

Volume 4 • Number 1 • 2017

ISSN 2312-4334

---

# **East European Journal of Physics**

---



**V.N. Karazin Kharkiv National University Publishing**

ISSN 2312-4334

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

# **East European Journal of Physics**

Volume 4 · Number 1

2017

# East European Journal of Physics

---

EEJP is an international peer-reviewed journal devoted to experimental and theoretical research on the nuclear physics, cosmic rays and particles, high-energy physics, solid state physics, plasma physics, physics of charged particle beams, plasma electronics, radiation materials science, physics of thin films, condensed matter physics, functional materials and coatings, medical physics and physical technologies in an interdisciplinary context.

Published quarterly in hard copy and online by V.N. Karazin Kharkiv National University Publishing.  
ISSN 2312-4334 (Print), ISSN 2312-4539 (Online)

The editorial policy is to maintain the quality of published papers at the highest level by strict peer review.

Approved for publication by the Academic Council of the Karazin Kharkiv National University (March 27, 2017, Protocol No. 5). EEJP registered by the order of Ministry of Education of Ukraine № 747 of 07.13.2015, and is included in the list of scientific specialized editions of Ukraine, which can be published results of dissertations for the degree of doctor and candidate of physical and mathematical sciences.

## Editor-in-Chief

Azarenkov N.A., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Deputy editor

Girka I.O., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Executive Secretary

Girnyk S.A., Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

## Editorial Board

Adamenko I.N., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Akulov V.P., City University of New York, USA

Antonov A.N., Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Sofia, Bulgaria

Barannik E.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Beresnev V.M., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Berezhnoy Yu.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Bizyukov A.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Bragina L.L. STU Kharkiv Polytechnical Institute, Ukraine

Broda B., University of Lodz, Poland

Budagov Yu.A., Joint Institute of Nuclear Research, Dubna, Russia

Dovbnya A.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Dragovich B.G., University of Belgrade, Serbia

Duplij S.A., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Garkusha I.E., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Gofman Yu., Jerusalem College of Technology, Israel

Grekov D.L., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Karnaukhov I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Khodusov V.D., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Kondratenko A.N., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Korchin A.Yu., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Krivoruchenko M.I., Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow, Russia

Lavrinenko S.D., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Lazurik V.T., Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Mel'nik V.N., Institute of Radio Astronomy, Kharkiv, Ukraine

Merenkov N.P., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Neklyudov I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Noterdaeme J.-M., Max Planck Institute for Plasma Physics, Garching, Germany

Nurmagambetov A.Yu., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Onyschenko I.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Ostrikov K.N., Plasma Nanoscience Centre Australia, Clayton, Australia

Peletminsky S.V., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Pilipenko N.N., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Radinschi I., Gheorghe Asachi Technical University, Iasi, Romania

Slyusarenko Yu.V., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Smolyakov A.I., University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada

Shul'ga N.F., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Tkachenko V.I., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Voyevodin V.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

Yegorov O.M., NSC Kharkiv Institute of Physics and Technology, Ukraine

## Editorial office

Department of Physics and Technologies, V.N. Karazin Kharkiv National University

Kurchatov av., 31, office 402, Kharkiv, 61108, Ukraine

Tel: +38-057-335-18-33,

E-mail: [eejp@karazin.ua](mailto:eejp@karazin.ua),

Web-pages: <http://periodicals.karazin.ua/eejp> (Open Journal System), <http://eejp.univer.kharkov.ua>

Certificate of State registration No.20644-10464P, 21.02.2014

# East European Journal of Physics

Volume 4      Number 1      2017

---

## ORIGINAL PAPERS

- Nonlinear Dynamo in a Rotating Electrically Conducting Fluid** 4  
M.I. Kopp, A.V. Tur, V.V. Yanovsky
- A Convective Model of a Roton** 28  
V.I. Tkachenko
- Temperature-Abnormal Diffusivity in Tilted Spatially Periodic Potentials** 47  
I.G. Marchenko, I.I. Marchenko, V.I. Tkachenko
- The Lattice Parameters and Residual Stresses in Bulk Nanocrystalline and Ultrafine-Grained Titanium** 56  
Yu.M. Plotnikova, R.V. Smolianets, I.S. Braude, V.A. Moskalenko
- Temperature Monitoring of Polymer Films Under Irradiation by Fast Ion Beam** 62  
V.N. Bondarenko, A.V. Goncharov, V.I. Sukhostavets, T.Kh. Salikhov, A.A. Abdurahmonov
- Influence of Composition and Microstructure on the Features of Mechanical Properties of Co-Cr-Fe-Mn-Ni High Entropy Alloys** 70  
A.V. Levenets, I.V. Kolodiy, N.V. Berezhnaya, Y.S. Lipovskaya
- Simulation of Synchronization of Nonlinear Oscillators by the External Field** 75  
V.M. Kuklin, D.N. Litvinov, S.M. Sevidov, A.E. Sporov

PACS: 47.32.C

## NONLINEAR DYNAMO IN A ROTATING ELECTRICALLY CONDUCTING FLUID

M.I. Kopp<sup>1</sup>, A.V. Tur<sup>3</sup>, V.V. Yanovsky<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Institute for Single Crystals, Nat. Academy of Science Ukraine,  
Lenine Ave.60, Kharkov 31001, Ukraine  
e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua*<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University  
Sq. Svobody 4, Kharkiv, 61022 Ukraine*<sup>3</sup>*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology  
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Received January 21, 2017

We found a new large-scale instability, which arises in the rotating conductive fluid with small-scale turbulence. Turbulence is generated by small-scale external force with a low Reynolds number. The theory is built simply by the method of multiscale asymptotic expansions. Nonlinear equations for vortex and magnetic perturbations obtained in the third order for small Reynolds number. It is shown that the combined effects of the Coriolis force and the small external forces in a rotating conducting fluid possible large-scale instability. The large-scale increments of the instability, correspond to generation as the vortex and magnetic disturbances. This type of instability is classified as hydrodynamic and MHD alpha-effect. We studied the stationary regimes of nonlinear equations of magneto-vortex dynamo. In the limit of weakly conducting fluid found stationary solutions in the form of helical kinks. In the limit of high conductivity fluid was obtained stationary solutions in the form of nonlinear periodic waves and kinks.

