa^2 m_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega) \omega} = -G_{n_\beta, s_\alpha}(\mathbf{k}, \omega).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Here  $\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - k^2 \kappa^2$ . The magnetic system in this state is characterized by the Goldstone spectrum  $\omega = k\kappa$ . Comparing these formulas with the Green's functions of a uniaxial antiferromagnet, we see that the asymptotics of the Green's functions  $G_{s_\alpha, s_\beta}(0, \omega), G_{s_\alpha, n_\beta}(0, \omega)$  coincide. Asymptotics  $G_{n_\alpha, n_\beta}(k, 0), G_{n_\alpha, n_\beta}(0, \omega)$  coincide qualitatively, but they have different anisotropy patterns. The asymptotics of the Green function of an antiferromagnetic with biaxial anisotropy  $G_{s_\alpha, s_\beta}(k, 0)$  can be represented as  $G_{s_\alpha, s_\beta}(k, 0) = G_{s_\alpha, s_\beta}^{(reg)}(k, 0) + G_{s_\alpha, s_\beta}^{(pol)}(k, 0)$ . The regular part coincides with the Green function of a uniaxial antiferromagnet. The pole part has the form  $G_{s_\alpha, s_\beta}^{(pol)}(k, 0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^2} k^2 K^{(1)} l_\alpha^0 l_\beta^0$ . There is also no coincidence of the asymptotic behavior of the Green function  $G_{s_\alpha, n_\beta}(k, 0)$ . For a uniaxial antiferromagnet, this value vanishes, and for a biaxial case it has a pole character  $G_{s_\alpha, n_\beta}(k, 0) = -il_\alpha^0 m_\beta^0 \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega}$ .

The case 2) ferrimagnetic of easy axis type: condition  $\det \hat{D} = 0$  leads to the excitation spectrum  $\omega^2 = k^2 \kappa + k^4 \kappa_\parallel^2$ , here  $\kappa_\parallel = J^{(1)} s_\parallel^0$ . If the exchange integrals of the interaction differ significantly in magnitude, then in the limit of a)  $K^{(1)} \gg J^{(1)}$  we obtain a linear spectrum  $\omega = k\kappa$ . In the other limiting case b)  $K^{(1)} \ll J^{(1)}$  we arrive at a quadratic spectrum  $\omega = k^2 \kappa_\parallel$ . In case a) the Green's basic functions coincide with the formulas of an antiferromagnet with biaxial anisotropy. In case b) these functions are:

$$\begin{aligned}
 G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k^2 \kappa_\parallel \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{\Delta_\parallel(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{i\omega \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\Delta_\parallel(\mathbf{k}, \omega)}, \\
 G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= s_\parallel^0 G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega), \quad G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{Q l_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta_\parallel(\mathbf{k}, \omega)}.
 \end{aligned}$$

Here  $\Delta_\parallel(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - k^4 \kappa_\parallel^2$ . Let us give particular cases of the form of the asymptotics of the Green functions:

$$\begin{aligned}
 G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0) &= -\frac{\delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{n}^0)}{k^2 \kappa_\parallel}, & G_{s_\alpha, n_\beta}(0, \omega) &= -\frac{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\omega}, \\
 G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0) &= \frac{Q l_\alpha^0 l_\beta^0}{k^4 \kappa_\parallel^2}, & G_{n_\alpha, n_\beta}(0, \omega) &= -\frac{Q l_\alpha^0 l_\beta^0}{\omega^2}.
 \end{aligned}$$

We see that the asymptotics of the basis Green's function  $G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0)$  with respect to the wave vector has a non-Bogolyubov character. Note that such a stronger feature of the asymptotic behavior of the Green function  $G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0)$  does not contradict the inequality  $G_{n_\alpha, n_\beta} \geq 1/k^2$  [7]. This theorem sets a restriction on the asymptotic behavior of Green's functions from below for  $k \rightarrow 0$ .

For the case 3) ferrimagnetic of the easy plane type the basis Green functions are found, in which to simplify the calculations we neglected the exchange integral  $J^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k^2 \kappa_\perp n_\alpha^0 m_\beta^0}{\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega)} + i\omega \left( \frac{m_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{l_\alpha^0 m_\beta^0}{\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega)} \right), \\ G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{Q l_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}, \\ G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= k^2 K^{(1)} \left( \frac{m_\alpha^0 m_\beta^0}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{l_\alpha^0 l_\beta^0}{\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega)} \right) - \frac{k^2 \kappa_\perp s_\perp^0 \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{m}^0)}{\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{i(k^4 \kappa_\perp K^{(1)} n_\alpha^0 l_\beta^0 - \omega^2 s_\perp^0 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_\gamma^0)}{\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega) \omega}. \end{aligned} \quad (14)$$

Here  $\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - k^2 \kappa^2$ ,  $\Delta_\perp(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - k^4 \kappa_\perp^2$ ,  $\kappa_\perp = J^{(1)} s_\perp^0$ . Such a magnetic state has two spectra of collective excitations  $\omega = k\kappa$  and  $\omega = k^2 \kappa_\perp$ . We write out a particular form of the asymptotics of the basis Green's functions using (14):

$$\begin{aligned} G_{s_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0) &= -\frac{n_\alpha^0 m_\beta^0}{k^2 \kappa_\perp}, & G_{s_\alpha, n_\beta}(0, \omega) &= -\frac{i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma^0}{\omega}, \\ G_{n_\alpha, n_\beta}(\mathbf{k}, 0) &= -\frac{l_\alpha^0 l_\beta^0}{k^2 K^{(1)}}, & G_{n_\alpha, n_\beta}(0, \omega) &= \frac{Q l_\alpha^0 l_\beta^0}{\omega^2}, & G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{i s_\perp^0 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_\gamma^0}{\omega}. \end{aligned}$$

From (14) it also follows that the asymptotic behavior of the Green function  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega)$  can be represented as two terms  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{s_\alpha, s_\beta}(\mathbf{k}, \omega) = G_{s_\alpha, s_\beta}^{(reg)}(\mathbf{k}, 0) + G_{s_\alpha, s_\beta}^{(pol)}(\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0)$ . The first of these is regular at  $\omega \rightarrow 0$ , and the second term contains a pole feature in frequency:

$$\begin{aligned} G_{s_\alpha, s_\beta}^{(reg)}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{K^{(1)} l_\alpha^0 l_\beta^0}{k^2 \kappa_\perp^2} - \frac{s_\perp^0 \delta_{\alpha\beta}^\perp(\mathbf{m}^0)}{k^2 \kappa_\perp} - \frac{K^{(1)} m_\alpha^0 m_\beta^0}{\kappa^2}, \\ G_{s_\alpha, s_\beta}^{(pol)}(\mathbf{k}, \omega \rightarrow 0) &= -\frac{i K^{(1)} n_\alpha^0 l_\beta^0}{\omega \kappa_\perp}. \end{aligned}$$

In the limit  $s_\perp^0 \rightarrow 0$  the asymptotics of the basis Green's functions (14) coincide with formulas (13) for the antiferromagnetic equilibrium state. A similar limit  $s_\parallel^0 \rightarrow 0$  does not lead to expression (14) to formulas of a biaxial antiferromagnet, since, in obtaining these formulas, we completely neglected the influence of the exchange integral  $K^{(1)}$ .

## CONCLUSIONS

The article considers the problem of the influence of a weak alternating field on the evolution of uniaxial and biaxial ferrimagnets and nonlinear dynamic equations that take into account the properties of the SO(3) symmetry of exchange interactions. On the basis of these equations, the "hydrodynamic" asymptotics of the two-time Green functions are calculated in explicit form with respect to the wave vector and frequency. The presented research results demonstrate the importance of the specific anisotropy of the magnetic system in the description of the collective properties of the studied magnets. An analysis of the asymptotic behavior of the Green function of the type  $G_{n_\alpha, n_\beta}(k, 0) \sim 1/k^4$  in a ferrimagnet with biaxial anisotropy shows that such features can arise in other magnetic states for which the contribution of the zero approximation in gradients to the linearized equation of the order parameter is absent. These words also allow you to know the spectra of the collective magnetic waves, the character of the magnetic anisotropic characteristics of the Grain that give you the ability to design the neutron neutron processes in the magnitudes of the neutrons in magnetics.

## ORCID IDs

Anton Glushchenko  <https://orcid.org/0000-0003-2574-6688>,

Michail Kovalevsky  <https://orcid.org/0000-0002-9224-5288>,

Valentina Matskevych  <https://orcid.org/0000-0001-9368-500X>

## REFERENCES

- [1]. N.N. Bogolyubov and S.V. Tyablikov, DAN USSR, **126**, 53-56 (1959). (in Russian)
- [2]. A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinsky, *Methods of quantum field theory in static physics*, (Fizmatgiz, Moscow, 1962), p. 444. (in Russian)

- [3]. V.G. Bar'yakhtar, V.N. Krivoruchko and D.A. Yablonsky, *Green's functions in the theory of magnetism*, (Naukova Dumka, Kyiv, 1984), p. 336. (in Russian)
- [4]. G.D. Mahan, *Many-particle physics, 2nd Edition*, (Plenum, New York, 1990), p. 1032.
- [5]. A.I. Akhiezer and S.V. Peletminsky, *Methods of statistical mechanics*, (Nauka, Moscow, 1977), p. 338.(in Russian)
- [6]. N.N. Bogolyubov, M.Yu. Kovalevsky, A.M. Kurbatov, S.V. Peletminsky and A.N. Tarasov, *Successes of physical sciences*, **159**(12) 585-620, (1989), doi: 10.3367/UFNr.0159.198912a.0585 (in Russian)
- [7]. N.N. Bogolyubov, *Preprint R-1395 JINR*, (JINR, Dubna, 1963). (in Russian)
- [8]. B.I. Halperin and W.M. Saslow, *Physical Review B*, **16**(5) 2154-2162, (1977).
- [9]. Z.M. Galasiewicz, *Journal of low temperature physics*, **57**(1-2) 123-150, (1984), doi: 10.1007/BF00681519
- [10]. M.Y. Kovalevskii and A.A. Rozhkov, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **216**(1-2) 169-184, (1995), doi: 10.1016/0378-4371(94)00293-3
- [11]. I.E. Dzyaloshinskii and G.E. Volovick, *Annals of Physics*, **125**(1) 67-97, (1980).
- [12]. K. Kaneko, H. Onodera, H. Yamauchi, T. Sakon, M. Motokawa and Y. Yamaguchi, *Physical Review B*, **68**(1) 012401, (2002), doi: 10.1103/PhysRevB.68.012401
- [13]. E.A. Turov, A.V. Kolchanov, V.V. Menshenin, I.F. Mirsaev and V.V. Nikolaev, *Symmetry and physical properties of antiferromagnets*, (Fizmatlit, Moscow, 2001), p. 560.(in Russian)
- [14]. A.A. Isaev, M.Yu. Kovalevsky and S.V. Peletminsky, *Theoretical and Mathematical Physics*, **95**(1) 404-415, (1993), doi: org/10.1007/BF01015894

PACS: 03.65.Pm

## DYNAMICS OF ELECTRON IN TEM WAVE FIELD

 Yuriy Grigoriev<sup>1</sup>,  Andrey Zelinskiy<sup>1</sup>,  Tetiana Malykhina<sup>2</sup>,  
 Valentina Shpagina<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"

<sup>1</sup>Akademichna str., 61108, Kharkiv, Ukraine

<sup>2</sup>Kharkiv V.N. Karazin National University

4, Svobody sq., 61022, Kharkiv, Ukraine

\*E-mail: valentinash0607@gmail.com

Received December 21, 2018; revised January 29, 2019; accepted March 15, 2019

Big amount of works deals with solution of differential equations, associated with electron motion in electromagnetic field, using methods of classical electrodynamics. Solution of equation of an electron motion in TEM wave field is interesting task because this equation is mathematical model of big number of wave processes, which are used for researches of different physical processes. The proposed work dedicated to finding the solution for the equation of an electron motion in TEM wave field in laboratory system of coordinates using the theory of almost periodic functions. The work demonstrates that the projections of electron velocity on coordinate axis conform to the wave equation, and, consequently, could be expanded into generalized Fourier series at any value of the wave and electron parameters. In the present work, the formulas received before for electron velocity projection on coordinate axis, are transformed to a well-behaved form, and are broken down into non-perfect generalized Fourier series. Non-perfect Fourier series for projections of electron velocity on coordinate axis are found by means of plotting of complex series, which are called in the theory of almost periodic functions as "closure of set". For approximate computation of electron velocity it is possible to restrict oneself to finite number of series harmonics. Application of method of electron velocity components transformation into generalized Fourier series made it possible to find in electron velocity components series terms, which do not depend on time and are equal to average magnitudes of the respective values. Electron velocity components present functions of initial magnitudes of electron velocity components, of generalized phase magnitude and of the wave parameters. Initial magnitudes are not preset at random, but calculated from the equations, the type of which is specified in the work. Electron trajectory in coordinate space is calculated by integrating of the respective expressions for velocity projections on coordinate axis. For demonstration purpose the work deals with the example of electron dynamics in wave polarization plane with consideration of only permanent addends and first harmonics of Fourier series for electron velocity projections on coordinate axis. An approximate solution of the equations of electron dynamics in the plane of polarization of the wave is given. Solution for the equation of electron motion in TEM wave field in the laboratory coordinate system using the theory of almost periodic functions made it possible to solve the problem of dynamics of relativistic electron in the field of progressing TEM wave. It made it possible to demonstrate the availability of time-independent summands in the value of the speed of the electron, which moves in TEM wave. A very important circumstance is also the fact, that the theory makes it possible to investigate electron dynamics depending on the original wave intensity.

**KEYWORDS:** wave equation, generalized Fourier series, TEM wave.

## ДИНАМІКА ЕЛЕКТРОНУ В ПОЛІ ТЕМ ХВИЛІ

Ю.М. Григор'єв<sup>1</sup>, А.Ю. Зелінський<sup>1</sup>, Т.В. Малихіна<sup>2</sup>, В.О. Шпагіна<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний науковий центр Харківський фізико-технічний інститут  
вул. Академічна, 1, 61108, Харків, Україна

<sup>2</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна

Розв'язанню диференціальних рівнянь руху електрона в електромагнітному полі методами класичної електродинаміки присвячено велику кількість робіт. Розв'язання рівняння руху електрона у полі ТЕМ хвилі є важливою науковою задачею у зв'язку з тим, що це рівняння є математичною моделлю великої кількості хвильових процесів, котрі виникають під час досліджень різноманітних фізичних явищ. Пропонована робота присвячена отриманню розв'язання рівняння руху електрона у полі ТЕМ хвилі в лабораторній системі координат, із використанням теорії майже періодичних функцій. В роботі показано, що проєкції швидкості електрона на вісі координат відповідають хвильовому рівнянню, і отже, можуть бути розкладені в узагальнені ряди Фур'є при будь-яких значеннях параметрів хвилі електрона. У роботі вирази для проєкцій швидкості електрона на вісі координат приведені до вигляду, зручному для аналізу, й розкладаються у реальні узагальнені ряди Фур'є. Реальні ряди Фур'є для проєкцій швидкості електрона на вісі координат обчислюються за допомогою побудови комплексних рядів, що називаються у теорії майже періодичних функцій "замкненням множини". Для наближеного обчислення швидкості електрона можна обмежитися кінцевим числом гармонік ряду. Застосування методу розкладання компонент швидкості електрона в узагальнені ряди Фур'є дало можливість виявити у компонентах швидкості електрона члени ряду, які не залежать від часу, що дорівнюють середнім значенням відповідних величин. Компоненти швидкості електрона є функціями часу, початкових значень компонент швидкості електрона, початкового значення узагальненої фази, і параметрів хвилі. Початкові значення компонент швидкості електрона не задаються довільно, а обчислюються з рівнянь, вид яких наводиться у даній роботі. Траєкторія електрона в координатному просторі обчислюється інтегруванням відповідних виразів для проєкцій швидкості на вісі координат. В роботі розглянуто приклад динаміки електрона у площині поляризації хвилі з урахуванням тільки постійних доданків і перших гармонік рядів Фур'є для проєкцій швидкості електрона на вісі координат. Наведене наближене розв'язання рівнянь динаміки електрона у площині

поляризації хвилі, що надало можливість отримати формули швидкості електрона у вигляді явних функцій часу. Отримані формули можуть бути використані для дослідження динаміки електрона у полі TEM хвилі як малої, так і великої інтенсивності.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** хвильове рівняння, узагальнені ряди Фур'є, TEM хвиля

#### ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ TEM ВОЛНЫ

Ю.Н. Григорьев<sup>1</sup>, А.Ю. Зелинский<sup>1</sup>, Т.В. Малыгина<sup>2</sup>, В.О. Шпагина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный научный центр Харьковский физико-технический институт

ул. Академическая, 1, 61108, Харьков, Украина

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

майдан Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина

Решению дифференциальных уравнений движения электрона в электромагнитном поле методами классической электродинамики посвящено большое число работ. Решение уравнения движения электрона в поле TEM волны представляет интерес в связи с тем, что это уравнение является математической моделью большого числа волновых процессов, которые встречаются при исследовании различных физических явлений. Предлагаемая работа посвящена получению решения уравнения движения электрона в поле TEM волны в лабораторной системе координат с использованием теории почти периодических функций. В работе показано, что проекции скорости электрона на оси координат удовлетворяют волновому уравнению, и, следовательно, могут быть разложены в обобщенные ряды Фурье при любых значениях параметров волны и электрона. В данной работе выражения для проекций скорости электрона на оси координат приведены к виду, удобному для анализа, и раскладываются в реальные обобщенные ряды Фурье. Реальные ряды Фурье для проекций скорости электрона на оси координат находятся с помощью построения комплексных рядов, называемых в теории почти периодических функций "замыканием множества". Для приближенного вычисления скорости электрона можно ограничиться конечным числом гармоник ряда. Применение метода разложения компонент скорости электрона в обобщенные ряды Фурье дало возможность обнаружить в компонентах скорости электрона члены ряда, не зависящие от времени, равные средним значениям соответствующих величин. Компоненты скорости электрона являются функциями времени, начальных значений компонент скорости электрона, начального значения обобщенной фазы, и параметров волны. Начальные значения компонент скорости электрона не задаются произвольно, а вычисляются из уравнений, вид которых приводится в данной работе. Траектория электрона в координатном пространстве вычисляется интегрированием соответствующих выражений для проекций скорости на оси координат. Для иллюстрации в работе рассмотрен пример динамики электрона в плоскости поляризации волны с учётом только постоянных слагаемых и первых гармоник рядов Фурье для проекций скорости электрона на оси координат. Приведено приближенное решение уравнений динамики электрона в плоскости поляризации волны. Решение уравнения движения электрона в поле TEM волны в лабораторной системе координат с использованием теории почти периодических функций дало возможность получить формулы скорости электрона в виде явных функций времени. Полученные формулы могут быть использованы для исследования динамики электрона в поле TEM волны как малої, так и большой интенсивности.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** волновое уравнение, обобщенные ряды Фурье, TEM волна.

Big amount of works deals with solution of differential equations, associated with electron motion in electromagnetic field, using methods of classical electrodynamics.

Solution of equation of an electron motion in TEM wave field is interesting task because this equation is mathematical model of big number of wave processes, which are used for researches of different physical processes. For example, mechanical fluctuations in elastic strings, fluctuations in radio engineering devices, quartz crystal and etc. Thereby tasks, which can be described by wave equation and also solution of equation of an electron motion in TEM wave field, are actual.

The goal of this work is solving the equation of electron motion in the field of TEM wave using the theory of almost periodic functions in order to obtain exact formulas for electron coordinates and velocities in the form of explicit functions of time.

The usage of almost periodic functions theory gives an opportunity to get precise formulas of electron coordinates and velocity in a form of explicit functions of time. The received formulas are suitable for analysis of electron dynamics in the fields of both low and high field intensity.

In the work [1] the formulas are given for electron velocity projections on coordinate axis in TEM wave field, which are the functions of the wave generalized phase, and were received as a result of integration of dynamics differential equation. In the present work, the formulas received before for electron velocity projection on coordinate axis, are transformed to a well-behaved form, and are broken down into non-perfect generalized Fourier series. Non-perfect Fourier series for projections of electron velocity on coordinate axis are found by means of plotting of complex series, which are called in the theory of almost periodic functions as "closure of set" [2].

Application of method of electron velocity components transformation into generalized Fourier series made it possible to find in electron velocity components series terms, which do not depend on time and are equal to average magnitudes of the respective values.

Electron velocity components present functions of initial magnitudes of electron velocity components, of generalized phase magnitude and of the wave parameters. Initial magnitudes are not preset at random, but calculated from the equations, the type of which is specified in the work.

Electron trajectory in coordinate space is calculated by integrating of the respective expressions for velocity projections on coordinate axes.