**KEY WORDS:** equations of magnetohydrodynamics, Coriolis force, multiscale asymptotic expansions, small-scale turbulence,  $\alpha$ -effect, spiral kinks

## НЕЛІНІЙНЕ ДИНАМО В ЕЛЕКТРОПРОВІДНІЙ РІДИНІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

М.І. Копп<sup>1</sup>, А.В. Тур<sup>3</sup>, В.В. Яновський<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України  
пр. Науки 60, 61001 Харків, Україна*<sup>2</sup>*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна*<sup>3</sup>*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology  
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Знайдена нова великомасштабна нестійкість, виникаюча в електропровідній рідині, яка обертається з дрібномасштабною турбулентністю. Турбулентність генерується дрібномасштабною зовнішньою силою з малим числом Рейнольдса. Теорія побудована строгим методом великомасштабного асимптотичного розкладу. Нелінійні рівняння для вихрових і магнітних збурень отримані в третьому порядку по малому числу Рейнольдса. Показано, що в результаті спільної дії сили Коріоліса і дрібномасштабної зовнішньої сили в електропровідній рідині, яка обертається, можлива великомасштабна нестійкість. Отримані інкременти великомасштабної нестійкості, відповідні генерації як вихрових, так і магнітних збурень. Такий тип нестійкості класифікується як гідродинамічний і магнітогідродинамічний альфа-ефект. Було вивчено стаціонарні режими нелінійних рівнянь магніто-вихрового динамо. В межах слабкопровідної рідини знайдені стаціонарні рішення у вигляді спіральних кінків. В межах високої провідності рідини отримані стаціонарні рішення у вигляді нелінійних періодичних хвиль і кінків.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** рівняння магнітної гідродинаміки, сила Коріоліса, великомасштабні асимптотичні розкладання, дрібномасштабна турбулентність,  $\alpha$ -ефект, спіральні кінки

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

М.И.Копп<sup>1</sup>, А.В.Тур<sup>3</sup>, В.В.Яновский<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України  
пр. Леніна 60, 61001 Харків, Україна*<sup>2</sup>*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
пл. Свободи, 4, 61022, Харків, Україна*<sup>3</sup>*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology  
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Найдена новая крупномасштабная неустойчивость, которая возникает во вращающейся электропроводящей жидкости с мелкомасштабной турбулентностью. Турбулентность генерируется мелкомасштабной внешней силой с малым числом Рейнольдса. Теория построена строгим методом многомасштабного асимптотического разложения. Нелинейные уравнения для вихревых и магнитных возмущений получены в третьем порядке по малому числу Рейнольдса. Показано, что в результате совместного действия силы Кориоліса и мелкомасштабной внешней силы во вращающейся электропроводящей жидкости возможна крупномасштабная неустойчивость. Получены инкременты крупномасштабной неустойчивости, соответствующие генерации как вихревых, так и магнитных возмущений. Такой тип неустойчивости классифицируется как гидродинамический и магнитогидродинамический альфа-эффект. Изучены стационарные режимы нелинейных уравнений магніто-вихрового динамо. В пределе слабопроводящей жидкости найдены стационарные решения в виде спиральных

кинков. В пределе высокой проводимости жидкости получены стационарные решения в виде нелинейных периодических волн и кинков.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** уравнения магнитной гидродинамики, сила Кориолиса, многомасштабные асимптотические разложения, мелкомасштабная турбулентность,  $\alpha$ -эффект, спиральные кинки

Как известно, исследованием проблемы происхождения магнитных полей у астрофизических объектов таких как планеты, Солнце, галактики занимается теория динамо [1-10]. Огромную роль здесь играет вращательное движение космических тел, благодаря которому возбуждаются различные волновые и вихревые движения такие как гироскопические волны, волны Россби, внутренние волны, локализованные вихри и когерентные структуры [11-18]. Эффект вращения также оказывает существенное влияние на турбулентное движение жидкости (см. например [19]). Природа такого влияния связана с действием силы Кориолиса, которая нарушает зеркальную симметрию турбулентного движения жидкости. Турбулентность с таким свойством получила название спиральной. Именно в спиральной турбулентности сначала был открыт  $\alpha$ -эффект в электропроводящей жидкости или магнитной гидродинамике (МГД) [20], а затем в обычной гидродинамике (ГД) [20]. В МГД спиральная турбулентность генерирует крупномасштабное магнитное поле, а в ГД крупномасштабные вихревые структуры. Изначально теория  $\alpha$ -эффекта в МГД строилась в кинематической постановке, т.е. когда не учитывается обратное воздействие магнитного поля на турбулентное течение. В этом случае генерация среднего (крупномасштабного) магнитного поля происходит под действием средней э.д.с.