**INTEGRATING OF DIFFERENTIAL EQUATION OF ELECTRON MOTION IN WAVE FIELD**

Differential equation of electron motion [3] in electromagnetic field has the following form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{M}] \quad (1)$$

where  $m$  is electron mass and  $e$  is electron charge,  $c$  is the velocity of light,  $t$  is time,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{k}z + \vec{j}y$ ,  $\vec{r}$  is electron radius-vector,  $\vec{E}, \vec{M}$  – electric and magnetic field vector, respectively,  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Let us present electric component of the field in the following form

$$E_z = E \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) + \delta \right] \quad (2)$$

where  $\nu$  is frequency,  $\delta$  is phase of the wave at  $t_0 = 0$  and  $x(t_0) = 0$ ,  $t_0$  is initial time,  $E_z$  is projection of the wave electric component:  $E_x = 0, E_y = 0$ . We will assume, that progressive wave normal has the direction, which coincides with the direction of  $x$  axis. Vector of magnetic field has the following form

$$\vec{M} = [i\vec{E}] \quad (3)$$

Having projected (1) on coordinate axes, we will get:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (W\beta_{zt}) = W(1-\beta_{xt}) E \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) + \delta \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (W\beta_{xt}) = W\beta_{zt} E \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) + \delta \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (W\beta_{yt}) = 0 \quad (6)$$

where  $W$  is electron energy,  $\beta_{xt} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt}$ ,  $\beta_{yt} = \frac{1}{c} \frac{dy}{dt}$ ,  $\beta_{zt} = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt}$

Each of the equations (4–6) could be integrated one time. When taking integral of equation (4) the formula for energy change was used:

$$\frac{dW}{dt} = W \frac{dz}{dt} E \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) + \delta \right]$$

Integrating (4-6), and solving the received expressions with respect to  $\beta_{xt}, \beta_{zt}, \beta_{yt}$ , we will get:

$$\beta_{xt} = \frac{1+F^2+a^2-B^2}{1+F^2+a^2+B^2} \quad (7)$$

$$\beta_{zt} = \frac{2BF}{1+F^2+a^2+B^2} \quad (8)$$

$$\beta_{yt} = \frac{2aB}{1+F^2+a^2+B^2} \quad (9)$$

where

$$a = \frac{\beta_{yt}(t_0)}{1-\beta_{xt}(t_0)} \quad (10)$$

$$F = \frac{WE}{mc(2\pi\nu)} \sin \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x(t)}{c} \right) + \delta \right] + C \quad (11)$$

$$C = \frac{\beta_{zt}(t_0)}{\sqrt{1-\beta(t_0)^2}} - \frac{WE}{mc(2\pi\nu)} \sin \left[ 2\pi\nu \left( t_0 - \frac{x(t_0)}{c} \right) + \delta \right] \quad (12)$$

$$B = \frac{1-\beta_{xt}(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \frac{1-\beta_{xt}(t_0)}{\sqrt{1-\beta^2(t_0)}} \quad (13)$$

One can see from (13), that value  $B$  is motion integral. To integrate equations (7-9), let us introduce generalized phase:

$$s = t - \frac{x(t)}{c} \quad (14)$$

Differentiating (13) with respect to  $t$  and, introducing the following symbols:

$$\frac{1}{c} \frac{dx}{ds} = \beta_{xs}, \frac{1}{c} \frac{dz}{ds} = \beta_{zs}, \frac{1}{c} \frac{dy}{ds} = \beta_{ys},$$

we will get:

$$\beta_{xt} = \frac{\beta_{xs}}{1 + \beta_{xs}}, \beta_{zt} = \frac{\beta_{zs}}{1 + \beta_{xs}}, \beta_{yt} = \frac{\beta_{ys}}{1 + \beta_{xs}} \quad (15)$$

Inserting (14) in (7-9) and, solving the received expressions with respect to  $\beta_{xs}, \beta_{zs}, \beta_{ys}$ , as well as using (10-13), we get:

$$\beta_{ys} = \Lambda_y = \frac{\beta_{yt}(t_0)}{1 - \beta_{xt}(t_0)} \quad (16)$$

$$\beta_{zs} = p \sin[2\pi\nu s + \delta] + \Lambda_z \quad (17)$$

$$\beta_{xs} = -\frac{p^2}{4} \cos[2(2\pi\nu s + \delta)] + p\Lambda_z \sin[2\pi\nu s + \delta] + \Lambda_x \quad (18)$$

where

$$p = \frac{WE}{mc(2\pi\nu)B} \quad (19)$$

$$\Lambda_z = \frac{\beta_{zt}(t_0)}{1 - \beta_{xt}(t_0)} - p \sin[2\pi\nu s_0 + \delta] \quad (20)$$

$$\Lambda_x = \frac{\beta_{xt}(t_0)}{1 - \beta_{xt}(t_0)} + \frac{1}{4} p^2 \cos[2(2\pi\nu s_0 + \delta)] - p\Lambda_z \sin[2\pi\nu s_0 + \delta] \quad (21)$$

Integrating (16-18), we get

$$\frac{1}{c} y(s) = \Lambda_y s + b_y \quad (22)$$

$$\frac{1}{c} z(s) = \psi_z(s) + \Lambda_z s + b_z \quad (23)$$

$$\frac{1}{c} x(s) = \varphi(s) + \Lambda_x s + b_x \quad (24)$$

where

$$\psi_z(s) = -\frac{p}{2\pi\nu} \cos[2\pi\nu s + \delta] \quad (25)$$

$$\varphi(s) = -\frac{p^2}{8(2\pi\nu)} \sin[2(2\pi\nu s + \delta)] - \frac{p\Lambda_z}{(2\pi\nu)} \sin[2\pi\nu s + \delta] \quad (26)$$

$$b_y = \frac{1}{c} y(s_0) - \Lambda_y s_0 \quad (27)$$

$$b_z = \frac{1}{c} z(s_0) + \frac{p}{2\pi\nu} \cos[2\pi\nu s_0 + \delta] - \Lambda_z s_0 \quad (28)$$

$$b_x = \frac{1}{c} x(s_0) + \frac{p^2}{8(2\pi\nu)} \sin[2(2\pi\nu s_0 + \delta)] + \frac{p\Lambda_z}{(2\pi\nu)} \sin[2\pi\nu s_0 + \delta] - \Lambda_x s_0 \quad (29)$$

**EXPANDING OF THE PROJECTIONS OF ELECTRON VELOCITY ON COORDINATE AXES INTO GENERALIZED FOURIER SERIES**

From formulas (7-9) it follows, that  $\beta_{xt}, \beta_{zt}, \beta_{yt}$  are the functions of generalized phase  $s$ . That is why in compliance with [4],  $\beta_{xt}, \beta_{zt}, \beta_{yt}$  satisfy wave equation.

In accordance with [5] the functions, satisfying wave equation, are almost periodic ones and consequently they can be expanded into generalized Fourier series.

In compliance with [2] let us present  $\beta_{xt}$  in terms of series:

$$\beta_{xt} = c_x + \sum_{n=-\infty}^{n=1} c_n e^{i\Omega_n t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{i\Omega_n t} \tag{30}$$

where

$$c_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta_{xt} dt \right] \tag{31}$$

In (31) let us shift from integrating with respect to  $t$  to integrating with respect to  $s$ . Differentiating (13) with respect to  $t$ , we get:

$$\frac{ds}{dt} = 1 - \beta_{xt} \tag{32}$$

Inserting  $\beta_{xt}$  in (32) from (7), we will get:

$$dt = \frac{ds}{2B^2} (1 + F^2 + a^2 + B^2) \tag{33}$$

Inserting  $dt$  in (31), we will get:

$$c_x = \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{1}{2B^2} (1 + F^2 + a^2 - B^2) ds \right] \tag{34}$$

Inserting  $F$  from (11) in (34), we will get:

$$c_x = \frac{1}{2B^2} \left( 1 + \frac{H^2}{2} + C^2 + a^2 - B^2 \right) \tag{35}$$

where

$$H = \frac{WE}{mc(2\pi v)} \tag{36}$$

$c_x$  – is mean value of  $\beta_{xt}$ , which is calculated at  $\Omega_n = 0$ . It corresponds to  $n = 0$ .

Harmonic amplitude is determined by expression:

$$c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \beta_{xt} e^{-i\Omega_n t} dt \right] \tag{37}$$

In (37) let us pass from  $t$  to  $s$ .

$$c_n = \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{1}{2B^2} (1 + F^2 + a^2 - B^2) e^{-i\Omega_n \left( s + \frac{x(s)}{c} \right)} ds \right] \tag{38}$$

Instead of  $\frac{x(s)}{c}$  and using (24), we insert expression

$$\frac{1}{c} x(s) = \varphi(s) + \Lambda_x s + b_x \tag{39}$$

Without breaking generality essentially, we will here after assume  $\delta = 0$ .

Let us expand element of integration for  $c_n$ .

$$c_n = e^{-i\Omega_n b_x} \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} \left( 1 + H^2 \sin^2[2\pi\nu s] + 2HC \sin[2\pi\nu s] + C^2 + a^2 - B^2 \right) \right] \times \quad (40)$$

$$\times e^{-i\Omega_n(\Lambda_x+1)s} \times e^{-i\Omega_n\varphi(s)}$$

We will preset frequency  $\Omega_n$  in the following way:

$$\Omega_n = \frac{2\pi\nu n}{\Lambda_x + 1} (n = \dots, 3, 2, 1, -1, -2 - 3) \quad (41)$$

Value  $e^{-i\Omega_n\varphi(s)}$  will be reported in terms:

$$e^{-i\Omega_n\varphi(s)} = \cos[\Omega_n\varphi(s)] - i \sin[\Omega_n\varphi(s)],$$

and

$c_n = c_n^c - i c_n^s$ , where

$$c_n^c = e^{-i\Omega_n b_x} \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} \left( 1 + H^2 \sin^2[2\pi\nu s] + 2HC \sin[2\pi\nu s] + C^2 + a^2 - B^2 \right) \right] \times \quad (42)$$

$$\times e^{-i2\pi\nu ns} \cos[\Omega_n\varphi(s)]$$

$$c_n^s = e^{-i\Omega_n b_x} \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} \left( 1 + H^2 \sin^2[2\pi\nu s] + 2HC \sin[2\pi\nu s] + C^2 + a^2 - B^2 \right) \right] \times \quad (43)$$

$$\times e^{-i2\pi\nu ns} \sin[\Omega_n\varphi(s)]$$

Non-perfect generalized Fourier series for electron velocity projections on coordinate axis are found by means of plotting of complex series, which in the theory of almost periodic functions are called “closure of set” [2].

Having designated

$$\left( \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^c e^{i2\pi\nu nt} + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} c_n^c e^{i2\pi\nu nt} \right) = F^c; \quad \left( \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n^s e^{i2\pi\nu nt} + \sum_{n=-1}^{n=-\infty} c_n^s e^{i2\pi\nu nt} \right) = F^s \quad (44)$$

and, using the above formulas,  $\beta_{xt}$  could be reported in terms of:

$$\beta_{xt} = \frac{1}{2B^2} \left( 1 + \frac{H^2}{2} + C^2 + a^2 - B^2 \right) + F^c - iF^s \quad (45)$$

$$\beta_{xt}^* = \frac{1}{2B^2} \left( 1 + \frac{H^2}{2} + C^2 + a^2 - B^2 \right) + (F^c)^* + i(F^s)^* \quad (46)$$

$\beta_{xt}$  – complex function,  $\beta_{xt}^*$  is a complex conjugate of function  $\beta_{xt}$

$$(\beta_{xt} + \beta_{xt}^*) = \frac{1}{B^2} \left( 1 + \frac{H^2}{2} + C^2 + a^2 - B^2 \right) + \left( (F^c + (F^c)^*) - iF^s + i(F^s)^* \right) \quad (47)$$

Function  $\beta_{xt}^p = \beta_{xt} + \beta_{xt}^*$  is a valid (attached) solution.

Let us expand valid solution of  $\beta_{xt}$  (attached):

$$\beta_{xt}^p = \beta_{xt} + \beta_{xt}^* .$$

Let us expand

$$c_n^c e^{-i\Omega_n b_x} e^{\frac{i2\pi\nu nt}{1+\Lambda_x}} = c_n^c e^{\frac{i2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x}} ;$$

let us designate  $c_n^c = q_n + ir_n$  and  $c_n^s = \xi_n + i\eta_n$ ; it is possible to demonstrate that,  $c_{-n}^c = q_n - ir_n$  and  $c_{-n}^s = \xi_n - i\eta_n$ , then:

$$F^c = (F^c)^* \text{ and } F^s = (F^s)^* \quad (48)$$

and then in compliance with (46)

$$\beta_{xt}^p = \frac{1}{B^2} \left( 1 + \frac{H^2}{2} + C^2 + a^2 - B^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (q_n \cos[\Omega_n(t-b_x)] - r_n \sin[\Omega_n(t-b_x)]) \quad (49)$$

We will specify formulas for calculation of  $q_n, r_n$ . And for this purpose use formula (42)

$$q_n + ir_n = \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} \left( 1 + H^2 \sin^2[2\pi\nu s] + 2HC \sin[2\pi\nu s] + C^2 + a^2 - B^2 \right) \right] \times e^{-i2\pi\nu ns} \cos[\Omega_n \varphi(s)] \tag{50}$$

It is possible to expand  $\cos[\Omega_n \varphi(s)]$  into infinite series at any values of its argument. From here it follows, that by means of formula (49) longitudinal electron velocity projection could be calculated with any degree of precision.

Using the formulas specified above, we can present real attached solution for  $\beta_{xt}$  in a form of series:

$$\beta_{xt} = 2c_x + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( q_n \cos \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] - r_n \sin \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] \right) \tag{51}$$

Here comes the attached solution for  $\beta_{zt}$ :

$$\beta_{zt} = 2c_z + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( Q_n \cos \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] - R_n \sin \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] \right) \tag{52}$$

where

$$c_z = \frac{1}{B} \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} F(s) ds \right] = \frac{C}{B} \tag{53}$$

$$Q_n + iR_n = \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} 2BF(s) e^{-i2\pi\nu ns} \left( 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\Omega_n \varphi(s))^{2n}}{(2n)!} \right) \right] \tag{54}$$

Analogically, the attached solution is done for  $\beta_{yt}$ .

$$\beta_{yt} = 2c_y + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \xi_n \cos \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] - \eta_n \sin \left[ \frac{2\pi\nu n(t-b_x)}{1+\Lambda_x} \right] \right) \tag{55}$$

$$c_y = \frac{a}{B} \tag{56}$$

$$\xi_n + i\eta_n = \lim_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} \frac{ds}{2B^2} 2Bae^{-i2\pi\nu ns} \left( 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\Omega_n \varphi(s))^{2n}}{(2n)!} \right) \right] \tag{57}$$

The position of electron in coordinate space could be calculated by means of the formulas, received as a result of integrating of (51), (52), (55).

$$\frac{1}{c} x = 2c_x t + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left( q_n \sin[\Omega_n(t-b_x)] + r_n \cos[\Omega_n(t-b_x)] \right), \tag{58}$$

$$\frac{1}{c} z = 2c_z t + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left( Q_n \sin[\Omega_n(t-b_x)] + R_n \cos[\Omega_n(t-b_x)] \right), \tag{59}$$

$$\frac{1}{c} y = 2c_y t + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left( \xi_n \sin[\Omega_n(t-b_x)] + \eta_n \cos[\Omega_n(t-b_x)] \right). \tag{60}$$

For further transformations and calculations let us introduce the following designations:  $2\pi\nu(t-b_x)$ ;

$$t = t_0 + \tau; \Phi = 2\pi\nu\tau + \Phi_0; 2\pi\nu s_0 = g_0,$$

The expression for  $\Phi_0$  could be transformed into the following form:

$$\Phi_0 = (1 + \Lambda_x) g_0 - \frac{H^2}{8B^2} \sin[2g_0] - \frac{H}{B} \Lambda_z \sin[g_0] - \delta(1 + \Lambda_x) + \frac{2\pi\nu}{c} (x(t_0) - x(s_0)). \tag{61}$$

It is possible to demonstrate that  $x(t_0) - x(s_0) = 0$ .

To calculate the values  $\beta_x(t_0)$ ,  $\beta_z(t_0)$ ,  $x(t_0)$ , to it is necessary in equations (51), (52) to set value  $t=t_0$ . We will get three equations:

$$2c_x + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( q_n \cos \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} - r_n \sin \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} \right) - \beta_x(t_0) = 0 \quad (62)$$

$$2c_z + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( Q_n \cos \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} - R_n \sin \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} \right) - \beta_z(t_0) = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{c} x(t_0) = 2c_x t_0 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left( q_n \sin \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} + r_n \cos \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} \right) \quad (64)$$

The following equation should be added to equations (62) – (64):

$$g_0 = 2\pi\nu \left( t_0 - \frac{x(t_0)}{c} \right) \quad (65)$$

First we find  $\beta_x(t_0)$ ,  $\beta_z(t_0)$ , which satisfy equations (62), (63).

Then, using equations (64) and (65) we find:

$$\frac{x(t_0)}{c} = \frac{2\pi\nu Y + 2c_x g_0}{2\pi\nu(1 - 2c_x)} \quad (66)$$

$$t_0 = \frac{g_0 + 2\pi\nu Y}{2\pi\nu(1 - 2c_x)} \quad (67)$$

where

$$Y = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left( q_n \sin \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} + r_n \cos \frac{2\pi\nu n \Phi_0}{1 + \Lambda_x} \right) \quad (68)$$

Left parts of equations (61), (62) depend on  $g_0$ ,  $\beta_x(t_0)$ ,  $\beta_z(t_0)$ ,  $H$ .

Thus,  $\beta_x(t_0)$  and  $\beta_z(t_0)$  should be the solutions of equations (62) and (63).

From the formulas specified above it follows that the sums of the series terms, which are included in the formulas, are proportional to the common factors of different degrees of value  $\left(\frac{H}{B}\right)$ . At magnitude of value  $\left(\frac{H}{B}\right) \ll 1$  during the approximate calculations it is possible to restrict oneself to not a big number of Fourier series components. At the values of  $\beta(t_0)$  of the order of 1 value  $B$  could be of the order of  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta(t_0)^2}}$ . And that is why parameter  $\left(\frac{H}{B}\right)$  could be considered small at high value of external wave intensity. From the above it follows, that smallness of parameter  $\left(\frac{H}{B}\right)$  could be used in a very wide range of the wave and electron parameters.

### APPROXIMATE SOLUTION OF THE EQUATIONS OF ELECTRON DYNAMICS IN WAVE POLARIZATION PLANE

For investigation of electron dynamics in polarization plane we should set the value of constant  $a$  equal to zero ( $a=0$ ), and to make the formulas simpler, we will set  $\delta = 0$ .

We will specify the equations for calculation of  $\beta_{x0}$ ,  $\beta_{z0}$ , received with consideration only of the first harmonic ( $n=1$ ) and average values ( $c_x$ ,  $c_y$ ) under the following conditions: in expansion of  $\cos \varphi_s$  only two terms  $\left( \cos \varphi_s \approx 1 - \frac{\varphi_s^2}{2} \right)$  were kept, and in expansion of  $\sin \phi$  only one term ( $\sin \varphi_s \approx \varphi_s$ ) was kept.

$$2c_x + 2 \left( q_1 \cos \frac{\Phi_0}{1 + \Lambda_x} - r_1 \sin \frac{\Phi_0}{1 + \Lambda_x} - X \right) = 0 \quad (69)$$

$$2c_z + 2 \left( Q_1 \cos \frac{\Phi_0}{1 + \Lambda_x} - R_1 \sin \frac{\Phi_0}{1 + \Lambda_x} - Z \right) = 0 \tag{70}$$

where

$$X = \beta \cos \theta$$

$$Z = \beta \sin \theta$$

$$q_1 = -\frac{c_x \Lambda_z H^3}{32B^3}$$

$$r_1 = \frac{CH}{2B^2} + \frac{CH^5}{512B^6(1 + \Lambda_x)^2} + \frac{3CH^3 \Lambda_z^2}{16B^4(1 + \Lambda_x)^2}$$

$$Q_1 = \frac{1}{B} \left( -\frac{CH^3 \Lambda_z}{32B^3(1 + \Lambda_x)^2} \right)$$

$$R_1 = \frac{1}{B} \left( -\frac{H}{2} + \frac{H^5}{512B^4(1 + \Lambda_x)^2} + \frac{3H^3 \Lambda_z^2}{16B^2(1 + \Lambda_x)^2} \right)$$

Left parts of equations (69) and (70) are the functions  $\beta$  and  $\theta$ .

Approximate solutions of the equations were found by breaking down equations (69), (70) into series with respect to  $\beta$  and  $\alpha$ , assuming  $H \ll 1$ ;  $\beta \ll 1$ ;  $\alpha < 1$ , where  $\theta = \pi - \alpha$  or  $\theta = \alpha$ , distribution of  $\beta$  and  $\alpha$  was investigated, depending on the wave and electron parameters, in the direction opposite to the direction of the wave propagation.

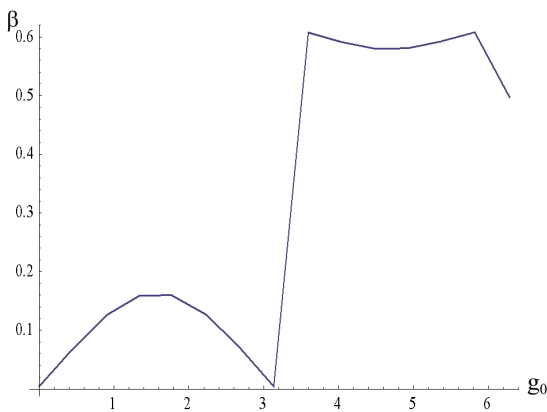


Figure 1. Dependence of initial electron velocity on initial generalized phase value

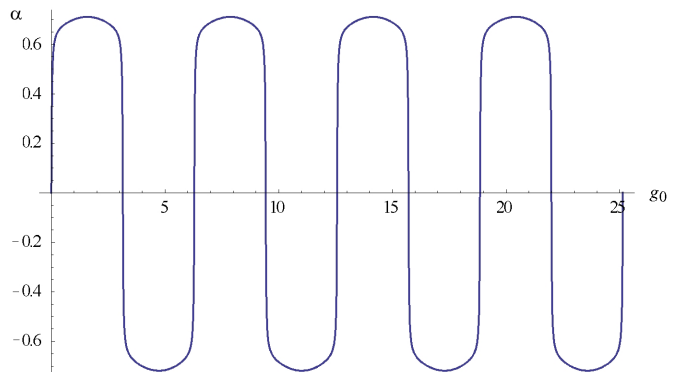


Figure 2. Dependence of electron velocity vector angle to wave reverse direction from generalized phase initial value





Figure 1 presents the dependences of  $\beta$  on the value of  $g_0$ , at the initial time moment  $t_0$ , and which pertain to the case of electron moving in the direction opposite to the direction of wave propagation.

On Figure 2 one can see the beginning of two-electron beams formation, deflected from direction  $\theta = \pi$ . One beam is moving towards  $(\pi - \alpha)$ , and the other one is moving in the direction  $(\pi + \alpha)$ . Appearance of the two beams depends on the value of different intervals of  $g_0$ , where the electrons were located at the initial moment of time.

### CONCLUSION

Application of the theory of almost periodic functions made it possible to solve the problem of dynamics of relativistic electron in the field of progressing TEM wave. It made it possible to demonstrate the availability of time-independent summands in the value of the speed of the electron, which moves in TEM wave. In progressing wave the availability of the electrons moving at high speed in the direction opposite to the direction of the wave propagation was detected. Within the framework of quantum electrodynamics this effect is explained by dispersion of electrons and photons. A very important circumstance is also the fact, that the theory makes it possible to investigate electron dynamics depending on the original wave intensity.

**ORCID IDs**

Yuriy Grigoriev  <https://orcid.org/0000-0002-1383-5758>, Andrey Zelinskiy  <https://orcid.org/0000-0002-4110-8523>,  
Tetiana Malykhina  <https://orcid.org/0000-0003-0035-2367>, Valentina Shpagina  <https://orcid.org/0000-0002-6202-7474>

**REFERENCES**

- [1]. Yu.N. Grigoriev, I.V. Drebot, O.D. Zvonaryova and A.Yu. Zelinsky, VANT, **6**, 150-153 (2005).
- [2]. G. Bor, *Almost periodic functions*, (Editorial URSS, Moscow, 2009), 128 p. (in Russian)
- [3]. H.A. Avetissian, *Relativistic Nonlinear Electrodynamics*, (2nd ed.), (Springer International Publishing, Switzerland, 2016) Vol 88, pp. 463-499, doi: 10.1007/978-3-319-26384-7\_1.
- [4]. U. Rehmann, *Encyclopedia of Mathematics*, (Springer, 2018), Retrieved from <http://www.encyclopediaofmath.org>.
- [5]. C.F. Muckenhoupt, J. Math. Phys. Massachusetts Inst. Technology, **13**(3), 17-22 (1929).



PACS: 03.75.Kk, 03.75.Mn, 03.75.Lm

**MODULATION INSTABILITY IN TWO COMPONENT BOSE-EINSTEIN CONDENSATE WITH DISSIPATION****Anatoly Ivashin\*, Elena Marinenko***National Science Centre "Kharkov institute of physics and technology"  
Akademichna str., 61108, Kharkiv, Ukraine**\*E-mail: ivashin@kipt.kharkov.ua*

Received November 13, 2018; revised February 4, 2019; accepted March 25, 2018

In this paper, we consider the effect of dissipation on the stability of relatively small perturbations of a binary mixture of a Bose – Einstein condensate. Using the introduction of a dissipative function, the Gross-Pitaevskii equations for a two-component system are obtained taking into account dissipation. The influence of dissipative processes on the development of modulation instability in a spatially homogeneous two-component Bose-Einstein condensate is investigated. In contrast to the one-component Bose-Einstein condensate, where modulation instability occurs only with a negative interaction constant, in a two-component Bose-Einstein condensate the conditions for the occurrence of modulation instability significantly depend on the signs and magnitudes of the constant interactions between particles. The paper considers cases when the signs of constant interaction of particles of the same kind are the same and when they are opposite. In the first case, for the occurrence of instability, a certain condition must be satisfied for the magnitudes of the interaction constant, and in the second case, the instability region arises independently of the magnitudes of the interaction constant. In the approximation linear in the dissipation coefficient, the dependences of the values of the growth increment of oscillations and the wave number, at which the increment reaches the maximum value, are obtained, on the dissipative coefficient. It is shown that in this approximation the region of wave numbers at which instability occurs, and the value of the maximum growth increment does not change when taking into account dissipation. The effect of dissipation on these characteristics should be manifested when taking into account corrections that are quadratic in terms of the dissipation coefficient. In the region of wave numbers, where the system remains stable, the damping decrements of oscillations are calculated and it is shown that in this case, in the long-wavelength limit, the oscillation frequency linearly depends on the wave vector, as in the case of single-component condensate.

**KEY WORDS:** Bose Einstein two-component condensate, Gross-Pitaevskii equations, modulation instability**МОДУЛЯЦІЙНА НЕСТІЙКІСТЬ У ДВОКОМПОНЕНТНОМУ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНІВСЬКОМУ КОНДЕНСАТІ З ДИСИПАЦІЄЮ****А.П. Івашин, О.Д. Маріненко***Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут"  
61108, м. Харків, вул. Академічна, 1*

В даній роботі розглядається вплив дисипації на стійкість відносно малих збуджень бінарної суміші бозе-ейнштейнівського конденсату. За допомогою введення дисипативної функції отримані рівняння Гросса – Пітаєвського для двокомпонентної системи з урахуванням дисипації. Досліджено вплив дисипативних процесів на розвиток модуляційної нестійкості у просторово-однорідному двокомпонентному бозе-ейнштейнівському конденсаті. На відміну від однокомпонентного бозе-ейнштейнівського конденсату, де модуляційна нестійкість виникає тільки при від'ємній константі взаємодії, в двокомпонентному бозе-ейнштейнівському конденсаті умови виникнення модуляційної нестійкості суттєво залежать від знаків і величин постійних взаємодій між частинками. В роботі розглянуті випадки, коли знаки постійних взаємодій частинок одного сорту однакові і коли протилежні. В першому випадку для виникнення нестійкості повинна виконуватись певна умова на співвідношення між величинами постійних взаємодій, а в другому випадку область нестійкості виникає незалежно від величини постійних взаємодій. В лінійному по коефіцієнту дисипації наближенні знайдені залежності величин інкремента наростання коливач і хвильового числа, при якому інкремент досягає максимального значення, від величини дисипативного коефіцієнта. Показано, що в цьому наближенні область хвильових чисел, при яких виникає нестійкість, і величина максимального інкремента наростання при урахуванні дисипації не змінюється. Вплив дисипації на ці характеристики повинен проявлятися при урахуванні квадратичних по коефіцієнту дисипації поправок. В області хвильових чисел, де система залишається стійкою, обчислені декременти затухання коливач і показано, що в цьому випадку, в довгохвильовому наближенні, частота коливач лінійно залежить від хвильового вектора, як і в разі однокомпонентного конденсату.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** бозе - ейнштейнівській двокомпонентний конденсат, рівняння Гросса - Пітаєвського, модуляційна нестійкість**МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ С ДИСПАЦИЕЙ****А.П. Ивашин, Е.Д. Мариненко***Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"  
61108, г. Харьков, ул. Академическая, 1*

В настоящей работе рассматривается влияние диссипации на устойчивость относительно малых возмущений бинарной смеси бозе-ейнштейновского конденсата. С помощью введения диссипативной функции получены уравнения Гросса-Питаевского для двухкомпонентной системы с учётом диссипации. Исследовано влияние диссипативных процессов на

развитие модуляционной неустойчивости в пространственно-однородном двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате. В отличие от однокомпонентного бозе-эйнштейновского конденсата, где модуляционная неустойчивость возникает только при отрицательной константе взаимодействия, в двухкомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате условия возникновения модуляционной неустойчивости существенно зависят от знаков и величин постоянных взаимодействия между частицами. В работе рассмотрены случаи, когда знаки постоянных взаимодействия частиц одного сорта одинаковы и когда противоположны. В первом случае для возникновения неустойчивости должно выполняться определенное условие на величины постоянных взаимодействия, а во втором случае область неустойчивости возникает независимо от величин постоянных взаимодействия. В линейном по коэффициенту диссипации приближении получены зависимости величин инкремента нарастания колебаний и волнового числа, при котором инкремент достигает максимального значения, от величины диссипативного коэффициента. Показано, что в этом приближении область волновых чисел, при которых возникает неустойчивость, и величина максимального инкремента нарастания при учёте диссипации не меняется. Влияние диссипации на эти характеристики должно проявляться при учёте квадратичных по коэффициенту диссипации поправок. В области волновых чисел, где система остаётся устойчивой, вычислены декременты затухания колебаний и показано, что в этом случае, в длинноволновом пределе, частота колебаний линейно зависит от волнового вектора, как и в случае однокомпонентного конденсата.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** бозе-эйнштейновский двухкомпонентный конденсат, уравнения Гросса-Питаевского, модуляционная неустойчивость

Атомарный бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) это перспективный объект для изучения модуляционной неустойчивости (МН), приводящей к формированию в однородной среде доменных структур, темных и светлых солитонов, квантовых вихрей при стремлении системы к равновесию [1-3]. Модуляционная неустойчивость это общее явление для нелинейных уравнений, в которых слабые пространственные возмущения в определенном диапазоне волн растут экспоненциально в цепочку локализованных волн в результате взаимодействия нелинейности и дисперсии [4,5].

В БЭК интерес к модуляционной неустойчивости был вызван экспериментальным наблюдением динамики коллапса и генерацией цепочки солитонов [5,6]. В однокомпонентном БЭК с отрицательной константой связи экспериментально наблюдались множественные чередующиеся долгоживущие домены [7]. Многие теоретические работы были посвящены изучению формирования структур, вызванных МН [8,9].

Двухкомпонентные БЭК представляют собой более богатую систему для изучения МН, и существенно отличаются от однокомпонентного случая, где МН возникает только при отрицательной константе связи между частицами конденсата. Впервые МН в двухкомпонентных БЭК обсуждалась в работе [10]. Первые экспериментальные работы проводились в системах положительной константой межатомного взаимодействия. В теоретических работах [11-14], в рамках уравнения Гросса-Питаевского (ГП), изучены условия возникновения МН при различных наборах параметров, характеризующих двухкомпонентный конденсат. Были рассмотрены случаи, как с положительными, так и с отрицательными межатомными взаимодействиями внутри компонент и между компонентами.

Уравнение ГП, хорошо описывающее физические процессы в БЭК при нулевой температуре, так же хорошо описывает процессы в этих системах вплоть до  $0.5 T_c$ . Однако учет диссипации в таких системах, как правило, не производился, т.к. предполагалось, что при низких температурах динамика полностью определяется частицами, находящимися в конденсате. Но при отличной от нуля температуре уже присутствуют процессы с диссипацией энергии, обусловленные взаимодействием конденсатных частиц с частицами вне конденсата. К тому же, надконденсатные частицы образуются не только за счет температурных эффектов, но и из-за истощения конденсата, обусловленного межчастичным взаимодействием. Поскольку обычное уравнение ГП не описывает диссипативные процессы, необходимо либо модифицировать его, либо рассматривать совместно динамические уравнения для конденсата и надконденсатных квазичастиц. При выводе уравнений ГП мы будем следовать работе [15]. Целью данной статьи является учет вклада диссипации в нелинейную динамику конденсата, а именно, нахождение максимального инкремента колебаний МН и определение области волновых векторов, при которых МН существует. При получении уравнения ГП мы вводим в исходный лагранжиан диссипативную функцию. Далее анализируем динамику волновых процессов и условия возникновения МН с учетом диссипативных процессов. В статье система уравнений ГП для двухкомпонентного БЭК, представлена в гидродинамическом виде. В [15] это позволило лучше прояснить смысл введенного диссипативного коэффициента  $\gamma$ . Получен спектр возбуждений при наличии диссипации в системе и показано, как он зависит от знаков констант связи. В частности, при положительном значении постоянных взаимодействия в каждой компоненте, могут существовать как затухающие колебания, так и возникать модуляционная неустойчивость. Когда в одной из компонент постоянная взаимодействия отрицательна, а в другой – положительна, условия для развития МН, приведенные в [16], перестают быть необходимыми. В обоих случаях мы находим максимальный инкремент и определяем границы неустойчивости в пространстве волновых чисел.

В первом разделе работы получена система уравнений Гросса-Питаевского для двухкомпонентного БЭК с учетом диссипации. Во втором разделе уравнения ГП представлены в гидродинамической форме и, в предположении малости возбуждений и слабой диссипации, получено дисперсионное уравнение. В третьем

разделе исследованы решения дисперсионного уравнения и определены декременты затухания, обусловленные наличием диссипации в системе. В четвертом разделе дан анализ полученного спектра при условии развития МН, рассмотрены случаи, когда положительны обе константы взаимодействия, в первой и второй компоненте, а также, когда во второй компоненте константа взаимодействия отрицательна. Найден максимальный инкремент колебаний, определены границы области МН и найдены соответствующие граничные волновые вектора. В заключении представлены выводы.

### ПОЛУЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ

Диссипативные процессы в двухкомпонентном БЭК, состоящем из частиц двух сортов атомов с массами  $m_1, m_2$  и плотностями  $n_1, n_2$  можно учесть феноменологически в рамках лагранжева формализма с помощью введения диссипативной функции [15]. В этом случае уравнение Эйлера-Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}_k} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_k} + \nabla \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla \psi_k} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}_k} \quad (1)$$

здесь плотность функции Лагранжа  $\Lambda$  имеет вид:

$$\Lambda = \sum_k \left[ i \frac{\hbar}{2} (\dot{\psi}_k^* \dot{\psi}_k - \dot{\psi}_k \dot{\psi}_k^*) - \frac{\hbar^2}{2m_k} |\nabla \psi_k|^2 - [V_k(\mathbf{r}) - \mu_k] |\psi_k|^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} |\psi_i|^2 |\psi_k|^2 \quad (2)$$

где индексы  $i, k = 1, 2$  используются здесь для обозначения компонент конденсата.

Квадратичная по скорости диссипативная функция  $D$  может быть записана в виде [15]

$$D = \hbar \sum_{i,k} \gamma_{ik} \dot{\psi}_i^* \dot{\psi}_k \quad (3)$$

где  $\gamma_{ik}$  - безразмерные диссипативные коэффициенты, причем  $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}^*$ .

В комплексных функциях можно выделить модули  $f_i$  и фазы  $\varphi_i$ , записав их в виде  $\psi_i(\mathbf{r}, t) = f_i(\mathbf{r}, t) \exp[i\varphi_i(\mathbf{r}, t)]$ . Тогда плотности числа частиц  $n_i(\mathbf{r}, t)$  и скорости  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$  каждой компоненты выражаются через модуль и фазу

$$n_i(\mathbf{r}, t) = f_i^2(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m_i} \nabla \varphi_i(\mathbf{r}, t). \quad (4)$$

В пространственно-однородном состоянии химические потенциалы  $\mu_1, \mu_2$  связаны с равновесными плотностями [16]

$$\mu_1 = g_1 n_{10} + g_{12} n_{20}, \quad \mu_2 = g_2 n_{20} + g_{21} n_{10}. \quad (5)$$

Уравнение (1) для Бозе-Эйнштейновского конденсата приводит к уравнения Гросса - Питаевского для макроскопических волновых функций  $\psi_1(\mathbf{r}, t), \psi_2(\mathbf{r}, t)$  [16]

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\psi}_1(\mathbf{r}, t) - \hbar \gamma_1 \dot{\psi}_1(\mathbf{r}, t) &= - \frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta \psi_1(\mathbf{r}, t) + g_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) |\psi_1(\mathbf{r}, t)|^2 + g_{12} \psi_1(\mathbf{r}, t) |\psi_2(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu_1 \psi_1(\mathbf{r}, t), \\ i\hbar \dot{\psi}_2(\mathbf{r}, t) - \hbar \gamma_2 \dot{\psi}_2(\mathbf{r}, t) &= - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta \psi_2(\mathbf{r}, t) + g_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) |\psi_2(\mathbf{r}, t)|^2 + g_{21} \psi_2(\mathbf{r}, t) |\psi_1(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu_2 \psi_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (6) взаимодействие между компонентами конденсата осуществляется посредством их плотностей  $|\psi_k(\mathbf{r}, t)|^2$ . Мы положили  $\gamma_{12} = 0$ , исключив, таким образом, взаимное влияние компонент конденсата через диссипацию и существенно упростив в дальнейшем решение полученной системы уравнений.

Выделим в уравнениях (6) реальную и мнимую части, совершив в них предварительно переход от функций  $\psi_i$  к функциям  $f_i$  и  $\varphi_i$ . Тогда система уравнений (6) примет вид

$$\begin{aligned} f_1 \dot{\varphi}_1 + \gamma_1 \dot{f}_1 &= (\hbar / 2m_1)(\Delta f_1 - f_1(\nabla \varphi_1)^2) - (1/\hbar)(g_{11}f_1 f_1^2 + g_{12}f_1 f_2^2) + (1/\hbar)f_1 \mu_1 \\ f_2 \dot{\varphi}_2 + \gamma_2 \dot{f}_2 &= (\hbar / 2m_2)(\Delta f_2 - f_2(\nabla \varphi_2)^2) - (1/\hbar)(g_{22}f_2 f_2^2 + g_{21}f_2 f_1^2) + (1/\hbar)f_2 \mu_2 \\ \hbar \dot{f}_1 - \hbar \gamma_1 f_1 \dot{\varphi}_1 &= -(\hbar^2 / 2m_1)(2\nabla f_1 \nabla \varphi_1 + f_1 \Delta \varphi_1) \\ \hbar \dot{f}_2 - \hbar \gamma_2 f_2 \dot{\varphi}_2 &= -(\hbar^2 / 2m_2)(2\nabla f_2 \nabla \varphi_2 + f_2 \Delta \varphi_2) \end{aligned} \quad (7)$$

Мы получили систему уравнений для четырех неизвестных величин  $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ , которая зависит от девяти параметров: от масс двух компонент конденсата  $m_1$  и  $m_2$ , трех констант связи  $g_1, g_2, g_{12}$ , двух химических потенциалов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , и двух коэффициентов диссипации  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . В однокомпонентном конденсате число параметров равно четырем. Таким образом, нелинейная динамика в двухкомпонентном случае определяется большим числом параметров. Это приводит к большему разнообразию физических явлений в двухкомпонентных системах с БЭК по сравнению с однокомпонентными системами.

### ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО И ПОЛУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

В соответствии с (4) систему уравнений (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nabla \dot{n}_1 + \nabla(\nabla \cdot (n_1 \mathbf{v}_1)) &= 2\gamma_1 n_1 m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 / \hbar \\ \nabla \dot{n}_2 + \nabla(\nabla \cdot (n_2 \mathbf{v}_2)) &= 2\gamma_2 n_2 m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 / \hbar \\ m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 + (\hbar \gamma_1 / (2n_1)) \nabla \dot{n}_1 &= -\nabla \tilde{\mu}_1 \\ m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 + (\hbar \gamma_2 / (2n_2)) \nabla \dot{n}_2 &= -\nabla \tilde{\mu}_2 \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tilde{\mu}_1 = g_{11}n_1 + g_{12}n_2 - (\hbar^2 / 2m_1)\Delta\sqrt{n_1}/\sqrt{n_1}$  и  $\tilde{\mu}_2 = g_{22}n_2 + g_{21}n_1 - (\hbar^2 / 2m_2)\Delta\sqrt{n_2}/\sqrt{n_2}$  - химические потенциалы для первой и второй компоненты конденсата соответственно с учетом квантового давления. При переходе к гидродинамическому виду уравнений мы пренебрегли квадратичными членами, пропорциональными  $(\nabla \varphi_i)^2$ .

В полученной системе гидродинамических уравнений для двухкомпонентного БЭК (8), первые два уравнения представляют собой модифицированные уравнения непрерывности для каждой компоненты конденсата соответственно, а два оставшихся, это уравнения Эйлера с учетом диссипации.

Положим в (8)  $n_i = n_{i0} + \delta n_i$  и  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \delta \mathbf{v}_i$ , где плотности  $n_{i0}$  и скорости  $\mathbf{v}_{i0}$  соответствуют основному состоянию конденсата, а  $\delta n_i$  и  $\delta \mathbf{v}_i$  - малые возмущения основного состояния конденсата, зависящие от времени и пространственной координаты  $\delta n_i = \delta n_i(\mathbf{r}, t)$ ,  $\delta \mathbf{v}_i = \delta \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t)$ . Считая, что исходно конденсаты покоятся, величину  $\mathbf{v}_{i0}$  полагаем равной нулю, а величину  $\delta \mathbf{v}_i$  будем писать в виде  $\mathbf{v}_i$ , помня, что она одного порядка малости с  $\delta n_i$ . Линеаризуя систему (8) получим

$$\begin{aligned} \nabla \delta \dot{n}_1 + \nabla(\nabla \cdot (n_{10} \mathbf{v}_1)) &= 2\gamma_1 n_{10} m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 / \hbar \\ \nabla \delta \dot{n}_2 + \nabla(\nabla \cdot (n_{20} \mathbf{v}_2)) &= 2\gamma_2 n_{20} m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 / \hbar \\ m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 + (\hbar \gamma_1 / (2n_{10})) \nabla \delta \dot{n}_1 &= -\nabla \delta \tilde{\mu}_1 \\ m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 + (\hbar \gamma_2 / (2n_{20})) \nabla \delta \dot{n}_2 &= -\nabla \delta \tilde{\mu}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\delta \tilde{\mu}_1 = g_{11}\delta n_1 + g_{12}\delta n_2 - (\hbar^2 / (4m_1 n_{10}))\Delta\delta n_1$  и  $\delta \tilde{\mu}_2 = g_{22}\delta n_2 + g_{12}\delta n_1 - (\hbar^2 / (4m_2 n_{20}))\Delta\delta n_2$ .

Будем искать решение системы уравнений (9) в виде

$$\delta n, \mathbf{v} \sim e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (10)$$

В этом случае система уравнений относительно  $\delta n_1, \delta n_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  приобретает вид

$$\begin{aligned}
 \omega \mathbf{k} \delta n_1 + (2n_{10} m_1 / \hbar^2)(i\hbar \omega \gamma_1 - \varepsilon_1^0) \mathbf{v}_1 &= 0 \\
 \omega \mathbf{k} \delta n_2 + (2n_{20} m_2 / \hbar^2)(i\hbar \omega \gamma_2 - \varepsilon_2^0) \mathbf{v}_2 &= 0 \\
 (i\mathbf{k} / 2n_{10})(2g_1 n_{10} + \varepsilon_1^0 - i\hbar \omega \gamma_1) \delta n_1 + i\mathbf{k} g_{12} \delta n_2 - i\omega m_1 \mathbf{v}_1 &= 0 \\
 i\mathbf{k} g_{12} \delta n_1 + (i\mathbf{k} / 2n_{20})(2g_2 n_{20} + \varepsilon_2^0 - i\hbar \omega \gamma_2) \delta n_2 - i\omega m_2 \mathbf{v}_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\varepsilon_i^0 = (\hbar k)^2 / (2m_i)$ .

Приравнявая детерминант системы (11) нулю получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
 (\hbar \omega)^4 + 2i(\hbar \omega)^3 \{ \gamma_1 (n_{10} g_1 + \varepsilon_1^0) + \gamma_2 (n_{20} g_2 + \varepsilon_2^0) \} - (\hbar \omega)^2 \{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \} + \\
 + 2i(\hbar \omega) \{ 2n_{10} n_{20} g_{12}^2 (\varepsilon_1^0 \gamma_2 + \varepsilon_2^0 \gamma_1) - \gamma_1 \varepsilon_2^2 (g_1 n_{10} + \varepsilon_1^0) - \gamma_2 \varepsilon_1^2 (g_2 n_{20} + \varepsilon_2^0) \} + \{ \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - 4n_{10} n_{20} g_{12}^2 \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 \} = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь введено обозначение  $\varepsilon_i^2 = (2g_i n_{i0} + \varepsilon_i^0) \varepsilon_i^0$ . Мы получили уравнение четвертого порядка относительно  $\hbar \omega$  с комплексными коэффициентами при линейном и кубическом члене. Решение этого уравнения будем искать, используя малость диссипативных коэффициентов  $\gamma_1, \gamma_2$ .

### РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Перепишем уравнение (12) в виде

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{13}$$

где  $x \equiv \hbar \omega$ , а коэффициенты  $a, b, c, d$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 a &= 2i \{ \gamma_1 (n_{10} g_1 + \varepsilon_1^0) + \gamma_2 (n_{20} g_2 + \varepsilon_2^0) \} \\
 b &= -(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \\
 c &= 2i \{ 2n_{10} n_{20} g_{12}^2 (\varepsilon_1^0 \gamma_2 + \varepsilon_2^0 \gamma_1) - \gamma_1 \varepsilon_2^2 (g_1 n_{10} + \varepsilon_1^0) - \gamma_2 \varepsilon_1^2 (g_2 n_{20} + \varepsilon_2^0) \} \\
 d &= \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - 4n_{10} n_{20} g_{12}^2 \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Из вида коэффициентов (14) следует, что знак межкомпонентного взаимодействия не влияет спектр колебаний в двухкомпонентном БЭК. Будем искать решение уравнения (13) в линейном по коэффициенту диссипации  $\gamma$  приближении (как показано в [15], для атомарных конденсатов с плотностью числа частиц  $n_0 \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$  диссипативный коэффициент  $\gamma \approx 10^{-4}$ ). Поскольку коэффициенты  $a$  и  $c$  линейны по  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , ищем решение в виде

$$x = x_0 + \gamma_1 A + \gamma_2 B, \tag{15}$$

где  $x_0$  - решение дисперсионного уравнения (11) в отсутствие диссипации

$$x_0^4 + bx_0^2 + d = 0, \tag{16}$$

а  $A$  и  $B$  искомые константы, ( $x_0 \equiv \hbar \omega_0$ ).

Решения в отсутствие диссипации известны [16] и имеют вид

$$(\hbar \omega_0^\pm)^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{2} \right)^2 + 4n_{10} n_{20} g_{12}^2 \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0}. \tag{17}$$

В отсутствие диссипации в двухкомпонентном конденсате имеются две ветви колебаний  $\omega_0^+$  и  $\omega_0^-$ , которые соответствуют разным знакам перед корнем. При отсутствии взаимодействия между конденсатами ( $g_{12} = 0$ ), из (17) следует

$$(\hbar\omega_0^+)^2 = \varepsilon_1^2 = (2g_1n_{10} + \varepsilon_1^0)\varepsilon_1^0 \text{ и } (\hbar\omega_0^-)^2 = \varepsilon_2^2 = (2g_2n_{20} + \varepsilon_2^0)\varepsilon_2^0. \quad (18)$$

Это хорошо известный результат, полученный Боголюбовым для однокомпонентного конденсата [16]. В случае действительных частот,  $(\hbar\omega_0^\pm)^2 > 0$ , при соотношении параметров  $g_1g_2 > (g_{12})^2$  в (17), система будет устойчива, и в ней будут существовать две ветви колебаний с частотами  $\omega_0^\pm$ . Анализ устойчивости системы относительно малых возмущений в случае, когда соотношение между параметрами  $g_1g_2 < (g_{12})^2$ , приводит, согласно (17), к наличию модуляционной неустойчивости,  $(\hbar\omega_0^\pm)^2 < 0$  [17].

Учтем наличие диссипации в системе. Подставляя выражение  $x = x_0 + \gamma_1A + \gamma_2B$  в уравнение (13) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  найдем коэффициенты  $A$  и  $B$

$$A = -\frac{i(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)(\hbar\omega_0)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^2(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)}{2(\hbar\omega_0)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$$

$$B = -\frac{i(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)(\hbar\omega_0)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^2(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)}{2(\hbar\omega_0)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}. \quad (19)$$

В результате получим решение уравнения (13) в линейном по параметрам  $\gamma_1, \gamma_2$  приближении

$$(\hbar\omega^\pm) = (\hbar\omega_0^\pm) - \frac{i\gamma_1(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)(\hbar\omega_0^\pm)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^2(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)}{2(\hbar\omega_0^\pm)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} - \frac{i\gamma_2(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)(\hbar\omega_0^\pm)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^2(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)}{2(\hbar\omega_0^\pm)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}. \quad (20)$$

где  $\hbar\omega_0^+$  и  $\hbar\omega_0^-$  соответствует 1-ой, и 2-ой ветви колебаний из (17).

В случае действительных частот, т.е. при  $(\hbar\omega_0^\pm)^2 > 0$ , система устойчива, и в ней существуют две ветви затухающих во времени колебаний с частотами  $\omega^\pm = \omega_0^\pm - i\Gamma^\pm$ , где  $\Gamma^\pm = \Gamma_1^\pm + \Gamma_2^\pm$

$$\Gamma_1^\pm = \frac{\gamma_1(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)(\hbar\omega_0^\pm)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_2^0 - \varepsilon_2^2(n_{10}g_1 + \varepsilon_1^0)}{2\hbar(\hbar\omega_0^\pm)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}$$

$$\Gamma_2^\pm = \frac{\gamma_2(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)(\hbar\omega_0^\pm)^2 + 2n_{10}n_{20}g_{12}^2\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^2(n_{20}g_2 + \varepsilon_2^0)}{2\hbar(\hbar\omega_0^\pm)^2 - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}. \quad (21)$$

Решения уравнения (13) будут иметь вид  $\delta n, v \sim e^{-\Gamma t} e^{-i(\omega_0 t - k \cdot r)}$ .

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ МН В БЭК ПРИ РАЗНЫХ ЗНАКАХ ПОСТОЯННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОМПОНЕНТ

В дальнейшем, положим для простоты анализа  $m_1 = m_2 = m, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Тогда выражения (17), (20) существенно упрощаются и принимают компактный вид

$$\hbar\omega^\pm = \hbar\omega_0^\pm - i\hbar\Gamma^\pm, \quad \Gamma^\pm = \frac{\gamma}{2\hbar} \left( \varepsilon_0 + \frac{(\hbar\omega_0^\pm)^2}{\varepsilon_0} \right), \quad (22)$$

где

$$(\hbar\omega_0^\pm)^2 = \varepsilon_0(\varepsilon_0 + n_{10}g_1 + n_{20}g_2 \pm \sqrt{(n_{10}g_1 + n_{20}g_2)^2 + 4n_{10}n_{20}(g_{12}^2 - g_1g_2)}). \quad (23)$$

Запишем эти выражения в безразмерном виде. Для этого в (22) введем обозначения  $E^\pm \equiv (\hbar\omega^\pm)/(n_{10}g_1)$ ,  $E_0^\pm \equiv (\hbar\omega_0^\pm)/(n_{10}g_1)$ ,  $\chi \equiv (n_{20}g_2)/(n_{10}g_1)$  и  $\tilde{k}^2 \equiv \hbar^2 k^2 / (2mn_{10}g_1)$ . В итоге получим выражение для зависимости безразмерной энергии колебаний  $E$  от безразмерного волнового вектора  $\tilde{k}$

$$E^\pm = E_0^\pm - i\hbar\tilde{\Gamma}^\pm, \quad \tilde{\Gamma}^\pm = \frac{\gamma}{2\hbar} \left( \tilde{k}^2 + \frac{(E_0^\pm)^2}{\tilde{k}^2} \right) \quad (24)$$

где

$$(E_0^\pm)^2 = \tilde{k}^2 (\tilde{k}^2 + (1 + \chi) \pm \sqrt{(1 + \chi)^2 + 4\chi\eta_1}). \quad (25)$$

Мы также ввели обозначение  $\eta_1 \equiv g_{12}^2 / (g_1 g_2) - 1$ .

Исследуем вопрос о модуляционной неустойчивости в системе. В пренебрежении диссипацией модуляционная неустойчивость возникает, когда выражение (25) для  $(E_0^\pm)^2$  отрицательно

$$(\tilde{k}^2 + (1 + \chi) \pm \sqrt{(1 + \chi)^2 + 4\chi\eta_1}) < 0. \quad (26)$$

Для случая, когда постоянные взаимодействия между частицами в компонентах конденсата положительны,  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$ , это возможно только для  $(E_0^-)^2$  (второй ветви колебаний -  $\omega_0^-$ ), так как выражение для  $(E_0^+)^2$  (первая ветвь колебаний -  $\omega_0^+$ ) всегда положительно (МН отсутствует). Вторая ветвь  $\omega_0^-$  становится отрицательной при  $\eta_1 > 0$  ( $g_{12}^2 - g_1 g_2 > 0$ ), для волновых векторов  $\tilde{k}^2 < \tilde{k}_{B1}^2$  [12]

$$\tilde{k}_{B1}^2 = \sqrt{(1 + \chi)^2 + 4\chi\eta_1} - (1 + \chi). \quad (27)$$

Здесь  $\tilde{k}_{B1}$  - это граничное значение волнового вектора, когда в системе присутствует МН.

Модуляционная неустойчивость при наличии диссипации определяется неравенством  $(E^-)^2 < 0$  и, соответственно, граничные значения волновых векторов находятся из уравнения

$$E^- = E_0^- - \frac{i\gamma}{2} \left( \tilde{k}^2 + \frac{(E_0^-)^2}{\tilde{k}^2} \right) = 0, \quad (28)$$

где значения  $E_0^-$  берутся из уравнения (25). В итоге получаем, что в линейном приближении по параметру  $\gamma$ , граничное значение  $\tilde{k}_{B1}$  для существования МН остается таким же, как и в отсутствие диссипации (27). Запишем его, возвращаясь к размерным величинам [12]

$$k_{B1}^2 = (2m / \hbar^2) \left[ \sqrt{(n_{10}g_1 + n_{20}g_2)^2 + 4n_{10}n_{20}(g_{12}^2 - g_1g_2)} - (n_{10}g_1 + n_{20}g_2) \right]. \quad (29)$$

Отрицательное значение  $(E_0^-)^2$  (или  $(\hbar\omega_0^-)^2$ ) говорит о том, что частота  $\omega_0^-$  - чисто мнимая величина, и ее можно представить как  $\omega_0^- = iG_0$ , где  $G_0$ , абсолютная величина  $\omega_0^-$ , представляет собой инкремент колебаний. Введем обозначения для инкрементов в отсутствие диссипации  $\omega_0^- = iG_{01}$ , и при наличии диссипации  $\omega^- = iG_1$ , в случае, когда константы взаимодействия положительны. Соответствующие им безразмерные величины будут  $\tilde{G}_{01} \equiv \hbar G_{01} / (n_{10}g_1)$  и  $\tilde{G}_1 \equiv \hbar G_1 / (n_{10}g_1)$ . В случае, когда константы взаимодействия в компонентах конденсата имеют разные знаки будем использовать обозначения  $G_{02}$ ,  $\tilde{G}_{02}$ ,  $\tilde{G}_2$  соответственно (см. далее). Из (25) следует, что в отсутствие диссипации

$$\tilde{G}_{01} = \sqrt{\tilde{k}^2 (\sqrt{(1 + \chi)^2 + 4\chi\eta_1} - \tilde{k}^2 - (1 + \chi))}. \quad (30)$$

И для величины  $\tilde{G}_1$ , согласно (28)

$$\tilde{G}_1 = \tilde{G}_{01} - \frac{\gamma}{2} \left( \tilde{k}^2 + \frac{(E_0^-)^2}{\tilde{k}^2} \right) = 0. \quad (31)$$

Выражение (31) определяет, в линейном приближении по диссипативному коэффициенту  $\gamma$ , зависимость инкремента колебаний от волнового вектора в диапазоне  $0 < \tilde{k}^2 < \tilde{k}_{B1}^2$ . Таким образом, влияние диссипации на МН в рассматриваемом случае учитывается вторым слагаемым в (31),  $(\gamma/2)(2\tilde{k}^2 + (1 + \chi) - \sqrt{(1 + \chi)^2 + 4\chi\eta_1})$ , в котором параметры  $\chi$  и  $\eta_1$  играют определяющую роль. Возвращаясь к размерным величинам получим

$$G_1 = G_{01} - \frac{\gamma}{2\hbar} (2\varepsilon_0 + (n_{10}g_1 + n_{20}g_2) - \sqrt{(n_{10}g_1 + n_{20}g_2)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1g_2\eta_1}), \quad (32)$$

где  $G_{01}$  следует из (30)

$$G_{01} = (1/\hbar)\sqrt{\varepsilon_0(\sqrt{(n_{10}g_1 + n_{20}g_2)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1g_2\eta_1} - (n_{10}g_1 + n_{20}g_2) - \varepsilon_0)}. \quad (33)$$

Определим моду колебаний, при которой инкремент МН будет максимальным. Она определяется условием

$$\partial(E^-)^2 / \partial\tilde{k}^2 = 0, \quad (34)$$

где  $E^-$  определяется формулой (28). Соответствующее значение волнового вектора равно

$$\tilde{k}_{\max}^2 = (1/2)(\sqrt{(1+\chi)^2 + 4\chi\eta_1} - (1+\chi))(1-\gamma). \quad (35)$$

Таким образом, значение волнового вектора, соответствующего максимальному инкременту колебаний уменьшается уже в линейном приближения по диссипативному параметру  $\gamma$ . При нахождении максимального значения инкремента колебаний, мы будем полагать в (35)  $\gamma=0$ , поскольку учет  $\gamma$  в этом выражении приводит к квадратичным поправкам по этому параметру в инкременте колебаний, что выходит за рамки принятого приближения. Максимальный инкремент будем находить из выражения (31) для  $\tilde{G}_{1\max}$  при волновом векторе  $\tilde{k}^2 = (\tilde{k}_1)_{\max}^2$

$$\tilde{G}_{1\max} = \hbar G_{1\max} / (n_{10}g_1) = \sqrt{(\tilde{k}_1)_{\max}^2 (\sqrt{(1+\chi)^2 + 4\chi\eta_1} - (\tilde{k}_1)_{\max}^2 - (1+\chi))} = (\tilde{k}_1)_{\max}^2. \quad (36)$$

И, соответственно, инкремент  $G_{1\max}$  равен

$$G_{1\max} = \hbar(k_1)_{\max}^2 / 2m. \quad (37)$$

Здесь, согласно (35) (при  $\gamma=0$ )

$$(k_1)_{\max}^2 = (m/\hbar^2)(\sqrt{(n_{10}g_1 + n_{20}g_2)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1g_2\eta_1} - (n_{10}g_1 + n_{20}g_2)). \quad (38)$$

Найденное максимальное значение инкремента (37) это известный результат, полученный при описании модуляционной неустойчивости в БЭК с положительными константами связи в каждой компоненте [17]. Исследуем, в каких пределах волновых векторов существует МН, в случае, когда  $g_1 > 0$ ,  $g_2 < 0$ , т.е. когда постоянная взаимодействия во второй компоненте отрицательна. Перепишем выражение (25) в виде

$$(E_0^\pm)^2 = \tilde{k}^2(\tilde{k}^2 + (1-|\chi|) \pm \sqrt{(1-|\chi|)^2 + 4|\chi|\eta_2}), \quad (39)$$

где  $|\chi| = n_2|g_2|/n_1g_1$ ,  $\eta_2 \equiv 1 + g_{12}^2/(g_1|g_2|)$ .

Здесь параметр  $\eta_2 > 0$ . Из (39) видно, что  $(E_0^+)^2 > 0$  для любых значений параметра  $\chi$ . Таким образом, МН в этом случае отсутствует. Для второй ветви колебаний с частотами  $\omega_0^-$  возможно как  $(E_0^-)^2 > 0$ , так и  $(E_0^-)^2 < 0$ . Для значений волновых векторов  $\tilde{k}^2 < \tilde{k}_{B2}^2$

$$\tilde{k}_{B2}^2 = |\chi| - 1 + \sqrt{(|\chi| - 1)^2 + 4|\chi|\eta_2} \quad (40)$$

выполняется неравенство  $(E_0^-)^2 < 0$  и в системе, в отсутствие диссипации, будет существовать неустойчивость с инкрементом колебаний  $G_{02}$ , следующим из выражения для  $\tilde{G}_{02}$  ( $\tilde{G}_{02} \equiv \hbar G_{02} / (n_{10}g_1)$ )

$$\tilde{G}_{02} = \sqrt{\tilde{k}^2 \left( \sqrt{(|\chi| - 1)^2 + 4|\chi|\eta_2} + |\chi| - 1 - \tilde{k}^2 \right)} \quad (41)$$

Заметим, что в отличие от случая, когда внутри компонент конденсата постоянные взаимодействия между частицами положительны и для развития МН необходимо выполнение условия  $g_{12}^2 - g_1g_2 > 0$ , здесь, для возникновения МН, на соотношение между величинами  $g_1, |g_2|, g_{12}$  не накладывается никаких условий (см.[12]). При наличии диссипации граничное значение волнового вектора для существования МН определяется уравнениями (24) и (39) и, в линейном по  $\gamma$  приближении, остается прежним (40). В размерных единицах

$$k_{B2}^2 = (2m/\hbar^2) \left[ \sqrt{(n_{10}g_1 - n_{20}|g_2|)^2 + 4n_{10}n_{20}(g_{12}^2 + g_1|g_2|)} - (n_{10}g_1 - n_{20}|g_2|) \right]. \quad (42)$$



Аналогично первому случаю с константами взаимодействия  $g_1 > 0, g_2 > 0$ , выражение для инкремента колебаний в присутствии диссипации при  $g_1 > 0, g_2 < 0$  и волновых векторах  $0 < \tilde{k}^2 < \tilde{k}_{B2}^2$  определяется формулой (28), но значения  $E_0^-$  находятся из (39). В результате получаем

$$\tilde{G}_2 = \tilde{G}_{02} - \frac{\gamma}{2} \left( \tilde{k}^2 + \frac{(E_0^-)^2}{\tilde{k}^2} \right) = 0. \quad (43)$$

Таким образом, влияние диссипации на МН в этом случае будет определяться слагаемым  $(\gamma/2) \left( 2\tilde{k}^2 + (1-|\chi|) - \sqrt{(1-|\chi|)^2 + 4|\chi|\eta_2} \right)$  с параметрами  $|\chi|$  и  $\eta_2$ . Приведем выражение для инкремента колебаний  $G_2$ , возвращаясь к размерным величинам

$$G_2 = G_{02} - \frac{\gamma}{2\hbar} \left( 2\varepsilon_0 + (n_{10}g_1 - n_2|g_2|) - \sqrt{(n_{10}g_1 - n_2|g_2|)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1|g_2|\eta_2} \right), \quad (44)$$

где инкремент  $G_{02}$  согласно (41)

$$G_{02} = (1/\hbar) \sqrt{\varepsilon_0 \left( \sqrt{(n_{10}g_1 - n_2|g_2|)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1|g_2|\eta_2} + (n_{20}|g_2| - n_{10}g_1) - \varepsilon_0 \right)}. \quad (45)$$

Моды колебаний, при которых достигается максимальное значение инкремента, при различных значениях параметров  $|\chi|$  и  $\eta_2$ , определяются условием (34). Соответствующие волновые вектора и инкременты определяются выражениями

$$(\tilde{k}_2)_{\max}^2 = (1/2)(|\chi| - 1 + \sqrt{(|\chi| - 1)^2 + 4|\chi|\eta_2}). \quad (46)$$

$$E_0^- = \sqrt{(\tilde{k}_2)_{\max}^2 ((\tilde{k}_2)_{\max}^2 + (1-|\chi|) - \sqrt{(1-|\chi|)^2 + 4|\chi|\eta_2})}. \quad (47)$$

Аналогично случаю с положительными константами связи получим для случая  $g_1 > 0, g_2 < 0$

$$\tilde{G}_{2\max} = \sqrt{(\tilde{k}_2)_{\max}^2 (\sqrt{(1-|\chi|)^2 + 4|\chi|\eta_2} - (\tilde{k}_2)_{\max}^2 - (1-|\chi|))} = (\tilde{k}_2)_{\max}^2. \quad (48)$$

Или, переходя к размерным единицам

$$G_{2\max} = \hbar(k_2)_{\max}^2 / 2m, \quad (49)$$

$$(k_2)_{\max}^2 = (m/\hbar^2) \left( \sqrt{(n_{10}g_1 - n_{20}|g_2|)^2 + 4n_{10}n_{20}g_1|g_2|\eta_2} - (n_{10}g_1 - n_{20}|g_2|) \right). \quad (50)$$

Заметим, что при нахождении максимальных инкрементов  $G_{1\max}$  и  $G_{2\max}$ , в рассматриваемых нами случаях

$$\frac{\partial (E_0^-)^2}{\partial \tilde{k}^2} = 2(\tilde{k}^2 - \tilde{k}_{\max}^2) = \tilde{k}^2 + \frac{(E_0^-)^2}{\tilde{k}^2}. \quad (51)$$

Отсюда следует, что декремент колебаний  $\tilde{\Gamma}^- = (\gamma/2\hbar)(\tilde{k}^2 + (E_0^-)^2/\tilde{k}^2)$ , обусловленный диссипацией, в точности равен нулю в точке максимального инкремента модуляционной неустойчивости. Таким образом, диссипация, имеющаяся в системе и приводящая к затуханию возбуждений устойчивых ветвей колебаний, в случае развития МН, не приводит даже к частичному подавлению самой быстро растущей моды колебаний, оставляя значение частоты  $\omega_0^-$  для волновых векторов  $k_{\max}^2$  неизменным

$$E^- = \left[ (E_0^-) - i\gamma(\tilde{k}^2 - \tilde{k}_{\max}^2) \right]_{\tilde{k}^2 = \tilde{k}_{\max}^2} = E_0^-. \quad (52)$$

$$(\omega^-)_{k^2 = k_{\max}^2} = \omega_0^-. \quad (53)$$

Рассмотрим длинноволновое приближение, когда использование уравнения ГП наиболее обоснованно. Поскольку  $\lambda \gg \xi$ ,  $\xi = \hbar/\sqrt{2mng}$  - длина когерентности в БЭК, то  $\tilde{k}^2 \ll 1$  в данном приближении. Перейдем к размерным переменным и выпишем, согласно (22), (23) спектр колебаний в длинноволновой области

$$\omega^\pm = k \sqrt{(1/2m)(n_1g_1 + n_2g_2 \pm \sqrt{(n_1g_1 + n_2g_2)^2 + 4n_1n_2(g_{12}^2 - g_1g_2)})} - \frac{i\gamma}{2\hbar} (n_1g_1 + n_2g_2 \pm \sqrt{(n_1g_1 + n_2g_2)^2 + 4n_1n_2(g_{12}^2 - g_1g_2)}) \quad (54)$$

Или, вводя скорости звука в компонентах,  $C_1 = \sqrt{g_1n_{10}/m}$  и  $C_2 = \sqrt{g_2n_{20}/m}$

$$\omega^{\pm} = k \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{2}\right)^2 + C_1^2 C_2^2 (g_1^2 / (g_1 g_2) - 1)}} - \frac{i\gamma m}{\hbar} \left[ \frac{C_1^2 + C_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{2}\right)^2 + C_1^2 C_2^2 (g_1^2 / (g_1 g_2) - 1)} \right] \quad (55)$$

Отсюда следует, что зависимость частоты колебаний от волнового вектора имеет качественно такой же вид, как и для однокомпонентного конденсата при  $\lambda \gg \xi$ ,  $\xi = \hbar / \sqrt{2mng}$ ,  $C = \sqrt{gn/m}$

$$\omega = kC - i\gamma m C^2 / \hbar. \quad (56)$$

### ВЫВОДЫ

В однокомпонентном БЭК модуляционная неустойчивость существует только тогда, когда постоянная взаимодействия между частицами отрицательна. Внутриконтентное и межконтентное взаимодействие частиц в двухкомпонентном бозе-конденсате приводит к нетривиальному условию на параметры системы для возникновения МН. Возникновение МН в двухкомпонентном БЭК зависит уже как от знака, так и от величины постоянных взаимодействия между частицами. В случае, когда в компонентах конденсата постоянные межчастичного взаимодействия положительны, возникновение МН определяется двумя безразмерными параметрами:  $\chi \equiv (n_2 g_2) / (n_1 g_1)$  и  $\eta_1 \equiv g_{12}^2 / (g_1 g_2) - 1$ . Причем, соотношение между величинами  $g_1, g_2, g_{12}$  таково, что знак  $\eta_1$  должен быть положительным. Когда в первой компоненте константа связи между частицами положительна, а во второй – отрицательна, ситуация меняется. В этом случае для возникновения МН на соотношение между величинами  $g_1, |g_2|, g_{12}$  не накладывается никаких условий.