которая пропорциональна среднему магнитному полю  $\vec{H}$ :  $\vec{E} = \alpha \vec{H}$ . Коэффициент усиления  $\alpha$  пропорционален средней спиральности поля скорости  $\alpha \sim \overline{\vec{v} \text{rot} \vec{v}}$ , которая характеризует меру заузленности вихревых движений среды. Как показано в работе [22] ненулевая средняя спиральность не является необходимым условием для появления  $\alpha$ -эффекта, но способствует его возникновению. Несмотря на формальную аналогию уравнения индукции для магнитного поля  $\vec{H}$  и уравнения для завихренности  $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ , перенос  $\alpha$ -эффекта на ГД сталкивается с дополнительной проблемой. Причина отрицательного эффекта заключается в определенной симметрии тензора напряжений Рейнольдса в осредненном уравнении Навье-Стокса [23]. Оказалось, что для появления ГД  $\alpha$ -эффекта одной спиральности турбулентности не достаточно, нужны другие факторы нарушения симметрии турбулентного течения. Такими факторами являются сжимаемость среды [21], неоднородный поток [24], градиент температуры в поле тяжести [25]. Эффект генерации крупномасштабных вихревых структур (КВС) спиральной турбулентностью получил название вихревого динамо. Механизмы вихревого динамо развивались для описания разнообразных явлений в турбулентной атмосфере и океане. Особое внимание уделялось конвективному вихревому динамо [25-32], где спиральная турбулентность приводила к крупномасштабной неустойчивости, вследствие которой образуется одна конвективная ячейка, интерпретируемая как огромный вихрь типа тропического циклона. Известно также большое количество работ по генерации КВС с учетом эффектов вращения [33-37]. Принципиально отличный  $\alpha$ -эффект был обнаружен в работе [38], в которой турбулентное движение жидкости моделируется внешней мелкомасштабной силой  $\vec{F}_0$ . Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности  $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$ ). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта или АКА-эффекта [38]. Отметим, что нарушение четности более общее явление, чем спиральность, хотя именно спиральность  $\overline{\vec{v} \text{rot} \vec{v}} \neq 0$  является самым распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. В этой же работе была рассмотрена крупномасштабная неустойчивость в несжимаемой жидкости методом асимптотических многомасштабных разложений. В качестве малого параметра для асимптотического метода многомасштабных разложений используется число Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$  для мелкомасштабных пульсаций скорости  $v_0$ ,

вызванных мелкомасштабной силой. В дальнейшем, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений были разработаны линейные и нелинейные теории вихревого динамо для сжимаемых сред [39, 40], конвективных сред со спиральной внешней силой [30-32]. Новый пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости был найден в работе [41]. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости во вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой. Обобщение этого ГД  $\alpha$ -эффекта на случай электропроводящей жидкости приводит к новым крупномасштабным структурам.

В этой работе получена крупномасштабная неустойчивость, приводящая к генерации КВС и магнитных полей и формированию крупномасштабных нелинейных стационарных структур. В разделе **ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ** приведены основные уравнения и сформулирована постановка задачи, исследуемой в настоящей работе. В разделе **УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-**

**ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ**, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений, получены осредненные уравнения МГД во вращающейся жидкости для крупномасштабных полей. Алгебраическая структура уравнений многомасштабного асимптотического разложения в различных порядках по  $R$  приведена в Приложении I. Корреляционные функции, входящие в осредненные уравнения, выражаются через мелкомасштабные поля в нулевом приближении по  $R$ . В Приложении II получены решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по  $R$ . Используя эти решения, в Приложении III вычислены корреляционные функции, соответствующие напряжениям Рейнольдса, напряжениям Максвелла и турбулентной э.д.с. В результате, в разделе **УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ** получена самосогласованная система нелинейных уравнений для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. В отличие от кинематического динамо, эти поля оказывают взаимное влияние друг на друга. Система уравнений, описывающая взаимное влияние полей, названа уравнениями нелинейного магнито-вихревого динамо. В разделе **КРУПНОМАСШТАБНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ** исследуется устойчивость малых крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений. В разделе **НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ** проведен численный анализ нелинейных уравнений в стационарном режиме. Там же показано существование локализованных вихревых и магнитных структур.

Целью настоящей работы является исследование линейной и нелинейной генерации крупномасштабных вихревых и магнитных полей во вращающихся электропроводных турбулентных средах. Полученные в работе результаты могут найти применение во многих астрофизических задачах.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходными уравнениями для описания динамики вращающейся электропроводящей несжимаемой жидкости являются хорошо известные уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + 2[\vec{V} \times \vec{\Omega}] + \frac{1}{4\pi\rho_{00}} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}] + \nu \Delta \vec{V} + \vec{F}_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{V} \times \vec{B}] + \nu_m \Delta \vec{B}, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{V}$ ,  $P$ ,  $\vec{B}$  - возмущения скорости, давления и индукции магнитного поля относительно равновесного состояния:

$$\nabla P_{00} = -\rho_{00} \nabla \Phi_{00} - \rho_{00} [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]], \quad (4)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор элемента среды,  $\Phi_{00}$  - равновесный потенциал, описывающий внешнюю силу тяжести,

$\nu$  - коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma_c}$  - коэффициент магнитной вязкости,  $\sigma_c$  -

коэффициент электропроводности среды. Вектор угловой скорости вращения  $\vec{\Omega}$  для простоты считаем постоянным (твердотельное вращение) и в декартовой системе координат:  $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ . Кроме того, среду будем считать безграничной и влиянием внешнего магнитного поля пренебрежем. В этом случае мелкомасштабные магнитные поля или так называемые «затравочные» магнитные поля могут возбуждаться не турбулентными механизмами, а например в результате развития гидродинамических неустойчивостей [1-3], термомагнитных неустойчивостей [42]. Такая постановка задачи интересна для теории динамо [1-10]. В уравнение (1) включена внешняя сила  $\vec{F}_0$ , моделирующая источник возбуждения в среде мелкомасштабных и

высокочастотных флуктуаций поля скорости  $\vec{v}_0$  с малым числом Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ :

$$\text{div} \vec{F}_0 = 0, \quad \vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left( \frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right), \quad (5)$$

где  $\lambda_0$  - характерный масштаб,  $t_0$  - характерное время,  $f_0$  - характерная амплитуда. Перейдем в уравнениях (1)-(3) к безразмерным переменным. Чтобы не загромождать обозначения сохраним за безразмерными переменными обозначения прежних размерных переменных. Это не вызывает в дальнейшем никаких затруднений.