В работе, в линейном приближении по диссипативному параметру  $\gamma$ , найдены инкремент колебаний и значение волнового вектора, соответствующего максимальному инкременту колебаний. При этом показано, что границы области волновых векторов, при которых существует МН, остаются такими же как и в бездиссипативном случае. Показано, что для значения волнового вектора, соответствующего максимуму инкремента колебаний, вклад диссипации в линейном приближении равен нулю и необходимо учитывать следующее, квадратичное приближение по коэффициенту диссипации для учета этого вклада.

При отсутствии МН, для устойчивых колебаний определены декременты затухания. Показано, что в этом случае в длинноволновом пределе частота колебаний линейно зависит от волнового вектора, как и в случае однокомпонентного конденсата.

### ORCID IDs



Anatoly Ivashin  <https://orcid.org/0000-0001-6026-0208>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, V. Shlyapnikov and M. Levenstein, Phys. Rev. Lett. **53**, 5198-5201 (1999).
- [2]. B. Eiermann, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, P. Treutlein, K.-P. Marzlin and K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **92**, 230401 (2004).
- [3]. M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.S. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498-2501 (1999).
- [4]. G.P. Agrawal, Phys. Rev. Lett. **59**, 880-883 (1987).
- [5]. E.A. Donley, N.R. Claussen, S.L. Cornish, J.L. Roberts and E.A. Cornell, Nature, **412**, 295-299 (2001).
- [6]. K.E. Strecker, G.B. Partridge, A.G. Truscott and R.G. Hulet, Nature, **417**, 150-153 (2002).
- [7]. H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 2228-2231 (1999).
- [8]. T.L. Ho and V.B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276-3279 (1996).
- [9]. H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **86**, 1406-1409 (2001).
- [10]. E.W. Goldstein and P. Meystre, Phys. Rev. A. **55**, 2935 – 2940 (1997).
- [11]. L.D. Carr and J. Brand, Phys. Rev. Lett. **92**, 040401 (2004).
- [12]. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A. **74**, 013617 (2006).
- [13]. S. Ronen, J.L. Bohn, L.E. Halmos and M. Edwards, Phys. Rev. A. **78**, 053613 (2008).
- [14]. Coen S. and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**(1-4), 140401 (2001).
- [15]. Yu.M. Poluektov, Low Temp. Phys. **40**, 389-398 (2014).
- [16]. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2008), p. 569.
- [17]. P. Ao and S.T. Chui, Phys. Rev. A. **58**, 4836-4840 (1998), arXiv: 0003185 [cond-mat].

PACS: 61.72.Cc, 61.72.Mm, 61.72.Qq, 68.35.Dv, 68.35.Fx, 81.10.Jt, 81.30.Mh

## SURFACE-KINETICS-LIMITED OSTWALD RIPENING OF SPHERICAL PRECIPITATES AT GRAIN BOUNDARIES

 Oleksandr Koropov\*,  Roman Skorokhod

*Institute of Applied Physics of NAS of Ukraine*

*58, Petropavlivska St., 40000 Sumy, Ukraine*

*\*E-mail: ipfmail@ipfcentr.sumy.ua*

Received 13 November 2018; revised February 28 2019; accepted March 4, 2019

Ostwald ripening of sufficiently large (usually macroscopic) precipitates is the late stage of the diffusion decomposition of a supersaturated solid solution, occurring through the formation of fluctuations and subsequent growth of centers (nuclei) of a new phase. The paper describes a theoretical study of the Ostwald ripening of spherical precipitates of a newly formed phase at the grain boundary of finite thickness with the diffusion of impurity atoms from the grain interior to the grain boundary considered. The precipitate growth is assumed to be limited by the kinetics of impurity atom imbedding into the precipitate rather than by the impurity atom diffusion inside the grain boundary. The speed of diffusion growth of spherical precipitate located on the grain boundary is found. A system of equations which describes surface-kinetics-limited growth of Ostwald ripening of spherical precipitates on the grain boundary is formulated. This system consists of the equation of growth rate of the precipitate, the kinetic equation for the precipitates size distribution function which is normalized by the precipitates density, and the equation of the balance of matter in the system (the law of conservation of matter). The law of conservation of matter takes into account the atoms of impurities which are in solid solutions of the grain boundary and the body of the grain as well as in the precipitates which is the specifics of our problem. The asymptotic time dependences are found for the average and critical precipitate radius, supersaturation of solid solution of impurity atoms in the grain boundary, precipitate size distribution function, precipitate density, and for the factor of grain boundary filling with precipitates (the area covered by the precipitates per unit area of the grain boundary) and the total number of impurity atoms in precipitates. The factor of grain boundary filling with precipitates is a characteristic of the two-dimensional Ostwald ripening problem. A discussion of the limits of validity of obtained results is given.

**KEY WORDS:** precipitates, Ostwald ripening, grain boundaries, diffusion, surface kinetics.

## ВИЗРІВАННЯ ОСТВАЛЬДА СФЕРИЧНИХ ВИДІЛЕНЬ НА МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ, ЯКЕ ЛІМІТУЄТЬСЯ ПОВЕРХНЕВОЮ КІНЕТИКОЮ

**О.В. Коропов, Р.В. Скороход**

*Институт прикладной физики НАН Украины,*

*вул. Петропавлівська, 58, м. Суми 40000, Україна*

Визрівання Оствальда достатньо великих (звичайно макроскопічних) виділень – це остання, так звана пізня стадія дифузійного розпаду пересиченого твердого розчину, що відбувається шляхом флуктуаційного утворення і наступного росту центрів (зародків) нової фази. Теоретично розглянуто визрівання Оствальда сферичних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі скінченної товщини, з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна до міжзеренної межі. Знайдено швидкість дифузійного росту сферичного виділення нової фази, розташованого на міжзеренній межі. Вважається, що ріст виділень лімітується поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки в виділення, а не дифузією атомів домішки в міжзеренній межі. Сформульовано систему рівнянь, що описує визрівання Оствальда сферичних виділень, розташованих на міжзеренній межі, ріст яких лімітується поверхневою кінетикою. Ця система складається із рівняння швидкості росту окремого виділення, кінетичного рівняння для функції розподілу виділень нової фази за розмірами, нормованої на густину виділень та рівняння балансу речовини в системі (закоу збереження речовини). В законі збереження речовини урахуються атоми домішки, які знаходяться як в твердих розчинах міжзеренної межі і тіла зерна, так і в виділеннях нової фази, що є специфікою даної задачі. Знайдено асимптотичні часові залежності середнього і критичного радіусів виділення, пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі, функції розподілу виділень за розмірами, густини виділень, коефіцієнта заповнення міжзеренної межі виділеннями (площі, що покривається виділеннями на одиниці площі міжзеренної межі) та повного числа атомів домішки у виділеннях. Коефіцієнт заповнення міжзеренної межі виділеннями є характеристикою, специфічною для двовимірних задач визрівання Оствальда. Обговорюються границі застосування проведеного розгляду.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** виділення нової фази, визрівання Оствальда, межі зерен, дифузія, поверхнева кінетика.

## СОЗРЕВАНИЕ ОСТВАЛЬДА СФЕРИЧЕСКИХ ВЫДЕЛЕНИЙ НА МЕЖЗЕРЕННОЙ ГРАНИЦЕ, ЛИМИТИРУЕМОЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ КИНЕТИКОЙ

**А.В. Коропов, Р.В. Скороход**

*Институт прикладной физики НАН Украины*

*ул. Петропавловская, 58, г. Сумы 40000, Украина*

Созревание Оствальда достаточно больших (обычно макроскопических) выделений - это последняя, так называемая поздняя стадия диффузионного распада пересыщенного твердого раствора, происходящего путем флуктуационного образования и последующего роста центров (зародышей) новой фазы. Теоретически рассмотрено созревание Оствальда сферических выделений новой фазы, расположенных на межзеренной границе конечной толщины, с учетом диффузионных потоков атомов примеси из глубины зерна к межзеренной границе. Найдена скорость диффузионного роста сферического выделения новой фазы, расположенного на межзеренной границе. Считается, что рост выделений лимитируется поверхностной

кінетикою встраивания атомов примеси в выделение, а не диффузией атомов примеси в межзеренной границе. Сформулирована система уравнений, описывающая созревание Оствальда сферических выделений, расположенных на межзеренной границе, рост которых лимитируется поверхностной кинетикой. Эта система состоит из уравнения скорости роста отдельного выделения, кинетического уравнения для функции распределения выделений новой фазы по размерам, нормированной на плотность выделений и уравнения баланса вещества в системе (закона сохранения вещества). В законе сохранения вещества учитываются атомы примеси, которые находятся как в твердых растворах межзеренной границы и тела зерна, так и в выделениях новой фазы, что является спецификой данной задачи. Найдены асимптотические временные зависимости среднего и критического радиусов выделения, пересыщения твердого раствора атомов примеси в межзеренной границе, функции распределения выделений по размерам, плотности выделений, коэффициента заполнения межзеренной границы выделениями (площади, покрываемой выделениями на единице площади межзеренной границы) и полного числа атомов примеси в выделениях. Коэффициент заполнения межзеренной границы выделениями является характеристикой, специфической для двумерных задач созревания Оствальда. Обсуждаются пределы применимости проведенного рассмотрения.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** выделения новой фазы, созревание Оствальда, границы зерен, диффузия, поверхностная кинетика.

Дифузійний розпад пересиченого твердого розчину, що відбувається шляхом флуктуаційного утворення і наступного росту центрів нової фази (зародків) включає три основні стадії: 1. інтенсивне утворення зародків з розмірами більшими критичного в умовах постійного достатньо великого пересичення, 2. ріст відокремлених (ізолюваних) центрів, тобто їх незалежний ріст, 3. визрівання Оствальда (ВО) або коалесценція Оствальда достатньо великих (звичайно макроскопічних) виділень [1-5]. Остання, так звана пізня стадія [2], була відкрита Оствальдом в 1900 р. [6] і полягає в рості більш крупних виділень за рахунок зменшення в розмірі і повному розчиненні дрібних, при цьому середній розмір виділення монотонно зростає як функція часу  $t$ , а густина виділень монотонно спадає. На стадії ВО сумарна міжфазна поверхнева енергія системи матриця-виділення нової фази на протязі часу зменшується [2, 4-6].

Основи послідовної і внутрішньо несуперечної теорії ВО були закладені в працях Ліфшиця і Сльозова [7] та Вагнера [8]. Ключовим моментом праць [7, 8] являється введення до розгляду самопогодженого середнього поля густини атомів домішки, зумовленого всім ансамблем виділень, з якого, власне кажучи, і відбувається ріст виділень нової фази.

В основоположних працях з теорії ВО [7, 8] розглядалися сферичні виділення нової фази в ідеальній (не містить дефекти) кристалічній матриці, де швидкість масопереносу визначається або дифузією через об'єм матриці-кристала [7], або кінетикою переходу і вбудови атомів на межі матриця-виділення нової фази (поверхневою кінетикою) [8].

В подальшому розглядалися багато які питання теорії ВО: ВО двох- і багатокомпонентних виділень нової фази [2, 9], ВО острівцевих структур на поверхні твердого тіла [10-15], ВО кристалів в рідких розчинах [16], ВО центрів кристалізації в кінетиці кристалізації розтопів [17], ВО у бінарній системі з великою об'ємною часткою нової фази при наявності шумів концентрації та фактора Гіббса-Томпсона [18], ВО у бінарній системі при взаємній дифузії з урахуванням нерівноважних вакансій [19], ВО в гетероструктурах з квантовими точками в умовах змішаного типу дифузії [15, 20] і ряд інших питань [2-5, 21-32].

На відміну від ідеального кристала, в реальному (містить різні дефекти) кристалі кінетика макродефектів на стадії ВО може визначатися дифузією по дислокаційним трубкам [33-36], або дифузією по межах зерен (міжзеренним межах) полікристалів [2, 4, 5, 37-40].

Важливу роль процеси дифузійного розпаду відіграють в матеріалознавстві (включаючи радіаційне матеріалознавство), являючись однією з причин старіння металевих стопів [1, 2, 4, 5, 41].

Метою даної роботи є теоретичний аналіз ВО сферичних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі скінченної товщини  $\delta$  [42-44] з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна до міжзеренної межі. Вважається, що ріст виділень лімітується поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки в виділення, а не дифузією атомів домішки в міжзеренній межі. Крім того, на відміну від праць [45-47], взагалі кажучи, не передбачається, що радіус виділень  $R$  малий в порівнянні з характерним масштабом довжини задачі  $L_B$ .

### ШВИДКІСТЬ ДИFUZІЙНОГО РОСТУ СФЕРИЧНОГО ВИДІЛЕННЯ НОВОЇ ФАЗИ, РОЗТАШОВАНОГО НА МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ

Рівняння дифузії атомів домішки в міжзеренній межі, що розглядається як однорідний ізотропний шар товщиною  $\delta$  [42-44], навколо виділення нової фази з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна до міжзеренної межі запишемо у вигляді [48, 49]

$$L_B^2 \Delta n_B - n_B + \bar{n}_B = 0. \quad (1)$$

Тут  $n_B$  – об'ємна густина атомів домішки в міжзеренній межі (двовимірна густина атомів домішки  $n_S = n_B \delta$ ),  $\bar{n}_B$  – густина атомів домішки в міжзеренній межі віддалік від виділення нової фази,  $L_B$  – характерний масштаб довжини задачі, введений у працях [48, 49].

Будемо розглядати сферичне виділення нової фази з радіусом  $R = R(t)$  ( $R \gg \delta$ ), яке перетинається міжзеренною межею (див. рис. 1) і вважаємо, що розмір зерна  $d$  значно перевищує радіус виділення ( $d \gg R$ ).

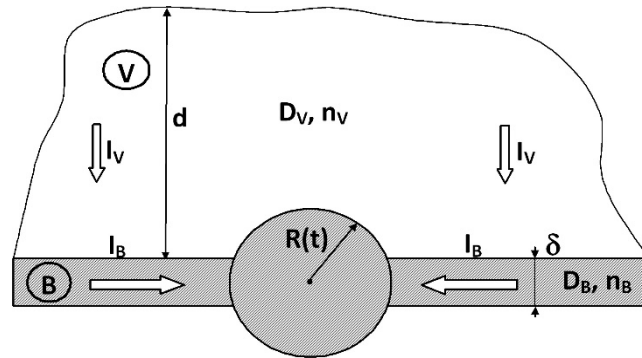


Рис. 1. Схематичне зображення сферичного виділення нової фази, розташованого на міжзеренній межі скінченної товщини  $\delta$ .  $B$  – міжзеренна межа,  $V$  – тіло зерна (характерний розмір  $d$ ),  $D_V$  – коефіцієнт дифузії атомів домішки в тілі зерна,  $n_V$  – густина атомів домішки в тілі зерна,  $I_V$  – дифузійний потік атомів домішки в тілі зерна. Зміст останніх позначень пояснюється в тексті.

Граничні умови до рівняння (1) беремо такими [11, 14, 45-49]:

$$D_B \left. \frac{\partial n_B}{\partial r} \right|_{r=R} = \beta_B [n_B(R) - n_{BR}], \quad n_B|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \bar{n}_B. \quad (2)$$

Тут  $D_B$  – коефіцієнт міжзеренної дифузії, тобто об'ємний коефіцієнт дифузії атомів домішки в міжзеренній межі (шарі товщиною  $\delta$ ),  $\beta_B$  – поверхневий кінетичний коефіцієнт, характеризуючий швидкість переходу атомів домішки з міжзеренної межі до виділення нової фази,  $r$  – відстань від центра виділення в площині міжзеренної межі,  $n_{BR}$  – термодинамічно рівноважне значення густини атомів домішки в міжзеренній межі поблизу поверхні міжзеренна межа-виділення ( $r = R$ ).

Для величини  $n_{BR}$  має місце термодинамічна формула

$$n_{BR} = n_{B\infty} \exp(2\Gamma_B/R), \quad (3)$$

де  $n_{B\infty}$  – значення  $n_{BR}$  поблизу плоскої поверхні міжзеренна межа-виділення ( $R \rightarrow \infty$ ),  $\Gamma_B \equiv \sigma_B \omega / \kappa T$ ,  $\sigma_B$  – питома міжфазна енергія поверхні міжзеренна межа-виділення,  $\omega$  – об'єм, що припадає на один атом домішки в виділенні,  $\kappa$  – стала Больцмана,  $T$  – температура.

Для подальшого відмітимо, що термодинамічно рівноважний перепад густини атомів домішки в міжзеренній межі поблизу виділення радіуса  $R$  такий:

$$\Delta n_{BR} \equiv \bar{n}_B - n_{BR} = n_{B\infty} [\exp(2\Gamma_B/R^*) - \exp(2\Gamma_B/R)]. \quad (4)$$

Тут  $R^*$  – критичний радіус виділення (виділення з радіусом  $R > R^*$  зростає, а з радіусом  $R < R^*$  зменшується в розмірі),

$$R^* = \frac{2\Gamma_B}{\ln(\bar{n}_B/n_{B\infty})}. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (1), яке задовольняє граничним умовам (2), має вигляд

$$n_B(r) = \bar{n}_B - K_0 (r/L_B) [F_0(R/L_B)]^{-1} \Delta n_{BR}, \quad (6)$$

де введено позначення

$$F_0(R/L_B) \equiv K_0(R/L_B) + (D_B/\beta_B L_B) K_1(R/L_B), \quad (7)$$

$K_0$  ( $K_1$ ) – функція Макдональда нульового (першого) порядку [50].

Швидкість дифузійного росту виділення пропорційна дифузійному потоку атомів домішки в міжзеренній межі  $I_B = -D_B \nabla n_B$  на поверхні міжзеренна межа-виділення ( $r = R$ ) і знаходиться так:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{2R} \left. \frac{dn_B(r)}{dr} \right|_{r=R}. \quad (8)$$

Явний вираз для швидкості росту  $dR/dt$  випливає з формул (6), (8) і має вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{2RL_B} \frac{K_1(R/L_B)}{F_0(R/L_B)} \Delta n_{BR}. \quad (9)$$

Якщо ріст виділення лімітується дифузією атомів домішки  $((D_B/\beta_B L_B) K_1(R/L_B) \ll K_0(R/L_B))$ , то

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{2RL_B} \frac{K_1(R/L_B)}{K_0(R/L_B)} \Delta n_{BR}. \quad (10)$$

Якщо ж ріст виділення лімітується поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки у виділення  $((D_B/\beta_B L_B) K_1(R/L_B) \gg K_0(R/L_B))$ , то

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta_B \omega \delta}{2R} \Delta n_{BR}. \quad (11)$$

Розглянемо тепер інші граничні випадки загального виразу швидкості росту  $dR/dt$  (9). Для виділення достатньо великого радіуса  $(R \gg L_B)$  з формули (9) одержимо

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\overline{D_B} \omega \delta}{2RL_B} \Delta n_{BR}, \quad (12)$$

де

$$\overline{D_B} \equiv \frac{D_B \beta_B L_B}{D_B + \beta_B L_B} \quad (13)$$

ефективний (з урахуванням поверхневої кінетики вбудови) коефіцієнт дифузії атомів домішки в міжзеренній межі. Для виділення малого радіуса  $(R \ll L_B)$  маємо

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{2R} \frac{\Delta n_{BR}}{RK_0(R/L_B) + D_B/\beta_B}. \quad (14)$$

Відмітимо, що у випадку  $R \ll L_B$

$$K_0(R/L_B) = -[\ln(R/2L_B) + \gamma] + 0[(R/2L_B)^2 \ln(R/2L_B)], \quad (15)$$

де  $\gamma = 0.5772\dots$  стала Ейлера.

В умовах малих пересичень твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі

$$\Delta_B(t) \equiv \frac{\overline{n_B}(t) - n_{B\infty}}{n_{B\infty}} \ll 1 \quad (16)$$

формула (11) приймає вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta_B \Gamma_B n_{B\infty} \omega \delta}{R} \left( \frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \right), \quad (17)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta_B n_{B\infty} \omega \delta}{2R} \left( \Delta_B - \frac{2\Gamma_B}{R} \right). \quad (18)$$

Вирази (17), (18) передбачають використання у випадку малих пересичень формул (див. (4), (5))

$$\Delta n_{BR} = 2\Gamma_B n_{B\infty} \left( \frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \right), \quad (19)$$

$$\frac{2\Gamma_B}{R^*} = \Delta_B \ll 1. \quad (20)$$

З введенням позначення

$$\mathfrak{B} \equiv \beta_B n_{B\infty} \omega \delta, \quad (21)$$

остаточний вираз (18) для швидкості росту виділення  $dR/dt$  запишеться у вигляді

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\mathfrak{B}}{2R} \left( \Delta_B - \frac{2\Gamma_B}{R} \right). \quad (22)$$

В цій роботі будемо розглядати ансамбль сферичних виділень, розташованих на міжзеренній межі, ріст яких лімітується поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки у виділення за умови малих пересичень твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі ( $\Delta_B \ll 1$ ). В цьому випадку швидкість росту виділення  $dR/dt$  має вигляд (18), (22).

### СИСТЕМА РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЄ ВО СФЕРИЧНИХ ВИДІЛЕНЬ, РОЗТАШОВАНИХ НА МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ, РІСТ ЯКИХ ЛІМІТУЄТЬСЯ ПОВЕРХНЕВОЮ КІНЕТΙΚОЮ

В подальшому будемо користуватися безрозмірними величинами: радіусом виділення  $\rho \equiv R/R_0^* = \Delta_{B0} R/2\Gamma_B$  і часом  $t' \equiv t/t_0$ , де  $R_0^* \equiv R^*(t)|_{t=0}$  – початковий критичний радіус виділення,  $\Delta_{B0} \equiv \Delta_B(t)|_{t=0}$  – початкове пересичення атомів домішки в міжзеренній межі,  $t_0 \equiv R_0^{*3}/\mathfrak{B}\Gamma_B$  – характерний час задачі. Тоді, опускаючи штрих при  $t'$ , рівняння (22) запишемо у вигляді

$$\rho^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{x(t)} - 1, \quad (23)$$

де

$$x(t) \equiv R^*(t)/R_0^* = \Delta_{B0}/\Delta_B(t) \quad (24)$$

безрозмірний критичний радіус виділення, який підлягає визначенню,  $x(0) = 1$ .

Введемо функцію розподілу виділень нової фази за розмірами  $f(\rho, t)$ , нормовану на густину виділень (число виділень на одиниці площі міжзеренної межі)  $\mathcal{N}(t)$ , тобто

$$\mathcal{N}(t) = \int_0^\infty f(\rho, t) d\rho; \quad (25)$$

$f(\rho, t)$  і  $\mathcal{N}(t)$  є шуканими функціями. Функція розподілу  $f(\rho, t)$  задовольняє кінетичному рівнянню (рівнянню неперервності в просторі розмірів) [1, 2, 7, 8]

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ f(\rho, t) \frac{d\rho}{dt} \right] = 0 \quad (26)$$

з заданою початковою функцією розподілу  $f_0(\rho) \equiv f(\rho, t)|_{t=0}$  і рівнянню балансу речовини в системі (закону збереження речовини)

$$\overline{n_{B0}}\delta + \overline{n_{V0}}d + \frac{4\pi}{3\omega} R_0^{*3} \int_0^\infty \rho^3 f_0(\rho) d\rho = \overline{n_B}(t)\delta + \overline{n_V}(t)\delta + \frac{4\pi}{3\omega} R_0^{*3} \int_0^\infty \rho^3 f(\rho, t) d\rho, \quad (27)$$

де  $\overline{n_{B0}} \equiv \overline{n_B}(t)|_{t=0}$ ,  $\overline{n_V}(t)$  – густина атомів домішки в глибині зерна,  $\overline{n_{V0}} \equiv \overline{n_V}(t)|_{t=0}$ ,  $d$  – характерний поперечний розмір зерна. Відмітимо, що в законі збереження речовини (27) урахуються атоми домішки, які знаходяться як в твердих розчинах міжзеренної межі і тіла зерна, так і в виділеннях нової фази. Як і раніше [48, 49], будемо вважати, що віддалік від виділення нової фази існує термодинамічна рівновага між атомами домішки, що знаходяться в тілі зерна біля міжзеренної межі і атомами домішки в самій міжзеренній межі. Тоді

$$\overline{n_V} = C\overline{n_B}, \quad \overline{n_{V0}} = C\overline{n_{B0}}, \quad (28)$$

(формула (10) праці [49]). З урахуванням співвідношень (28) закон збереження речовини (27) запишемо у вигляді

$$Q \equiv \Delta_{B0} + \lambda^* \int_0^\infty \rho^3 f_0(\rho) d\rho = \Delta_B(t) + \lambda^* \int_0^\infty \rho^3 f(\rho, t) d\rho, \quad (29)$$

де

$$\lambda^* \equiv \frac{4\pi R_0^{*3}}{3n_{B\infty}\omega(\delta + Cd)} \quad (30)$$

або ж у вигляді

$$\frac{\Delta_B(t)}{Q} + \lambda^* \int_0^\infty \rho^3 f(\rho, t) d\rho = 1. \quad (31)$$

Тут

$$\lambda \equiv \frac{\lambda^*}{Q} = \frac{4\pi R_0^{*3}}{3n_{B\infty} Q \omega (\delta + Cd)} \quad (32)$$

стала, характеризуюча дану систему. З урахуванням формули (24) маємо

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(t)} + \lambda \int_0^\infty \rho^3 f(\rho, t) d\rho = 1. \quad (33)$$

Задача полягає в знаходженні асимптотичного (при  $t \rightarrow \infty$ ) розв'язку рівнянь (23), (26) і (33) при заданій початковій функції розподілу  $f(\rho, t)|_{t=0} = f_0(\rho)$ . Названі рівняння описують ВО сферичних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі, ріст яких лімітується поверхневою кінетикою.

### АСИМПТОТИКИ ЗМІН КРИТИЧНОГО РАДІУСА ВИДІЛЕННЯ І ПЕРЕСИЧЕННЯ ТВЕРДОГО РОЗЧИНУ АТОМІВ ДОМІШКИ В МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ НА СТАДІЇ ВО

Перейдемо до безрозмірних змінних  $u, \tau$ :

$$u \equiv \frac{R}{R^*(t)} = \frac{R}{2\Gamma_B} \Delta_B(t) = \frac{\rho}{x(t)} = \frac{\rho}{\Delta_{B0}} \Delta_B(t), \quad (34)$$

$$\tau \equiv \ln x^3 = \ln \left( \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right)^3 = \ln \left( \frac{\Delta_{B0}}{\Delta_B(t)} \right)^3, \quad (35)$$

$$x^3(\tau) = \exp \tau. \quad (36)$$

В змінних  $u, \tau$  рівняння (23) приймає вигляд

$$u^2 \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{3} [\mu(u-1) - u^3], \quad (37)$$

$$\mu = \mu(\tau) \equiv -\frac{dt}{x^2 dx} = \frac{3dt}{dx^3} > 0. \quad (38)$$

Якщо через  $u(w, \tau)$  позначити розв'язок рівняння (37) при заданій початковій умові  $u|_{\tau=0} = w$  і урахувати, що  $\rho(w, \tau) = x(\tau)u(w, \tau)$  (див. (34)),  $\tau|_{t=0} = 0$ ,  $x|_{t=0} = 1$  (див. (35), (36)), то повне число атомів домішки в виділеннях всіх розмірів на одиниці площі міжзеренної межі

$$N_i(t) = \frac{4\pi}{3\omega} R_0^{*3} \int_0^\infty \rho^3 f(\rho, t) d\rho \quad (39)$$

може бути представлено через початкову функцію розподілу  $f_0(w)$  у вигляді

$$N_i(\tau) = \frac{4\pi}{3\omega} R_0^{*3} x^3(\tau) \int_{w_0(\tau)}^\infty u^3(w, \tau) f_0(w) dw. \quad (40)$$

Тут  $w_0(\tau)$  – розв'язок рівняння  $u(w_0(\tau), \tau) = 0$ , тобто нижня границя первісних радіусів виділень, не розчинених до моменту часу  $\tau$ . З урахуванням формули (39) запишемо закон збереження речовини (33) у вигляді

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(\tau)} + \frac{3\lambda\omega}{4\pi R_0^{*3}} N_i(\tau) = 1 \quad (41)$$

або, остаточно, посилаючись на формули (36) і (40)

$$1 - \frac{\Delta_{B0}}{Q} \exp(-\tau/3) = \lambda (\exp \tau) \int_{w_0(\tau)}^\infty u^3(w, \tau) f_0(w) dw. \quad (42)$$

В рівняннях (37) і (42) невідомою функцією являється  $\mu(\tau) = dt/x^2 dx$  і вони повинні бути використані для її визначення, тобто кінець кінцем для визначення критичного радіуса виділення  $x(t)$  і пересичення  $\Delta_B(t)$ .

Аналіз рівнянь (37) і (42), проведений в працях [2, 7], свідчить, що для достатньо великих значень часу  $\tau$

$$\mu(\tau) = \mu_0 (1 - 3/4\tau^2), \quad \mu_0 = 27/4 \quad (43)$$



і відповідно

$$x^3(t) = \frac{4}{9}t \left[ 1 + \frac{3}{4(\ln t)^2} \right]. \quad (44)$$

Повертаючись до розмірних змінних (критичного радіусу виділення  $R^*(t)$  і розмірного часу  $t$ ), з формули (44) одержимо

$$R^{*3} = \frac{4}{9} \mathfrak{B} \Gamma_B t \left\{ 1 + \frac{3}{4 \left[ \ln \left( \mathfrak{B} \Gamma_B t / R_0^{*3} \right) \right]^2} \right\}. \quad (45)$$

З формул (43), (45) видно, що основне наближення  $\mu(\tau) = \mu_0$  і відповідно

$$R^{*3} = \frac{4}{9} \mathfrak{B} \Gamma_B t = \frac{4}{9} \beta_B \Gamma_B n_{B\infty} \omega \delta t \quad (46)$$

справедливе за умови  $3/4\tau^2 \ll 1$ , тобто,

$$\left[ \ln \left( \mathfrak{B} \Gamma_B t / R_0^{*3} \right) \right]^2 \gg 1. \quad (47)$$

Пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі асимптотично (при  $t \rightarrow \infty$ ) поводить себе наступним чином

$$\Delta_B(t) = \left( \frac{18\Gamma_B^2}{\mathfrak{B}} \right)^{1/3} t^{-1/3} = \left( \frac{18\Gamma_B^2}{\beta_B n_{B\infty} \omega \delta} \right)^{1/3} t^{-1/3}. \quad (48)$$

Зазначимо, що з формул (35) і (46) випливає явна залежність  $\tau = \tau(t)$ :

$$\tau(t) = 3 \ln \left( \frac{4\mathfrak{B} \Gamma_B t}{9R_0^{*3}} \right) = 3 \ln \left( \frac{4\beta_B \Gamma_B n_{B\infty} \omega \delta t}{9R_0^{*3}} \right). \quad (49)$$

### АСИМПТОТИКИ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИДІЛЕНЬ НОВОЇ ФАЗИ ЗА РОЗМІРАМИ І ГУСТИНИ ВИДІЛЕНЬ НА СТАДІЇ ВО

Функція розподілу виділень нової фази за розмірами (в змінних  $u$ ,  $\tau$ )  $\phi(u, \tau)$  асимптотично (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) така:

$$\phi(u, \tau) = A \exp(-\tau) P(u), \quad (50)$$

де

$$P(u) = \frac{3^4 e u^2 \exp[-1/(1-2u/3)]}{2^{5/3} (u+3)^{7/3} (3/2-u)^{11/3}}, \quad u \in [0; 3/2), \quad (51)$$

$$P(u) = 0, \quad u \in [3/2; +\infty). \quad (52)$$

$P(u)du$  є ймовірністю для виділення мати розмір між  $u$  та  $u+du$ . Відмітимо, що щільність ймовірності  $P(u)$  виду (51), (52) була одержана в праці Ліфшиця і Сльозова [7]. Графік функції  $P(u)$  представлений рис. 2 (крива 1).

Стала  $A$  в формулі (50) визначається законом збереження речовини в системі і дорівнює

$$A = \left( \overline{\lambda u^3} \right)^{-1}, \quad (53)$$

де

$$\overline{u^3} = \int_0^{3/2} u^3 P(u) du \approx 1.1296. \quad (54)$$

Густина виділень нової фази згідно з формулами (25), (50) при  $\tau \rightarrow \infty$  наступна

$$\mathcal{N} = \int_0^{\infty} f(\rho, t) d\rho = \int_0^{\infty} \phi(u, \tau) du = A \exp(-\tau). \quad (55)$$

З урахуванням формул (35) і (46) з результату (55) випливає

$$\mathcal{N}(t) = A \left( \frac{R_0^*}{R^*(t)} \right)^3 = \frac{9}{4} \frac{AR_0^{*3}}{\beta_B \Gamma_B n_{B\infty} \omega \delta t}. \quad (56)$$

В виразі (56), як виходить з формул (32) і (53),

$$AR_0^{*3} = \frac{R_0^{*3}}{\lambda u^3} = \frac{3n_{B\infty} Q \omega (\delta + Cd)}{4\pi u^3}, \quad (57)$$

тобто асимптотично (при  $t \rightarrow \infty$ )  $\mathcal{N}(t)$  не залежить від  $R_0^*$ .

Оскільки середнє значення  $\bar{u} = \bar{R}/R^*$ ,  $\bar{R}(t) = \bar{u}R^*(t)$ , де  $\bar{R} = \bar{R}(t)$  – середній радіус виділення нової фази. Як свідчать праці [2, 7],

$$\bar{u} = \int_0^{3/2} uP(u) du = 1 \quad (58)$$

з щільністю ймовірності  $P(u)$  виду (51), (52). Тоді асимптотично (при  $t \rightarrow \infty$ )

$$\bar{R}(t) = R^*(t), \quad (59)$$

тобто, середній радіус виділення збігається з критичним.

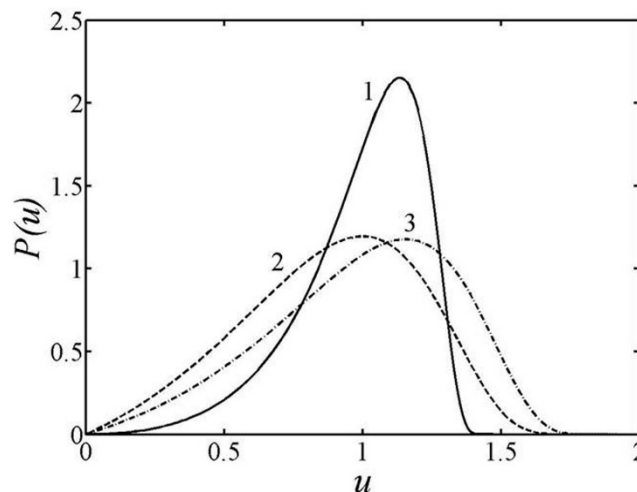


Рис. 2. Деякі функції  $P(u)$ , одержані в теорії ВО: 1 – праця Ліфшиця і Сльозова [7] та дана робота, 2 – праця Вагнера [8], 3 – праця [39, 40].

Функція розподілу виділень нової фази за розмірами в змінних  $R, t$  при  $t \rightarrow \infty$  наступна:

$$\mathcal{F}(R, t) = \frac{\mathcal{N}(t)}{R^*(t)} P\left(\frac{R}{R^*(t)}\right) = \frac{\mathcal{N}(t)}{R(t)} P\left(\frac{R}{R(t)}\right). \quad (60)$$

Як і в праці [7], асимптотична ( $t \rightarrow \infty$ ) поведінка функції розподілу виділень за розмірами  $\mathcal{F}(R, t)$  не залежить від виду початкової функції розподілу  $\mathcal{F}_0(R)$ . Це зауваження, природно, відноситься і до функції розподілу, записаною в інших змінних, наприклад  $\phi(u, \tau)$  (формули (50)-(54)),  $f(\rho, t)$ .

### АСИМПТОТИКИ КОЕФІЦІЄНТА ЗАПОВНЕННЯ МІЖЗЕРЕННОЇ МЕЖІ ВИДІЛЕННЯМИ І ПОВНОГО ЧИСЛА АТОМІВ ДОМШКИ У ВИДІЛЕННЯХ НА СТАДІЇ ВО

Як і в працях [12-14, 39], введемо коефіцієнт заповнення міжзеренної межі виділеннями нової фази  $\mathcal{Z}(t)$ . Саме  $\mathcal{Z}(t)$  – це площа, що покривається виділеннями на одиниці площі міжзеренної межі:

$$\mathcal{Z}(t) = \pi \int_0^{\infty} R^2 \mathcal{F}(R, t) dR = \pi R_0^{*2} \int_0^{\infty} \rho^2 f(\rho, t) d\rho. \quad (61)$$

З урахуванням формул (34), (50) і (55)  $\mathcal{Z}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  запишемо у вигляді

$$\mathcal{Z}(t) = \pi [R^*(t)]^2 \int_0^{3/2} u^2 \phi(u, \tau) du = \pi [R^*(t)]^2 \mathcal{N}(t) \overline{u^2}, \quad (62)$$

де

$$\overline{u^2} = \int_0^{3/2} u^2 P(u) du \approx 1.0463. \quad (63)$$

Оскільки  $\mathcal{N}(t) = A [R_0^*/R^*(t)]^3$  (див. (56)), маємо

$$\mathcal{Z}(t) = \frac{\pi A R_0^{*3} \overline{u^2}}{R^*(t)}. \quad (64)$$

Приймаючи до уваги формули (46) і (57), остаточно одержимо

$$\mathcal{Z}(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \frac{\pi R_0^{*3} \overline{u^2}}{\lambda u^3} (\mathfrak{B} \Gamma_B t)^{-1/3}. \quad (65)$$

Повне число атомів домішки в виділеннях усіх розмірів на одиниці площі міжзеренної межі  $N_i(t)$  (формула (39)) при  $t \rightarrow \infty$  таке:

$$N_i(t) = \frac{4\pi}{3\omega} [R^*(t)]^3 \int_0^{3/2} u^3 \phi(u, \tau) du = \frac{4\pi}{3\omega} [R^*(t)]^3 \mathcal{N}(t) \overline{u^3}, \quad (66)$$

де  $\overline{u^3}$  надається формулою (54). З урахуванням формул (56) і (57)

$$N_i = \frac{4\pi R_0^{*3}}{3\lambda\omega} = n_{B\infty} Q (\delta + Cd). \quad (67)$$

Переконаємося, що саме такий же асимптотичний результат (67) впливає і з закону збереження речовини. Дійсно, оскільки  $x(\tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , з закону збереження речовини в формі (41) одержимо  $N_i(\tau) \rightarrow 4\pi R_0^{*3}/3\lambda\omega$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . З іншого боку, закон збереження речовини у формі (29) з використанням формул (30) і (39) можна представити у вигляді:

$$Q = \Delta_{B0} + \frac{N_{i0}}{n_{B\infty}(\delta + Cd)} = \Delta_B(t) + \frac{N_i(t)}{n_{B\infty}(\delta + Cd)}, \quad (68)$$

де  $N_{i0} \equiv N_i(t)|_{t=0}$ . Оскільки  $\Delta_B(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , із співвідношення (68) маємо  $N_i(t) \rightarrow n_{B\infty} Q (\delta + Cd)$  при  $t \rightarrow \infty$ , що, природно, збігається з результатом (67).

Таким чином, закон збереження речовини (29), (41) дає такий же саме асимптотичний вираз для повного числа атомів домішки в виділеннях  $N_i(t)$ , як і при безпосередньому обчисленні  $N_i(t)$  з знайденою функцією розподілу  $\phi(u, \tau)$  (формула (66)).

Як і в праці [7], представлені вище асимптотичні вирази передбачають виконання нерівності

$$\tau^2 = (\ln x^3)^2 = 9 \left[ \ln \left( \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right) \right]^2 \gg 1 \quad (69)$$

(див. також нерівність (47), специфічну для даної роботи).

Відзначимо ще, що одержані вище формули з деякими змінами можуть бути використаними і для опису процесу ВО сферичних виділень достатньо великого радіуса ( $R \gg L_B$ ) для довільного значення  $D_B/\beta_B$ . В останньому випадку швидкість росту виділення  $dR/dt$  має вигляд (12). Формула (12) формально одержується з формули (11) шляхом заміни в (11)  $\beta_B$  на  $\overline{D}_B/L_B$ , а два других рівняння кінетики ВО, саме рівняння (26) і (33) залишаються в силі. Тоді і всі одержані асимптотичні вирази залишаються в силі після заміни  $\beta_B$  на  $\overline{D}_B/L_B$  в формулах (45) – (49), (56), (65).

## ВИСНОВКИ

Таким чином, теоретично розглянуто процес ВО сферичних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі скінченної товщини  $\delta$  з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна



характерного розміру  $d$  ( $d \gg R \gg \delta$ ) до міжзеренної межі. Передбачається, що ріст виділень лімітується поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки в виділення, що описується феноменологічним поверхневим кінетичним коефіцієнтом  $\beta_B$  або коефіцієнтом  $\mathfrak{B}$ , пов'язаним з  $\beta_B$  формулою (21). Показано, що такий ріст має місце при виконанні нерівності  $(D_B/\beta_B L_B) K_1(R/L_B) \gg K_0(R/L_B)$ . У цьому випадку в припущенні малих пересичень твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі  $\Delta_B(t) \ll 1$  (нерівність (16)) швидкість росту окремого виділення має вигляд (17), (18), (22). Як і в працях [2, 7, 39, 40], при розгляді ансамблю виділень вважається, що ріст виділень відбувається з самоузгодженого середнього поля атомів домішки, що визначається всім ансамблем виділень.

Знайдені асимптотичні (при  $t \rightarrow \infty$ ) часові залежності критичного радіуса виділення  $R^*(t)$  (формули (44)-(47)), пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі  $\Delta_B(t)$  (формула (48)), густини виділень  $\mathcal{N}(t)$  формула (56), функції розподілу виділень за розмірами  $\phi(u, \tau)$  (формули (50)-(54)),  $\mathcal{F}(R, t)$  (формула (60)), коефіцієнта заповнення міжзеренної межі виділеннями  $\mathcal{Z}$  (формула (65)), повного числа атомів домішки в виділеннях на одиниці площі міжзеренної межі  $N_i$  (формула (67)).

Показано, що як і в праці Ліфшиця і Сльозова [7], асимптотично ( $t \rightarrow \infty$ ) середній радіус виділень дорівнює критичному радіусу ( $\bar{R}(t) = R^*(t)$ ), а асимптотична поведінка функції розподілу виділень нової фази за розмірами  $\mathcal{F}(R, t)$  не залежить від вигляду початкової функції розподілу  $\mathcal{F}_0(R)$ . Стисло обговорені границі застосування проведеного розгляду (див. нерівності (47), (69)).

Показано, що одержані в роботі формули з невеликими змінами придатні для опису ВО сферичних виділень достатньо великого радіуса ( $R \gg L_B$ ) для довільного відношення  $D_B/\beta_B$ . Саме всі отримані асимптотичні розв'язки залишаються в силі після заміни  $\beta_B$  на  $\bar{D}_B/L_B$  в формулах (45)-(49), (56), (65).