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{V} \rightarrow \frac{\vec{V}}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad \vec{B} \rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \\
 \vec{x} &\rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad f_0 = \frac{\nu_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad P \rightarrow \frac{P}{P_0 \rho_{00}}, \quad P_0 = \frac{\nu \nu_0}{\lambda_0}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В безразмерных переменных уравнения (1)-(3) примут вид:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + R V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk} V_j D_k + \tilde{Q} R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} B_k + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} + F_0^i,
 \tag{7}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} - P m^{-1} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k^2} = R \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} V_n B_p,
 \tag{8}$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0.
 \tag{9}$$

Характер эволюции полей, описываемых системой уравнений (7)-(9), в значительной степени будет определяться следующими безразмерными параметрами:  $D_i = \frac{2\Omega_i \lambda_0^2}{\nu}$  - безразмерный параметр вращения

( $i = 1, 2, 3$ ) на масштабе  $\lambda_0$ , связанный с числом Тейлора  $Ta_i = D_i^2$  [11-13]. Этот безразмерный параметр

характеризует степень превалирования сил Кориолиса над вязкими силами.  $\tilde{Q} = \frac{Q}{Pm}$ ,  $Q = \frac{\sigma_e B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_{00} \nu}$  - число

Чандрасекара,  $Pm = \frac{\nu}{\nu_m}$  - магнитное число Прандтля. Малым параметром асимптотического разложения

считаем число Рейнольдса  $R = \frac{\nu_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$  мелкомасштабных движений, а параметры  $D$  и  $\tilde{Q}$  произвольными,

не влияющими на схему разложения. Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть внешняя сила на фоне равновесного состояния вызывает мелкомасштабные и высокочастотные осцилляции скорости. Средние значения таких осцилляций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и являются условиями разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, которые и определяют эволюцию крупномасштабных возмущений, является основной задачей.

### УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТО-ВИХРЕВОГО ДИНАМО В «КВАЗИДВУМЕРНОЙ» МОДЕЛИ

Рассмотрим более детально применение метода многомасштабных асимптотических разложений к проблеме нелинейной эволюции крупномасштабных вихревых и магнитных возмущений во вращающейся электропроводящей среде. Метод построения асимптотических уравнений развит в работах [30-32,38], следуя которым представим пространственные и временные производные в уравнениях (7)-(9) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i,
 \tag{10}$$

где  $\partial_i$  и  $\partial_t$  - обозначают производные по быстрым переменным  $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$ , а  $\nabla_i$  и  $\partial_T$  - производные по медленным переменным  $X = (\vec{X}, T)$ . Переменные  $x_0$  и  $X$  соответственно можно назвать мелкомасштабные и крупномасштабные переменные. При построении нелинейной теории переменные  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$ ,  $P$  представим в виде асимптотического ряда:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{W}_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R \vec{v}_1 + R^2 \vec{v}_2 + R^3 \vec{v}_3 + \dots \\
 \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{B}_{-1}(X) + \vec{B}_0(x_0) + R \vec{B}_1 + R^2 \vec{B}_2 + R^3 \vec{B}_3 + \dots \\
 P(x) &= \frac{1}{R^3} P_{-3} + \frac{1}{R^2} P_{-2} + \frac{1}{R} P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \bar{P}_1(X)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Подставим разложения (10)-(11) в систему уравнений (7)-(9) и зануляя вклады в каждом порядке по  $R$  до



степени  $R^3$  включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (7)-(9) в различных порядках по  $R$  приведена в Приложении I. Там же показано, что именно в порядке  $R^3$  получаются основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей:

$$\partial_t W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \overline{P_1} + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left( \nabla_m \overline{(B_0^l B_0^k)} \right), \quad (12)$$

$$\partial_t B_{-1}^i - P m^{-1} \Delta B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j \overline{(v_0^n B_0^p)}. \quad (13)$$

Используя свертку тензоров  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} = \delta_{km} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{kl}$ ,  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} = \delta_{in} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jn}$  и вводя обозначения  $\vec{W} = \vec{W}_{-1}$ ,  $\vec{H} = \vec{B}_{-1}$  система уравнений (12)-(13) примет следующий вид:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)} = -\nabla_i \overline{P_1} + \tilde{Q} \left( \nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)} - \frac{\nabla_i \overline{(B_0^k)^2}}{2} \right), \quad (14)$$

$$\partial_T H_i - P m^{-1} \Delta H_i = \nabla_j \overline{(v_0^i B_0^j)} - \nabla_j \overline{(v_0^j B_0^i)}. \quad (15)$$

Уравнения (14)-(15) дополняются секулярными уравнениями, которые были получены в Приложении I:

$$\begin{aligned} \nabla_k \overline{(W_k W_i)} &= -\nabla_i \overline{P_{-1}} + \tilde{Q} (\nabla_k H_i - \nabla_i H_k) H_k, \\ W_j \nabla_j H_i &= H_j \nabla_j W_i, \\ W_j \nabla_j H_i &= H_j \nabla_j W_i, \\ \nabla_i W_i &= 0, \nabla_i H_i = 0, \nabla_i P_{-3} = \varepsilon_{ijk} W_j D_k. \end{aligned}$$