#### ORCID IDs

Oleksandr Koropov  <https://orcid.org/0000-0001-9318-1960>, Roman Skorokhod  <https://orcid.org/0000-0002-5951-1070>

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1]. Ya.I. Frenkel', *Введение в Теорию Металлов, 4-е изд. [Introduction to the Theory of Metals]* (Nauka, Leningrad, 1972), 424 p. (in Russian)
- [2]. V.V. Slezov and V.V. Sagalovich, *Sov. Phys. Usp.* **30**(1), 23-45 (1987).
- [3]. R.D. Vengrenovitch, *Acta Metall.* **30**(6), 1079-1086 (1982).
- [4]. K.V. Chuistov, *Упорядочение и Распад в Пересыщенных Твердых Растворах [Ordering and Decomposition in Supersaturated Solid Solutions]* (RIO IMF, Kiev, 1999), 216 p. (in Russian)
- [5]. K.V. Chuistov, *Старение Металлических Сплавов, 2-е изд. [Aging of Metallic Alloys]* (Academpriodika, Kiev, 2003), 568 p. (in Russian)
- [6]. W. Ostwald, *Zs. Phys. Chem.* **34**, 495-503 (1900). (in German)
- [7]. I.M. Lifshitz and V.V. Slyozov, *J. Phys. Chem. Solids.* **19**(1-2), 35-50 (1961).
- [8]. C. Wagner, *Zs. Elektrochem.* **65**(7/8), 581-591 (1961). (in German)
- [9]. S.K. Bhattacharyya and K.C. Russell, *Metall. Trans.* **3**(8), 2195-2199 (1972).
- [10]. S.A. Kukushkin and A.V. Osipov, *Phys. Usp.* **41**(10), 983-1014 (1998).
- [11]. A.V. Koropov and V.V. Sagalovich, *Poverkhnost'. Fizika, Khimiya, Mekhanika.* No. 6, 50-55 (1987) (in Russian).
- [12]. A.V. Koropov and V.V. Sagalovich, *Poverkhnost'. Fizika, Khimiya, Mekhanika.* No. 5, 55-63 (1989) (in Russian).
- [13]. A.V. Koropov and V.V. Sagalovich, *Poverkhnost'. Fizika, Khimiya, Mekhanika.* No. 2, 17-26 (1990) (in Russian).
- [14]. A.V. Koropov, P.N. Ostapchuk and V.V. Slezov, *Sov. Phys. Solid State.* **33**(10), 1602-1607 (1991).
- [15]. R.D. Vengrenovich, B.V. Ivanskii and A.V. Moskaliuk, *Physics and Chemistry of Solid State.* **10**(1), 19-30 (2009). (in Ukrainian)
- [16]. A.A. Chernov, in: *Modern Crystallography III. Crystal Growth*, edited by M. Cardona et al. (Springer-Verlag, Heidelberg, 1984), pp. 1-297.
- [17]. A.V. Koropov, S.A. Kukushkin and D.A. Grigor'ev, *Tech. Phys.* **44**(7), 786-791 (1999).
- [18]. A.M. Gusak and G.V. Lutsenko, *Phil. Mag.* **85**(10), 1323-1331 (2005).
- [19]. A.M. Gusak, G.V. Lutsenko and K.N. Tu, *Acta Mater.* **54**(3), 785-791 (2006).
- [20]. B.V. Ivanskii, R.D. Vengrenovich, V.I. Kryvetskiy and Yu.M. Kushnir, *J. Nano- Electron. Phys.* **9**(2), 02025 (2017). (in Ukrainian)
- [21]. V.V. Slezov, *J. Phys. Chem. Solids.* **39**(4), 367-374 (1978).
- [22]. J.A. Marqusee and J. Ross, *J. Chem. Phys.* **80**(1), 536-543 (1984).
- [23]. M. Marder, *Phys. Rev. A.* **36**(2), 858-874 (1987).
- [24]. P.G. Cheremskoi, V.V. Slezov and V.I. Betekhtin, *Поры в Твердом Теле [Pores in Solids]* (Energoatomizdat, Moscow, 1990), 376 p. (in Russian)
- [25]. B. Giron, B. Meerson and P.V. Sasorov, *Phys. Rev. E.* **58**(4), 4213-4216 (1998).
- [26]. V.V. Slezov and J. Schmelzer, *Phys. Rev. E.* **65**, 031506 (2002).
- [27]. V.V. Slezov, *J. Colloid Interface Sci.* **255**(2), 274-292 (2002).

- [28]. P. Guyot, L. Lae and C. Sigli, in: *Thermodynamics, Microstructures and Plasticity*, edited by A. Finel et. al. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003), pp. 107-121.
- [29]. A. Onuki, *Phase Transition Dynamics* (Cambridge, Cambridge University Press, 2004), 724 p.
- [30]. A.S. Shirinian and M.P. Kudyn, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **29**(11), 1537-1553 (2007). (in Russian)
- [31]. A.S. Shirinian and M.P. Kudyn, *Ukr. J. Phys.* **53**(1), 50-60 (2008). (in Ukrainian)
- [32]. R.D. Vengrenovich, B.V. Ivanskii and M.O. Stasyk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **32**(8), 1085-1104 (2010). (in Ukrainian)
- [33]. H. Kreye, *Zs. Metallkunde.* **61**(2), 108-112 (1970). (in German)
- [34]. A.J. Ardell, *Acta Metall.* **20**(4), 601-609 (1972).
- [35]. R.D. Vengrenovich, Yu.V. Gudyma and S.V. Yarema, *Phys. Met. Metallogr.* **91**(3), 228-232 (2001).
- [36]. R.D. Vengrenovich, A.V. Moskalyuk and S.V. Yarema, *Phys. Solid State.* **49**(1), 11-17 (2007).
- [37]. H.O.K. Kirchner, *Metall. Trans.* **2**(10), 2861-2864 (1971).
- [38]. J.W. Martin, R.D. Doherty and B. Cantor, *Stability of Microstructure in Metallic Systems*, 2<sup>nd</sup> ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1997), 426 p.
- [39]. O.V. Koropov, *J. Nano- Electron. Phys.* **6**(1), 01025 (2014). (in Ukrainian)
- [40]. O.V. Koropov, in: *П'ятнадцята Міжнародна Наукова Конференція ім. акад. Михайла Кравчука [Fifteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference]* (NTUU "KPI", Kyiv, 2014), **1**, pp. 162-167. (in Ukrainian)
- [41]. V.N. Voyevodin and I.M. Neklyudov, *Эволюция Структурно-Фазового Состояния и Радиационная Стойкость Конструкционных Материалов [Evolution of the Structure Phase State and Radiation Resistance of Structural Materials]* (Nauk. Dumka, Kiev, 2006), 376 p. (in Russian)
- [42]. B.S. Bokstein, Ch.V. Kopezky and L.S. Shvindlerman, *Термодинамика и Кинетика Границ Зерен в Металлах [Thermodynamics and Kinetics of Grain Boundaries in Metals]* (Metallurgiya, Moscow, 1986), 224 p. (in Russian)
- [43]. I. Kaur, Y. Mishin and W. Gust, *Fundamentals of Grain and Interphase Boundary Diffusion*, 3<sup>rd</sup> rev. and enl. ed. (John Wiley & Sons Ltd., New York, 1995), 512 p.
- [44]. B.S. Bokstein and A.B. Yaroslavtsev, *Диффузия Атомов и Ионов в Твердых Телах [Diffusion of Atoms and Ions in Solids]* (MISIS, Moscow, 2005), 362 p. (in Russian)
- [45]. A.V. Koropov, *Visnyk of Sumy State University. Seriya: Fizyka, Matematika, Mekhanika.* **9**(93), 49-62 (2006). (in Russian)
- [46]. A.V. Koropov, *Phys. Solid State.* **50**(11), 2184-2189 (2008).
- [47]. A.V. Koropov, *J. Surf. Investig. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* **5**(4), 780-786 (2011).
- [48]. A.V. Koropov, *J. Nano- Electron. Phys.* **2**(4), 31-46 (2010).
- [49]. A.V. Koropov, *Tech. Phys.* **56**(12), 1781-1786 (2011).
- [50]. F. Olver, in: *Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables]* (Transl. from Engl.), edited by M. Abramowitz and I.A. Stegun (Nauka, Moscow, 1979), pp. 177-253. (in Russian)

Алла Таньшина

*К 100-летию юбилею НАН Украины & 90-годовщине основания НИЦ «ХФТИ»**...В Харькове была создана мощная школа современной теоретической физики.  
Академик Б. Е. Патон, президент НАН Украины***ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМЕНИ А. И. АХИЕЗЕРА***Продолжение. Начало в №4 (2018)***Александр Ильич Ахиезер***Мне в жизни повезло дважды:  
первый раз – с учителем Ландау,  
а второй – с учениками.  
Академик А.И. Ахиезер*

С именем Александра Ильича Ахиезера связано дальнейшее становление и развитие харьковской школы теоретической физики.

Александр Ильич, после переезда Л.Д. Ландау в Москву, стал его преемником на посту руководителя теоретического отдела УФТИ. По воспоминаниям Ласло Тиссы, иностранного сотрудника теоретического отдела Ландау, «Ахиезер прошел суровое испытание, показавшее, что, когда настанет время, он сможет стать преемником Ландау... На сей раз Ландау ускользнул от своих харьковских врагов. Но его враги еще перегруппируются, и Ландау будет арестован в апреле 1938 г. Но в Москве у него есть могучий и отважный друг Капица, который освободит его в следующем году. Пять славных лет, проведенных Ландау в Харькове, закончились...

**Ахиезер стал старшим теоретиком УФТИ... Он сохранял традиции Ландау как в отношении качества, так и широты приложений во всех областях теоретической физики. Ландау, очевидно, им гордился»** [1, с.316-317].

Александр Ильич Ахиезер был бессменным руководителем отдела теоретической физики в течение полувека – с 1938 по 1988 год. Обратимся к недавно опубликованным мемуарным заметкам академика Виктора Григорьевича Барьяхтара, одного из первых учеников А.И. Ахиезера, дабы не допустить неточностей в персональном составе тогдашних теоретических отделов:

*«В теоретическом отделе А.И. Ахиезера (по его, разумеется, отбору) у нас собралась очень хорошая компания: кроме меня С.В. Пелетминский, П.И. Фомин (все мы с одного курса, а сейчас снова в одной “компании” – члены НАН Украины), К.Н. Степанов, Д.В. Волков, В.Ф. Алексин (они с курса, на год старше нашего).*

*Д.В. Волков (ставший академиком НАН Украины и без всякого преувеличения выдающимся теоретиком в области физики элементарных частиц) и В.Ф. Алексин, к сожалению, уже ушли в лучший из миров, а К.Н. Степанов – член-корреспондент НАН Украины.*

*В соседнем отделе И.М. Лифшица (известного всем как Ильмех) также работали выпускники ядерного отделения – В.И. Герасименко, В.В. Андреев, Е.В. Инопин, В. В. Слёзов (правда, последний перешёл туда из Ленинградского политехнического института)»* [2, с.12].

На сегодняшний день, принимая во внимание *секретные нюансы\** того времени, представляется возможным лишь бегло очертить научное наследие А. И. Ахиезера и его научной школы:

1941-1947 гг. – предсказание «холодных» нейтронов, пионерские работы по рассеянию медленных нейтронов кристаллами (совместно с И. Я. Померанчуком);

1946 г. – разработка концепции взаимодействующих между собой и с фонами магнонов, на основе которой впоследствии развита общая теория релаксационных процессов в магнетиках;

1947 г. – предсказано явление электронного циклотронного резонанса (совместно с Л. Э. Паргамаником);

1948 г. – развита теория резонансных ядерных реакций;

1948 г. – сформулировано условие эволюционности и разработан критерий устойчивости магнитогидродинамических волн (совместно с Г. Я. Любарским и Р. В. Половиным);

1949 г. – предсказано явление пучковой неустойчивости плазмы (совместно с Я. Б. Файнбергом);

1949 г. – построена теория дифракционного рассеяния быстрых заряженных частиц ядрами;

1955 г. – предсказан эффект дифракционного расщепления дейтрона и построена его теория (совместно с А. Г. Ситенко);

---

\*По воспоминаниям академика В. Ф. Зеленского, директора ХФТИ в 1981-1997 гг., «с середины 60-х годов начал резко расти вклад института в оборонные отрасли: ядерную, ракетную, космическую и др. Качественно изменился и характер оборонных работ.

Если раньше институт привлекался только к решению задач, направленных на обеспечение Программы Курчатова, то теперь он уже начинает работать в тесном контакте с Главными конструкторами и производственниками над разработкой, изготовлением и испытанием новых образцов военной техники.

**Как результат этого – резко повысился уровень секретности работ и, соответственно, уровень режимных требований при их выполнении»** [3, с.501].

1956 г. – открытие явления магнитоакустического резонанса (совместно с В. Г. Барьяхтаром\* и С. В. Пелетминским);

1957 г. – разработана теория поглощения ультразвука в металлах (совместно с М. И. Кагановым и Г. Я. Любарским);

1957 г. – исследовано рассеяние электромагнитных волн в плазме на флуктуациях электронов и ионов (совместно с А. Г. Ситенко и И. Г. Проходой);

1959 г. – построена теория кинетических, релаксационных и высокочастотных процессов в ферродиелектриках (совместно с В. Г. Барьяхтаром и С. В. Пелетминским);

1962-1963 гг. – выполнен цикл работ по явлениям переноса в плазме (совместно с В. Ф. Алексиним, В. Г. Барьяхтаром и С. В. Пелетминским);

1963 г. – развита теория радиационных поправок к ряду квантовоэлектро- динамических процессов при высоких энергиях (совместно с Р. В. Половиним);

1964 г. – выполнен цикл работ по электродинамике адронов, в частности, сформулировано правило эквидистантности для различных электромагнитных характеристик адронов, модель кварков распространена на электромагнитные процессы с участием адронов (совместно с М.П. Рекало); 1974-1982 гг. – выполнен цикл работ по теории процессов излучения каналированных электронов и позитронов в кристаллах (совместно с В.Ф. Болдышевым\*\* и Н.Ф. Шульгой);

1975-1995 гг. – развита теория квантовоэлектродинамических процессов при высоких энергиях в кристаллах (совместно с Н. Ф. Шульгой).

Дополняет приведенную выше информацию и сохранившееся до наших дней в Научном архиве Президиума Национальной академии наук Украины экспертное заключение по выборам А. И. Ахиезера в члены-корреспонденты АН УССР, за подписью академика Н. Н. Боголюбова:

*«Профессор А. И. Ахиезер является выдающимся советским физиком-теоретиком, внесшим выдающийся вклад в развитие науки. Он является одним из наиболее активно работающих в области теоретической физики советских ученых.*

*Им выполнено около ста работ, посвященных различным проблемам ядерной физики, квантовой электродинамики и теории ускорителей заряженных частиц. Ряд трудных и остроумных исследований, давших фундаментальные результаты, внесли существенный вклад в разработку этих проблем и сделали его имя известным и авторитетным среди ученых Советского Союза и за рубежом.*

*Профессор А. И. Ахиезер является одним из лучших советских физиков-теоретиков, работающих в области физики атомного ядра и квантовой электродинамики. Ему принадлежат первоклассные работы по рассеянию  $\gamma$ -квантов ядрами, по дифракционному рассеянию ядерных частиц. Им установлена возможность нового явления – дифракционного расщепления дейтронов ядрами.*

*А. И. Ахиезер является автором пионерских работ по рассеянию нейтронов в кристаллах, которые приобрели особенно большую важность в связи с вопросом о замедлении нейтронов. Большое значение имела его первая работа по определению критического размеров реактора с учетом замедления нейтронов.*

*Особенно нужно отметить работы профессора А. И. Ахиезера и его школы по теории линейных ускорителей заряженных частиц\*\*\* и теории плазмы\*\*\*\*...*

\*Из воспоминаний академика В. Г. Барьяхтара:

«А. И. Ахиезером была создана “команда”: Ахиезер – Барьяхтар – Пелетминский, которая проработала в дружбе, согласии и с общепризнанными успехами 16 лет (1956-1972). Я не знаю другой такой столь квалифицированной команды, которая так согласованно и так продолжительно работала бы вместе.

Из множества результатов, полученных нами совместно, отмечу следующие: теория магнито-акустического резонанса в магнетиках (диплом на открытие с приоритетом от 1956 года, Государственная премия Украины 1987 года); теория обменной релаксации и релаксации магнитного момента в ферромагнетиках; квантовая теория термогальваномагнитных явлений в металлах и полупроводниках при низких температурах; построение операторов поверхностных электрического тока и теплового потока; теория релаксации разряженной плазмы в ультрасильных магнитных полях; теория пучковой неустойчивости в магнетиках; теория высокочастотной восприимчивости ферродиелектриков.

Этим же коллективом написана монография “Спинные волны” (в 1967 году изданная на русском языке, а в 1968 году – на английском), которая вот уже 43 года, практически не устаревая, широко используется и цитируется в научной литературе. Общее число ссылок на эту книгу за прошедшие годы составляет многие сотни (более 800)» [2, с.15-16].

\*\*Из газетной заметки В. Ф. Болдышева “Школа академика Ахиезера”:

«В 1971 году Александр Ильич Ахиезер в соавторстве с коллегами по отделу выпустил первую работу, посвященную физике взаимодействия электрически заряженных частиц в кристаллах.

В то время в научном мире считалось, что эта тематика практически исчерпала себя. Но Александр Ильич вместе с учениками нашел другие, оригинальные подступы к решению проблемы. И впоследствии эта работа инициировала во многих лабораториях мира проведение под новым углом зрения углублённых исследований по, казалось бы, бесперспективной теме.

А в самом ХФТИ даже был создан специальный отдел, который возглавляет ученик Ахиезера Николай Фёдорович Шульга. И по результативности исследований отдел этот заметно обошел все зарубежные научные лаборатории такого же профиля» [«Вечерний Харьков» от 25 июня 1996 г.].

\*\*\* Из воспоминаний профессора Г. Я. Любарского: «Эта тема, “спущенная сверху”, была объектом пристального внимания директора института Кирилла Дмитриевича Синельникова. В работу были втянуты оба теоретика, и работы хватало на всех...

Никто из нас до этого ускорителями не занимался, и первое, что мы постарались сделать, – это “отерорфизичить” ускоритель. Говоря проще, мы постарались отыскать все малые параметры задачи и максимально использовать их малость. Это была идея наших старших товарищей АИ и ИМ. Трудную задачу расчёта электромагнитного поля взял на себя дополнительно Яков Борисович Файнберг.

Мы часто докладывали директору, как продвигается наша работа. Он всегда слушал уважительно, как бы желая подчеркнуть, что мы

*А. И. Ахиезер является одним из ведущих в СССР работников в области плазмы, получившим весьма важные результаты, касающиеся поведения пучков быстрых частиц в плазме и их устойчивости, а также по нелинейным волнам в плазме. Исследования А. И. Ахиезера по диффузии и рассеянию нейтронов и дифракционному рассеянию частиц завершилось изданием широко известной монографии по теории ядра, удостоенной АН СССР премии имени Л. И. Мандельштама.*

*А. И. Ахиезер одним из первых в Союзе стал заниматься вопросом квантовой электродинамики, в частности ему принадлежат первые работы по нелинейной электродинамике.*

*Его книга по квантовой электродинамике признаётся лучшей в мировой литературе по этой важнейшей для теоретической физики области. Большое значение имеет исследование А. И. Ахиезера по квантовой теории ферромагнетизма и по теории кинетических процессов в металлах и диэлектриках.*

*А. И. Ахиезер в своей работе теснейшим образом связан с экспериментальными исследованиями\*\*\*\*, ведущимися в ФТИ АН УССР и других научных учреждениях. Всё это показывает, насколько широк диапазон проблематики работ А. И. Ахиезера, которые отличаются актуальностью и глубоким проникновением в физическую сущность процессов...».*

Нельзя не восхититься и мужеством Александра Ильича Ахиезера, с которым он принял непоправимый удар судьбы – полную потерю зрения в 1995 году. (По этому поводу Александр Ильич как-то сказал: «*Николай Николаевич Боголюбов учил меня, что жаловаться на Бога и на судьбу нельзя.*»)

Его дочь Зоя вот как описывает те годы: «*Его мозг оставался молодым. Отца невозможно было представить немощным стариком. Ученики и сотрудники приезжали несколько раз в неделю. Но этого ему было мало. Новые мысли и идеи появлялись у него быстрее, чем реализовывались старые. В таких случаях папа просил меня записать главное, в уме проделывал сложные математические выкладки...*

*Но бывало, что проходила неделя, а никто не приезжал (или Шульга уехал в командировку, или приехал кто-нибудь с докладом, или кто-то из “ребят” заболел и поэтому не успел подготовиться). В такие моменты АИ с грустью говорил: “Если бы у меня были глаза, мне никто не был бы нужен. Я бы всё сделал сам”...*

*По вторникам и четвергам обычно приезжали работать Сергей Владимирович с “ребятами”...*

*Николай Федорович Шульга приезжал по субботам или воскресеньям... С Николаем Федоровичем работали обычно долго. Кроме науки обсуждали различные институтские проблемы» [1, с. 268-270].*

Нельзя не вспомнить и следующие слова Александра Ильича – крик его души: «**Я готов отдать все органы чувств, лишь бы вернулось ко мне зрение хотя бы одним глазом.**».

Ко всему этому стоит заметить и то, что волновала Александра Ильича не только наука: он искренне переживал за судьбу страны и любимого института. До сих пор памятны его слова, сказанные им в конце 1994 года: «*Институт, которому я отдал шестьдесят лет жизни, фактически развалился. Душа болит, но куда деться! Слава Богу, что есть ещё несколько энтузиастов, с которыми можно что-то делать, а иначе нужно было бы наложить на себя руки» [1, с.101].*

И все же Александр Ильич не падал духом, не предавался отчаянию. Оптимизм в сочетании с нравственным началом – характерная черта и его научной школы.

физики-теоретики, а он “просто” физик. К нему всегда можно было зайти запросто. Мы этим, конечно, не злоупотребляли.

В кабинете у Кирилла Дмитриевича оба начальника теоретических отделов старались показать нас с лучшей стороны, они брали слово только для того, чтобы прийти на помощь докладчику. Впрочем, мы и не воспринимали АИ и ИМ как начальников. Они были для нас доброжелательными мудрецами. Оба они обладали одной поражающей нас способностью. Если не знать теорфизику достаточно глубоко, то легко получить абсурдный результат. В таких случаях и Александр Ильич, и Илья Михайлович с легкостью выводили нас из затруднений» [1, с.212-213].

\*\*\*\**Из воспоминаний члена-корреспондента К. Н. Степанова: «С 1956 года в институт стали регулярно поступать закрытые отчеты ЛИПАНа, которые докладывались на семинарах, проходивших в кабинете К. Д. Синельникова...»*

К участию в решении проблемы УТС были привлечены и многие сотрудники теоретического отдела АИ: Я. Б. Файнберг и Н. П. Селиванов, а также молодые научные сотрудники В. Ф. Алексин, Р. В. Половин, Н. А. Хижняк, В. И. Курилко, ваш покорный слуга и др...

**АИ не обращал внимания на то, что вот сейчас, в данный момент, термояд нельзя сделать, он смотрел, что нового можно увидеть в плазме с термоядерными параметрами» [1, с. 289-290].**

\*\*\*\*\**Из статьи академика И. В. Курчатова «Развитие атомной физики на Украине»:*

«В январе нынешнего года я, как в старое время, провел в этом институте несколько дней, доставивших мне много радости...

В настоящее время в области исследования ядерных реакций при энергиях сталкивающихся частиц от одного до ста миллионов электронвольт Украина, благодаря работам Физико-технического института Академии наук УССР в Харькове и Института физики АН УССР в Киеве, вышла на первое место в ряду братских республик нашей великой Родины...

**В настоящее время в Харьковском физико-техническом институте начаты работы над главной проблемой современной науки – проблемой управления термоядерными реакциями.** Успешное решение этой задачи откроет поистине невиданные перспективы.