Таким образом для получения системы уравнений (14)-(15), описывающей эволюцию крупномасштабных полей  $\vec{W}$  и  $\vec{H}$  потребовалось дойти до третьего порядка теории возмущения. Это довольно характерное явление при применении метода многомасштабных разложений. Уравнения (14)-(15) приобретают замкнутый вид после вычисления корреляционных функций -- напряжений Рейнольдса  $\nabla_k \overline{(v_0^k v_0^i)}$ , напряжений Максвелла  $\nabla_k \overline{(B_0^i B_0^k)}$  и турбулентной э.д.с.  $\mathcal{E}_n = \varepsilon_{nij} \overline{v_0^i B_0^j}$ . Вычисление этих корреляционных функций значительно упрощается, если воспользоваться «квазидвумерным» приближением, которое часто применяется для описания крупномасштабных вихревых и магнитных полей во многих астрофизических и геофизических задачах [3,14,30,31]. В рамках этого приближения для нашей задачи будем считать, что крупномасштабная производная по  $Z$  более предпочтительная, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y},$$

а геометрия крупномасштабных полей имеет следующий вид:

$$\vec{W} = (W_1(Z), W_2(Z), 0), \vec{H} = (H_1(Z), H_2(Z), 0). \quad (16)$$

В рамках «квазидвумерной» задачи система уравнений (14)-(15) упрощается:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_z \overline{(v_0^z v_0^x)} = \tilde{Q} \nabla_z \overline{(B_0^z B_0^x)}, \quad (17)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 + \nabla_z \overline{(v_0^z v_0^y)} = \tilde{Q} \nabla_z \overline{(B_0^z B_0^y)}, \quad (18)$$

$$\partial_T H_1 - P m^{-1} \Delta H_1 = \nabla_z \overline{(v_0^x B_0^z)} - \nabla_z \overline{(v_0^z B_0^x)}, \quad (19)$$

$$\partial_T H_2 - P m^{-1} \Delta H_2 = \nabla_z \overline{(v_0^y B_0^z)} - \nabla_z \overline{(v_0^z B_0^y)}. \quad (20)$$

Для получения уравнений (17)-(20) в замкнутом виде мы используем решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по  $R$ , полученные в Приложении II. Далее необходимо вычислить корреляторы, входящие в систему уравнений (17)-(20):

$$T^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01} (u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* u_{01}} + \overline{w_{03} (u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* u_{03}},$$

$$T^{32} = \overline{w_0 v_0} = \overline{w_{01} (v_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* v_{01}} + \overline{w_{03} (v_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* v_{03}},$$

$$S^{31} = \overline{\tilde{w}_0 \tilde{u}_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{u}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{u}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{u}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{u}_{03}},$$

$$\begin{aligned}
 S^{32} &= \overline{\tilde{w}_0 \tilde{v}_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{v}_{03}}, \\
 G^{13} &= \overline{u_0 \tilde{w}_0} = \overline{u_{01} (\tilde{w}_{01})^*} + \overline{(u_{01})^* \tilde{w}_{01}} + \overline{u_{03} (\tilde{w}_{03})^*} + \overline{(u_{03})^* \tilde{w}_{03}}, \\
 G^{31} &= \overline{w_0 \tilde{u}_0} = \overline{w_{01} (\tilde{u}_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* \tilde{u}_{01}} + \overline{w_{03} (\tilde{u}_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* \tilde{u}_{03}}, \\
 G^{23} &= \overline{v_0 \tilde{w}_0} = \overline{v_{01} (\tilde{w}_{01})^*} + \overline{(v_{01})^* \tilde{w}_{01}} + \overline{v_{03} (\tilde{w}_{03})^*} + \overline{(v_{03})^* \tilde{w}_{03}}, \\
 G^{32} &= \overline{w_0 \tilde{v}_0} = \overline{w_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{w_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* \tilde{v}_{03}}.
 \end{aligned}$$

Здесь для удобства приняты новые обозначения мелкомасштабных полей:  $v_0^x = u_0$ ,  $v_0^y = v_0$ ,  $v_0^z = w_0$ ,  $B_0^x = \tilde{u}_0$ ,  $B_0^y = \tilde{v}_0$ ,  $B_0^z = \tilde{w}_0$ . Техническая сторона этого вопроса подробно изложена в Приложении III. В результате проведенных там вычислений, мы получили замкнутые уравнения для крупномасштабных полей скорости  $(W_1, W_2)$  и магнитного поля  $(H_1, H_2)$  следующего вида:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_z (\alpha_{(1)} \cdot (1 - W_2)) = 0, \tag{21}$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \nabla_z (\alpha_{(2)} \cdot (1 - W_1)) = 0, \tag{22}$$

$$\partial_T H_1 - Pm^{-1} \Delta H_1 + \nabla_z (\alpha_H^{(2)} H_2) = 0, \tag{23}$$

$$\partial_T H_2 - Pm^{-1} \Delta H_2 - \nabla_z (\alpha_H^{(1)} H_1) = 0. \tag{24}$$

Уравнения (21)-(24) описывают нелинейную динамику крупномасштабных полей во вращающейся электропроводящей среде. Связь между компонентами крупномасштабного вихревого и магнитного поля осуществляется при помощи коэффициентов нелинейного гидродинамического (ГД)  $\alpha_{(1)}$ ,  $\alpha_{(2)}$  и магнитогидродинамического (МГД)  $\alpha_H^{(1)}$ ,  $\alpha_H^{(2)}$   $\alpha$ -эффекта. Причем коэффициенты нелинейного ГД и МГД  $\alpha$ -эффекта являются функциями крупномасштабных полей скорости  $\vec{W}$  и магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(1)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_2(1+Pm(1-q_2))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]} - \\
 &\quad - \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_1))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]}, \\
 \alpha_{(2)} &= \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_1(1+Pm(1-q_1))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]} + \\
 &\quad + \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_2))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]}, \\
 \alpha_H^{(1)} &= f_0^2 \frac{D(1-W_1)Pm(1+Pm(1-q_1))H_1}{\left(4+Pm^2(1-W_1)^2\right) \left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]}, \\
 \alpha_H^{(2)} &= f_0^2 \frac{D(1-W_2)Pm(1+Pm(1-q_2))H_2}{\left(4+Pm^2(1-W_2)^2\right) \left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]}.
 \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{4 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2},$$

$$h_{1,2} = 2f_{1,2}(4 + (1 - W_{1,2})^2)^2 + f_{1,2}^2(4 + (1 - W_{1,2})^2)^2 + D^2 g_{1,2},$$

$$g_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2)^2} \left[ 2(4 + Pm(1 - W_{1,2})^2) + \frac{QH_{1,2}^2(4 - Pm^2(1 - W_{1,2})^2)}{4 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2} \right],$$

$$f_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4 + (1 - W_{1,2})^2)(4 + Pm^2(1 - W_{1,2})^2)} \left[ 2(4 + Pm(1 - W_{1,2})^2) + QH_{1,2}^2 \right].$$

Таким образом в данном разделе мы получили замкнутые уравнения (29)-(32) нелинейного магнито-вихревого динамо во вращающейся электропроводящей жидкости с внешней мелкомасштабной силой  $\vec{F}_0$ . Если эффект вращения исчезнет ( $\Omega = 0$ ), то произойдет обычное диффузионное расплывание крупномасштабных полей. В пределе неэлектропроводящей жидкости  $\sigma = 0$  уравнения (29), (30) полностью совпадают с результатами работы [41]. Далее рассмотрим устойчивость малых возмущений полей (линейная теория), а затем рассмотрим условия существования стационарных нелинейных структур.

### КРУПНОМАСШТАБНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим начальную стадию развития возмущений  $(W_1, W_2)$  и  $(H_1, H_2)$ . Тогда при малых значениях величин  $(W_1, W_2)$  и  $(H_1, H_2)$  уравнения (29)-(32) линеаризуются и сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 - \alpha_1 \nabla_Z W_1 + \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \\ \partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 - \alpha_1 \nabla_Z W_2 - \alpha_2 \nabla_Z W_1 = 0 \end{cases}, \quad (25)$$

$$\begin{cases} \partial_T H_1 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_1 + \alpha_H \nabla_Z H_2 = 0 \\ \partial_T H_2 - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_2 - \alpha_H \nabla_Z H_1 = 0 \end{cases}, \quad (26)$$

где введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{8} \frac{32D^2(10 - D^2)}{((D^2 + 6)^2 + 64)}, \quad (27)$$

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} \frac{32D(10 - D^2)}{((D^2 + 6)^2 + 64)}, \quad (28)$$

$$\alpha_H = f_0^2 \frac{4PmD}{(4 + Pm^2)((D^2 + 6)^2 + 64)}. \quad (29)$$

Как видно из системы уравнений (25)-(26) при малых возмущениях полей происходит расщепление самосогласованной системы уравнений (21)-(24) на две пары уравнений для крупномасштабного поля скорости  $\vec{W}$  и магнитного поля  $\vec{H}$  соответственно. Первая пара уравнений (25) подобна уравнениям для вихревого динамо [21,25], отличие от которых состоит в появлении дополнительного конвективного члена с  $\alpha_1$ . Посредством коэффициента  $\alpha_2$  устанавливается положительная обратная связь с помощью которой возможна генерация крупномасштабных вихревых структур. Вторая пара уравнений (26) описывает хорошо известный  $\alpha$ -эффект в теории динамо [1-10] или усиление крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой системой уравнений (25)-(26), выберем возмущения в виде плоских волн с волновым вектором  $\vec{K} \parallel OZ$ , т.е.

$$\begin{pmatrix} W_{1,2} \\ H_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{W_{1,2}} \\ A_{H_{1,2}} \end{pmatrix} \exp(-i\omega T + iKZ). \tag{30}$$

Подставим (30) в систему уравнений (25), (26) получим дисперсионные уравнения:

$$(-i\omega + K^2 - i\alpha_1 K)^2 - \alpha_2^2 K^2 = 0, \quad (-i\omega + Pm^{-1}K^2)^2 - \alpha_H^2 K^2 = 0. \tag{31}$$

Представив  $\omega = \omega_0 + i\Gamma$  из уравнений (31) находим:

$$\omega_{01} = Re\omega_1 = -\alpha_1 K, \quad \Gamma_1 = Im\omega_1 = \pm\alpha_2 K - K^2, \tag{32}$$

$$\omega_{02} = Re\omega_2 = 0, \quad \Gamma_2 = Im\omega_2 = \pm\alpha_H K - Pm^{-1}K^2. \tag{33}$$

Решения (32) указывают на существование неустойчивых колебательных решений для крупномасштабных вихревых возмущений. Максимальный инкремент неустойчивости  $\Gamma_{1max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$  достигается на волновых числах  $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$ . Колебательная мода для магнитных возмущений  $\omega_{02} = 0$ , а максимальный инкремент неустойчивости  $\Gamma_{2max} = \frac{\alpha_H^2}{4} Pm$  достигает своего значения при волновых числах  $K_{max} = \frac{\alpha_H}{2} Pm$ . Отметим, что в линейной теории, коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_H$  не зависят от амплитуд полей, а зависят только от параметра вращения  $D$ , магнитного числа Прандтля  $Pm$  и амплитуды внешней силы  $f_0$ . Поскольку коэффициенты  $\alpha_2, \alpha_H$  ответственны за генерацию вихревых и магнитных полей, то проанализируем зависимость этих коэффициентов от безразмерных параметров полагая для простоты безразмерную амплитуду внешней силы  $f_0$  равной  $f_0 = 10$ . Фиксирование уровня безразмерной силы означает выбор определенного уровня стационарного фона мелкомасштабных и быстрых осцилляций. Зависимость коэффициентов  $\alpha_2, \alpha_H$  от вращения жидкости (параметра  $D$ ) изображена на рис. 1.