В Харьковском физико-техническом институте работы по управляемым термоядерным реакциям под общим научным руководством К. Д. Синельникова начаты всего полтора-два года назад. Но за это короткое время выполнены важные теоретические и экспериментальные исследования свойств ионизированной плазмы» [Газета «Правда» от 7 февраля 1960 года].

29 августа 1982 года «Правда» рапортовала:

«**Новый шаг на пути к созданию управляемого термоядерного синтеза сделали ученые Харькова.** В Физико-техническом институте Академии наук УССР начала действовать одна из крупнейших в мире стеллараторных установок – “Ураган-3”. Широкая программа исследований предусматривает изучение закономерностей поведения плазмы, нагретой до нескольких десятков миллионов градусов... Первый стелларатор этого типа был создан в нашем институте в 1970 году. С тех пор в рамках общесоюзной термоядерной программы в Харькове сконструировано несколько подобных систем.

Ученых привлекает их способность работать в постоянном режиме, необходимом для функционирования будущих промышленных реакторов».



*Институт теоретической физики имени А. И. Ахиезера*

Если у меня есть серьезная заслуга перед страной, которая приносила **и будет приносить плоды** – то эта заслуга одна: это то, что я культивировал теоретическую физику в Харькове и тем самым в СССР.

*Академик И. В. Обреимов,  
директор-организатор УФТИ*

31 января 1996 года – дата основания Института теоретической физики имени А. И. Ахиезера ННЦ «ХФТИ» НАН Украины.

Академик А. И. Ахиезер в своих мемуарных воспоминаниях объективно осветил – при исчерпывающей полноте и сдержанной краткости – центральные события и знаковые лица его предыстории: *«После отъезда Ландау из Харькова теоретическим отделом руководил автор этих строк, после войны из него выделился другой отдел, которым руководил И. М. Лифшиц.*

*Сейчас бывшим теоретическим отделом Ландау руководит академик С. В. Пелетминский, а в Национальном научном центре “Харьковский физико-технический институт”, так теперь называется бывший УФТИ, есть ряд теоретических отделов, и все они объединены в единый Институт теоретической физики, директором которого есть мой ученик профессор Н. Ф. Шульга»* [4, с.1025].

Становление же Института теоретической физики пришлось на период глобальных социальных катаклизмов. Распад СССР... Шоковая инфляция... Непонятная приватизация... Растущая безработица... Удручающее финансирование науки...

Некоторые, устав от безденежья, вообще ушли из науки, а другие – из-за «стеснённых обстоятельств» – вынуждены были искать лучшей доли в чужих краях. Да и безудержный отток за границу первоклассных ученых весьма серьёзно выхолостил отечественные научные центры.

Нельзя умолчать и о том, что тогда многие оказались на грани физического выживания. И далеко не каждый мог позволить себе отсутствие... огорода<sup>\*\*\*\*\*</sup>, ибо покупка едва ли не всех продуктов питания была настоящей проблемой.

Однако институт выстоял и сумел сохранить свой уникальный научный потенциал, ибо остались оптимисты – те, кто действительно был увлечен наукой. И надо отдать должное их неистощимому энтузиазму, завидному терпению и преданности науке.

Ныне же представляется возможным реконструировать особенности периода становления Института теоретической физики из *первых уст* – исторических заметок директора-организатора института академика Николая Фёдоровича Шульги (по материалам его мемориальной статьи об академике Д. В. Волкове):

«В начале 90-х годов, после развала СССР, в институте наступили трудные времена в связи с резким сокращением финансирования и неопределённостью с принадлежностью института. Дмитрий Васильевич очень переживал за то, что происходило в бывшем СССР, в Украине и в ХФТИ...

Руководство ХФТИ предпринимало отчаянные попытки с тем, чтобы изменить ситуацию к лучшему. В 1993 году вышел Указ Президента Украины о присвоении ХФТИ статуса Национального научного центра с образованием внутри него пяти научно-исследовательских институтов. Наиболее подходящей организацией, в которую должен был перейти ХФТИ, была Академия наук Украины. Такой переход, однако, по разным причинам не получался.

Подразделения ХФТИ, в которых значительную часть работ составляли прикладные исследования, довольно быстро были преобразованы в институты. Это Институт физики твердого тела и радиационного материаловедения, Институт физики плазмы и Институт плазменной электроники и новых методов ускорения.

Сложнее оказалась ситуация с ядерщиками и теоретиками. Подразделения, в которых велись эти исследования, оказались в наиболее тяжелом положении, так как основная часть их работ проводилась в области фундаментальной физики. Дополнительное финансирование на выполнение таких исследований было практически невозможно найти. Это привело к возникновению тенденций к тому, чтобы если не весь ХФТИ, то хотя бы часть его перешла в Академию наук Украины.

Дмитрий Васильевич Волков к этому времени был уже академиком НАН Украины. Поэтому неудивительно, что ряд ведущих ядерщиков ХФТИ, которые радели за такой переход в Академию, обратились

\*\*\*\*\*Примета времени: сотрудникам ХФТИ также были выделены близлежащие к институту участки земли под огороды.

Из воспоминаний Зои Спольник, дочери академика А. И. Ахиезера:

«Началась перестройка. Вскоре распался Союз.

На науку выделялось денег всё меньше и меньше. Зарплату выплачивали нерегулярно, с большим опозданием. Многие научные работники оказались в катастрофическом положении.

Выручал огород. Все – от лаборантов до докторов наук – сажали картошку. Каждый старался где-то как-то подзаработать. Папа очень переживал. Переживал за своих сотрудников, переживал за любимый институт...

АИ было горько, тяжело и обидно из-за распада Союза, из-за нищенского состояния науки, из-за деградации общества. Он был патриотом и всегда любил свою страну – всю страну, а не какую-нибудь её республику. Иногда он говорил: “Как я мог дожить до этого?”» [1, с. 266].

к Дмитрию Васильевичу с предложением, чтобы он стал в центре этих событий. Дмитрий Васильевич, хотя и плохо понимал организационную сторону вопроса, активно подключился к осуществлению этой идеи. Речь шла об образовании Института высоких энергий при Академии наук Украины на базе отделений ядерной физики и теоретделов ХФТИ.

У меня же по этому поводу, несмотря на общую поддержку идеи, была особая позиция. Она заключалась, как мне казалось, в практической её неосуществимости. Связано это с тем, что ХФТИ имеет общие коммуникационные сети, единую энергосистему и другие общие структуры. Поэтому из него невозможно выделить какую-то структуру, имеющую крупные базовые установки, такие как ускоритель. Да и Академии наук это было не очень-то нужно, так как она в то время находилась далеко не в лучшем положении. Академии нужен был весь ХФТИ как целое с тем, чтобы подключить ХФТИ к решению задач, позволяющих улучшить положение дел и в Академии.

Что касается теоретиков, то чувствовалось, что далеко не все из них согласились бы на такой переход, так как тематика теоретделов была гораздо более широкой, чем физика высоких энергий. Поэтому я отказался от участия в реализации этой идеи, считая её бесперспективной, о чём прямо сказал Дмитрию Васильевичу.

Ситуация вскоре разрешилась. Данный вопрос был поднят на ученом совете отделения ядерной физики. В результате тайного голосования большинство ведущих сотрудников отделения, однако, идею не поддержали.

Дмитрий Васильевич был очень раздосадован случившимся, в особенности тем, что идею не поддержали даже некоторые из тех сотрудников, которые первоначально просили Дмитрия Васильевича об этом (несмотря на то, что голосование было тайным, результаты в сложившейся ситуации логически “просчитывались”).

Между тем, ситуация в ХФТИ продолжалась оставаться очень сложной. Всё острее становился вопрос об образовании институтов теоретической и ядерной физики. Предполагалось, что образование этих институтов изменит ситуацию к лучшему в связи с созданием новой организационной структуры и возможностью отдельного финансирования.

С весьма неожиданным для меня предложением обратился Александр Ильич Ахиезер. Он предложил мне заняться организацией Института теоретической физики и возглавить этот институт.

Естественно, предварительно он обсудил этот вопрос с Дмитрием Васильевичем Волковым и Сергеем Владимировичем Пелетминским, сделав им аналогичное предложение. Дмитрий Васильевич и Сергей Владимирович, однако, отказались, сославшись на нездоровье и на то, что данный вопрос необходимо решать стратегически, так как процесс становления такого института должен занять большой промежуток времени.

Согласиться же мне на такое предложение было не очень-то просто по многим причинам. Прежде всего, более 10 лет я находился организационно вне теоретделов, хотя хорошо знал, что там происходит. Поэтому было непонятно, как воспримется в теоретделах моё возвращение. Было также неясно и то, как воспримется уход из экспериментального отдела, поскольку у ядерщиков происходили такие же события, как и у теоретиков с созданием института.

Был и ряд других, большей частью объективных причин для сомнений в том, что у меня может что-то получиться. А именно: после развала СССР в ННЦ “ХФТИ” возникла сложная ситуация, связанная с крайне недостаточным финансированием научных работ. Практически прекратились исследования на крупных физических установках, таких как всемирно известный ускоритель электронов на 2000 мегаэлектронвольт, в результате чего “потребность” экспериментаторов в связи с теоретиками резко уменьшилась.

Библиотека института практически перестала получать научную литературу, особенно иностранные журналы. Зимой в рабочих помещениях даже в верхней одежде невозможно было работать. Значительно снизилась активность научных семинаров.

Зарплата стала очень низкой, иногда она не превышала и пяти долларов в месяц. И даже при такой зарплате научные сотрудники должны были уходить в неоплачиваемые отпуска. Прекратился приём на работу молодых специалистов.

Особенно трудно было, естественно, теоретикам, так как они не имели возможности дополнительного заработка. Всё это привело к тому, что некоторые сотрудники ушли из института, а другие – вообще выехали за пределы Украины. Но хуже всего было то, что резко усложнились отношения между людьми. Поэтому нужны были экстренные меры по сохранению высококвалифицированных научных кадров.

В этой ситуации без твердой позиции и поддержки А. И. Ахиезера, Д. В. Волкова и С. В. Пелетминского у меня бы ничего не получилось. Но и этого было ещё недостаточно. Необходима была, прежде всего, поддержка коллектива теоретиков. Дмитрий Васильевич это хорошо понимал.

Поэтому по его инициативе в начале декабря 1995 года было собрано совещание ряда ведущих теоретиков с целью обсудить вопрос об организации Института теоретической физики. Присутствовали на том совещании, насколько я помню, Д. В. Волков, С. В. Пелетминский, Е. В. Инопин, В. Ф. Алексин, А. С. Бакай, В. В. Слёзов, В. Ф. Болдышев, А. А. Яценко, Р. В. Половин. Пригласил туда Дмитрий Васильевич и меня. Вёл это совещание сам Д. В. Волков.

Все участники совещания сразу же поддержали идею о создании Института теоретической физики. Затем Дмитрий Васильевич изложил предложение А. И. Ахиезера о том, чтобы я занялся организационными вопросами создания института и возглавил затем его.

Обсуждение этого вопроса было длинным и непростым. Сразу же были высказаны мнения о том, что делать этого не стоит, поскольку такой институт, учитывая его историю, должен возглавить “как минимум” член Академии наук Украины, и что этот вопрос необходимо рассматривать с учётом вопроса о создании Института ядерной физики. Поэтому всё внимание было сосредоточено на Д. В. Волкове и С. В. Пелетминском.

Дмитрий Васильевич и Сергей Владимирович, однако, отказались, аргументируя свою позицию отмеченными выше соображениями. Других предложений не было. Затем Дмитрий Васильевич предложил изложить моё видение вопроса об образовании Института теоретической физики.

Основная часть моих предложений заключалась в следующем. Прежде всего, необходимо было снять, или хотя бы ослабить противоречия, накопившиеся между теоретиками, и сделать более мобильными отделы института.

Для этого предлагалось сделать структуру института близкой к структуре академических институтов, предоставив возможность преобразования девяти теоретических лабораторий в теоретические отделы нового института: при условии выполнения требований Академии наук к таким отделам – в каждом отделе должно быть не менее 10 человек, пять из которых должны быть докторами или кандидатами наук.

Кроме того, предлагалось на период образования института разрешить переход сотрудников из одной лаборатории в другую с сохранением ставки. Тем самым каждый сотрудник института принимал решение самостоятельно – где ему работать (для теоретиков, учитывая специфику их работы, это возможно было сделать).

Дмитрий Васильевич эти предложения поддержал с большим энтузиазмом, видя в них элементы зарождающейся демократии. Поддержало их и большинство присутствующих.

Именно эти предложения и пути их реализации мы обсуждали с Дмитрием Васильевичем при встрече, которая состоялась первого января 1996 года.

Дмитрий Васильевич очень хотел, чтобы к теоретикам вернулся дух подъёма и доброжелательности, который был в 50-70-е годы, чтобы активизировались семинары, появился приток молодёжи, чтобы теоретики, как и в былые времена, собирались в неформальной обстановке по праздникам. Пятого января 1996 года, к сожалению, Дмитрия Васильевича не стало.

В настоящее время можно сказать следующее: в значительной степени всё то, о чём мы говорили с Дмитрием Васильевичем, воплотилось в жизнь. Девять теоретических лабораторий ХФТИ преобразовались в шесть теоретических отделов Института теоретической физики.

Практически сразу же было снято напряжение в отношениях между сотрудниками, так как каждый принимал решение о том, в каком отделе ему работать, только за себя. Активизировались научные семинары.

С целью более близкого ознакомления студентов с тем, чем занимаются учёные в Институте теоретической физики, на физико-техническом факультете Харьковского национального университета был организован общефизический семинар “Проблемы современной физики”.

Институт начал наполняться молодыми голосами. Всё чаще сотрудники института стали собираться в неформальной обстановке практически всем коллективом, чтобы обсудить важнейшие события. Думаю, что всему этому Дмитрий Васильевич был бы рад» [5, с. 53-58].

*Продолжение следует*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.I. Akhiezer, *Очерки и воспоминания [Essays and Memories]*, (Kharkov, Fakt, 2003), p. 430. (in Russian)
2. V.G. Barjahtar, *Моя траектория [My trajectory]*, (Kyiv, Naukova Dumka, 2010), p. 80. (in Russian)
3. V.G. Lazarev, *Жизнь в науке. Избранные труды и воспоминания [Life in Science. Selected Works and Memories]*, (Kharkov, NSC KIPT, 2004), p. 702. (in Russian)
4. O.I. Akhiezer, *Ukrainian Journal of Physics*, **43**(9), 1021-1025 (1998). (in Ukrainian)
5. S.V. Peletminsky, editor, *Член-корреспондент НАН Украины Николай Федорович Шульга. К 60-летию со дня рождения [Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine Nikolay Fedorovich Shulga. To the 60th anniversary of the birth]*, (Kharkov, Kvant, 2007), p. 64. (in Russian)

PACS: here you must specify PACS codes

## INSTRUCTIONS FOR PREPARING MANUSCRIPT IN EAST EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS

<sup>1</sup>N.N. Author, <sup>2</sup>N.N. Co-author(s)

<sup>1</sup>Affiliation of first author

<sup>2</sup>Affiliation of second author (if different from first Authors)

<sup>1</sup>E-mail: [corresponding\\_authors@mail.com](mailto:corresponding_authors@mail.com), <sup>1</sup>ORCID ID

<sup>2</sup>E-mail: [next\\_authors@mail.com](mailto:next_authors@mail.com), <sup>2</sup>ORCID ID

Received January 4, 2019

Each paper must begin with an abstract. The abstract should be typed in the same manner as the body text (see below). Please note that these Instructions are typed just like the manuscripts should be. The abstract must have at least 1800 phonetic symbols, supplying general information about the achievements, and objectives of the paper, experimental technique, methods applied, significant results and conclusions. Page layout: the text should be printed on the paper A4 format, at least 5 pages, with margins of: Top - 3, Bottom, Left and Right - 2 cm. The abstract should be presented in English (only for foreign authors), Ukraine and Russian.

**KEYWORDS:** there, must, be, at least, 5 keywords

This is introduction section. This paper contains instructions for preparing the manuscripts. The text should be prepared in .doc format (using MS Word).

### INSTRUCTIONS

The text should be typed as follows:

- title: Times New Roman, 12 pt, ALL CAPS, bold, 1 spacing, centred;
- authors: name, initials and family names; Times New Roman, 12 pt, bold, 1 spacing, centred;
- affiliation(s): Times New Roman, 9 pt, italic, 1 spacing, centred;
- abstract: Times New Roman, 9 pt, 1 spacing, justified;
- body text: Times New Roman, 10 pt, 1 spacing, justified; paragraphs in sections should be indented right (tabulated) for 0.75 cm;
- section titles: Times New Roman, 10 pt, bold, 1 spacing, centred, without numbering, one line should be left, blank above section title;
- subsection titles: Times New Roman, 10 pt, bold, 1 spacing, centred, without numbering in accordance to the section (see below), one line should be left blank above subsection title;
- figure captions: width of the figure should be 85 or 170 mm, figures should be numbered (Fig. 1) and titled below figures using sentence format, Times New Roman, 9 pt, 1 spacing, centred (if one line) or justified (if more than one line); one line should be left blank below figure captions;
- table captions: width of the table should be 85 or 170 mm, tables should be numbered (Table 1.) and titled above tables using sentence format, Times New Roman, 10 pt, 1 spacing, centred (if one line) or justified (if more than one line), tables should be formatted with a single-line box around the outside border and single ruling lines between rows and columns; one line should be left blank below tables;
- equations: place equations centred, numbered in Arabic (1), flush right, equations should be specially prepared in MathType; one line should be left blank below and above equation.

### Additional instructions

Numerated figures and tables should be embedded in your text and placed after they are cited. Only black and white drawings and sharp photographs are acceptable. Letters in the figures should be 3 mm high. The figures should be presented in one of the following graphic formats: jpg, gif, pcx, bmp, tif.

### REFERENCES

Cite references in AIP style (<https://guides.lib.monash.edu/citing-referencing/aip>). Numbering in the order of referring in the text, e.g. [1], [2-5], etc. References should be listed in numerical order of citation in the text at the end of the paper (justified), Times New Roman, 9 pt, 1 spacing.

#### Journal Articles

- [1]. T. Mikolajick, C. Dehm, W. Hartner, I. Kasko, M. J. Kastner, N. Nagel, M. Moert, and C. Mazure, *Microelectron. Reliab.* **41**, 947 (2001).
- [2]. S. Bushkova, B.K. Ostafiychuk and O.V. Copeniev, *Physics and Chemistry of Solid State.* **15**(1), 182-185 (2014). (in Ukrainian)
- [3]. M. Yoshimura, E. Nakai, K. Tomioka, and T. Fukui, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 243111 (2013), doi: [10.7567/APEX.6.052301](https://doi.org/10.7567/APEX.6.052301).

#### E-print resources with collaboration research

- [4]. Aaboud et al. (ATLAS Collaboration), *Eur. Phys. J. C*, **77**, 531 (2017).
- [5]. OR: M. Aaboud et al. (ATLAS Collaboration), *Eur. Phys. J. C*, **77**, 531 (2017), doi: [10.1140/epjc/s10052-017-5061-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5061-9)
- [6]. Sjöstrand et al., *Comput. Phys. Commun.* **191**, 159-177 (2015), e-print [arXiv:1410.3012](https://arxiv.org/abs/1410.3012).
- [7]. Amin et al. e-print [arXiv:1006.3075](https://arxiv.org/abs/1006.3075) (2010).
- [8]. Boudreau, C. Escobar, J. Mueller, K. Sapp, and J. Su, (2013), e-print [arXiv:1304.5639](https://arxiv.org/abs/1304.5639).

#### Books

- [9]. S. Inoue and K.R. Spring, *Video Microscopy: The fundamentals*, 2nd ed. (Plenum, New York, 1997), pp. 19-24.
- [10]. I. Gonsky, T.P. Maksymchuk and M.I. Kalinsky, *Біохімія Людини [Biochemistry of Man]*, (Ukrmedknyga, Ternopil, 2002), p. 16. (in Ukrainian)
- [11]. V.V. Mal'tsev, *Металлографія промислових кольорових металів і сплавів [Metallography of industrial nonferrous metals and alloys]*, (Moscow, Metallurgiya, 1970), p. 364. (in Russian)
- [12]. M. Garkusha, *Основи Фізики Наніпровідників [Fundamentals of Semiconductor Physics]* (Vysshaja shkola, Moscow, 1982), in: <http://gagago.ru/g20-osnovi-fiziki-napivprovodnikiv-pidruchnik-dlya-tehniku.html>.

#### Book Chapters

- [13]. M. Gonzalez-Leal, P. Krecmer, J. Prokop and S.R. Elliot, in: *Photo-Induced Metastability in Amorphous Semiconductors*, edited by A.V. Kolobov (Wiley-VCH, Weinheim, 2003), pp. 338-340.
- [14]. A. Kochelap and S.I. Peкар, in: *Теорія Спонтанної і Стимульованої Хемілюмінесценції Газів [Theory of Spontaneous and Stimulated Gas Chemiluminescence]* (Naukova dumka, Kyiv, 1986), pp. 16-29. (in Russian)

#### Conference or symposium proceedings

- [15]. C. Yaakov and R.Huque, in: *Second International Telecommunications Energy Symposium Proceedings*, edited by E. Yow (IEEE, New York, 1996), pp. 17-27.
- [16]. V. Nikolsky, A.K. Sandler and M.S. Stetsenko, in: *Автоматика-2004: Матеріали 11 Міжнародної Конференції по Автоматичному Управлінню [Automation-2004: Materials of the 11th International Conference on Automated Management]* (NUHT, Kyiv, 2004), pp. 46-48. (in Ukrainian)

#### Patent

- [17]. I.M. Vikulin, V.I. Irha and M.I. Panfilov, Patent Ukraine No. 26020 (27 August 2007). (in Ukrainian)

#### Special Notes

1. Use International System of Units (SI system). 2. It is undesirable to use acronyms in the titles. Please define the acronym on its first use in the paper.
3. Refer to isotopes as <sup>14</sup>C, <sup>3</sup>H, <sup>60</sup>Co, etc.

Наукове видання

**СХІДНО-ЄВРОПЕЙСЬКИЙ ФІЗИЧНИЙ ЖУРНАЛ**

**Номер 1, 2019**

**EAST EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS**

**№ 1, 2019**

Збірник наукових праць  
англійською, українською, російською мовами

Коректор – Коваленко Т.О.  
Технічний редактор – Гірник С.А.  
Комп'ютерне верстання – Гірник С.А.

Підписано до друку 29.04.2019. Формат 60×84/8. Папір офсетний.

Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. 5,5. Обл.-вид. арк. 5,6  
Тираж 70 пр. Зам. № Ціна договірна

61022, Харків, майдан Свободи, 4  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Видавництво

Надруковано Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
61022, Харків, майдан Свободи, 4, тел. +380-057-705-24-32  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09