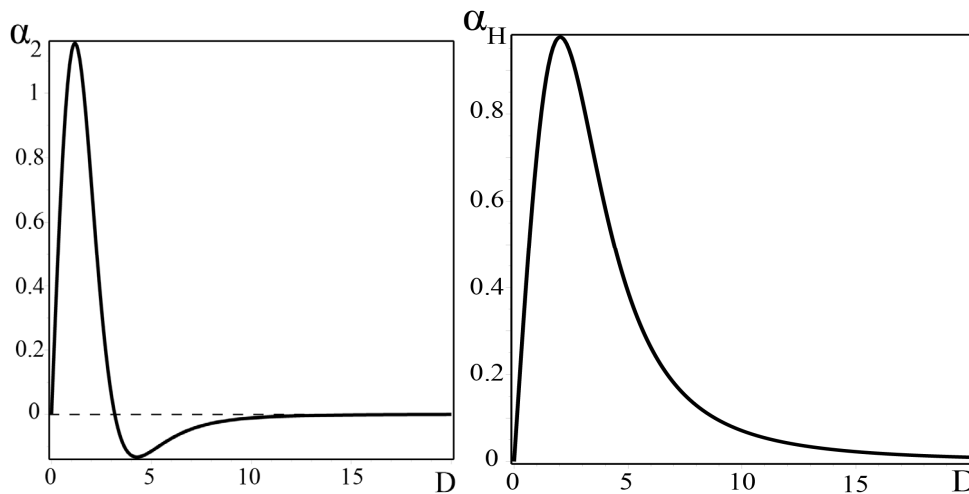


Рис. 1. Слева график зависимости ГД  $\alpha$ -эффекта от параметра вращения жидкости  $D$ ; справа-график зависимости МГД  $\alpha$ -эффекта от параметра вращения жидкости  $D$  для магнитных чисел Прандтля  $Pm = 1$ .

Как видно из рис. 1, «медленное» вращение жидкости приводит к увеличению  $\alpha_2$  (гидродинамический  $\alpha$ - эффект) до максимального значения  $\alpha_{2max}$ , после которого при дальнейшем увеличении параметра  $D$  («быстрое» вращение) наблюдается спад значений  $\alpha_2$ . Аналогичный эффект был впервые описан в работах [1,19]. Кроме того при «быстром» вращении жидкости становятся существенными члены порядка  $D^2$ , которые приводят к перемене знака в ГД  $\alpha$ - эффекте:  $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$  (рис. 1). В этом случае затухающая мода ГД  $\alpha$ - эффекта становится нарастающей. В левой части рис.3 показана зависимость скорости эволюции крупномасштабных вихревых возмущений  $\Gamma_1$  относительно волновых чисел  $K$  для параметра вращения

$D = 2$ . Магнитогидродинамический  $\alpha$ -эффект (или  $\alpha_H$ -эффект) также увеличивается при «медленном» вращении до максимального значения  $\alpha_{Hmax}$ , после которого при увеличении параметра  $D$  наблюдается спад  $\alpha_H$ , но знак коэффициента  $\alpha_H$  не изменяется. Это явление отчетливо прослеживается в правой части рис. 1 для магнитных чисел Прандтля  $Pm = 1$ . В случае произвольных значений  $Pm$  при «быстром» вращении жидкости мы наблюдаем подавление  $\alpha_H$  - эффекта (см. рис. 2). График скорости эволюции крупномасштабного магнитного поля  $\Gamma_2$  относительно волновых чисел  $K$  для параметра  $D = 2$  и  $Pm = 1$  показан в правой части рис. 3. В результате развития неустойчивостей во вращающейся электропроводящей жидкости генерируются крупномасштабные спиральные циркулярно-поляризованные вихри и магнитные поля Бельтрамиевского типа.

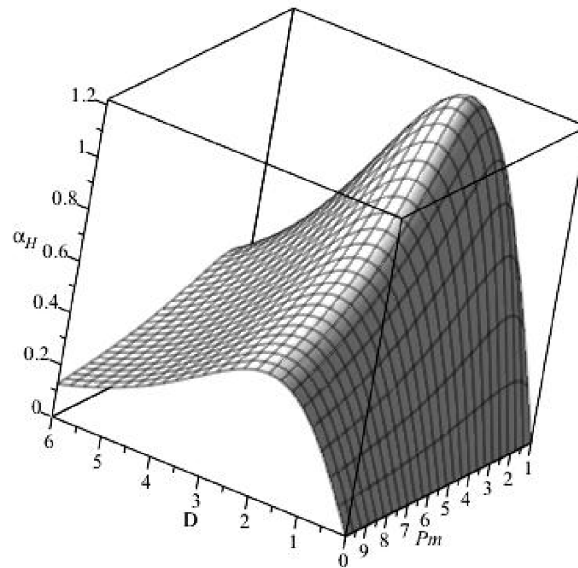


Рис. 2. Трехмерное изображение зависимости коэффициента  $\alpha_H$  от параметра вращения  $D$  и числа Прандтля  $Pm$ .

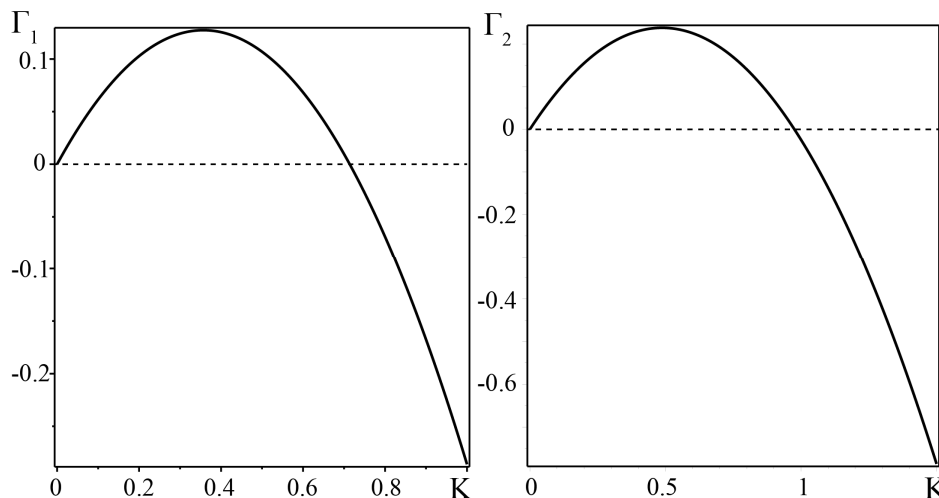


Рис. 3. Слева – график зависимости инкремента неустойчивости для ГД  $\alpha$ -эффекта от волновых чисел  $K$  при параметре вращения  $D = 2$ , справа – график зависимости инкремента неустойчивости для МГД  $\alpha$ -эффекта от волновых чисел  $K$  при параметре вращения  $D = 2$ .

### НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Естественно, что с ростом амплитуды возмущений  $W_{1,2}$  и  $H_{1,2}$  нелинейные коэффициенты  $\alpha_{(1)}$ ,  $\alpha_{(2)}$ ,  $\alpha_H^{(1)}$ ,  $\alpha_H^{(2)}$  уменьшаются и неустойчивость насыщается, переходя к стационарному режиму. В результате образуются нелинейные стационарные структуры. Для описания таких структур рассмотрим нелинейную

систему уравнений (21)-(24) в стационарном случае, полагая  $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$  и интегрируя эти уравнения по  $Z$ :

$$\frac{d\tilde{W}_1}{dZ} = -\alpha_{(1)}\tilde{W}_2 + C_1, \tag{34}$$

$$\frac{d\tilde{W}_2}{dZ} = \alpha_{(2)}\tilde{W}_1 + C_2, \tag{35}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_1}{dZ} = \alpha_H^{(2)}H_2 + C_3, \tag{36}$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_2}{dZ} = -\alpha_H^{(1)}H_1 + C_4. \tag{37}$$

Здесь приняты обозначения  $\tilde{W}_1 = 1 - W_1$ ,  $\tilde{W}_2 = 1 - W_2$ ;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  - произвольные постоянные интегрирования. Общий анализ нелинейной стационарной системы уравнений (34)-(37) представляет собой довольно сложную задачу, выходящую за рамки настоящей работы. Поэтому рассмотрим какие нелинейные структуры могут возникать во вращающейся электропроводящей турбулентной среде в разных физических условиях.

Рассмотрим случай слабой электропроводности среды, когда магнитное число Прандтля и число Chandrasekara малы:  $Pm \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow 0$ . Малость магнитных чисел Прандтля  $Pm$  может быть обусловлена как слабой электропроводностью ( $\sigma \rightarrow 0$ ) среды, так и очень малой кинематической вязкостью ( $\nu \rightarrow 0$ ) среды. При этих условиях генерация крупномасштабного магнитного поля не эффективна  $H_{1,2} \ll 1$ . В такой среде под воздействием внешней мелкомасштабной силы и силы Кориолиса возможна генерация крупномасштабных вихревых структур бельтрамиевского типа [41]. Стационарные нелинейные вихревые структуры такого типа описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dZ} = & -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2} + \\ & + \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2} + C_1, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_2}{dZ} = & -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2} - \\ & - \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2} + C_2 \end{aligned} \tag{39}$$

Система уравнений (38)-(39) полностью совпадает с аналогичными уравнениями, полученными в обычной гидродинамике [41].

При фиксированных значениях параметров  $f_0$  и  $D$  фазовый портрет динамической системы (38)-(39) определяется значениями постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Стандартными методами можно доказать, что система уравнений (38)-(39) имеет четыре неподвижные точки в области показанной на рис. 4. Область построена численно при  $f_0 = D = 1$ . Вне этой области неподвижные точки отсутствуют. На границе реализуются вырожденные случаи – двух неподвижных точек. При небольшом изменении значений параметра, например  $D$ , область существования четырех неподвижных точек незначительно деформируется и меняет свои размеры и форму.

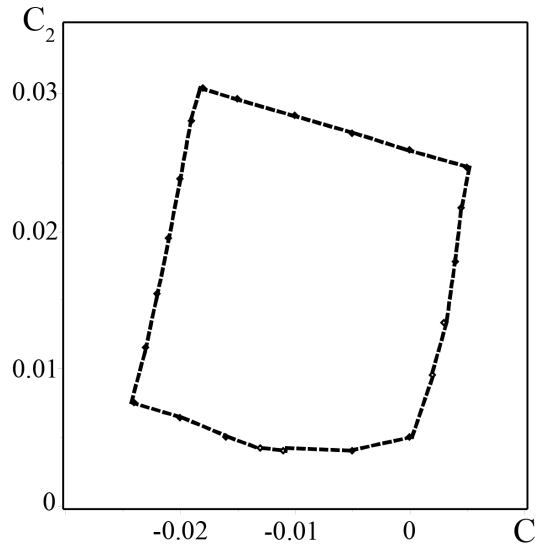


Рис. 4. Граница области параметров на плоскости  $(C_1, C_2)$  показана штрихованной линией

При значениях параметров принадлежащих штриховой линии на фазовом портрете присутствуют две неподвижные точки. Если параметры лежат внутри этой области появляются четыре неподвижные точки, если вне неподвижные точки отсутствуют

При значениях постоянных  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 4), когда присутствуют четыре неподвижные точки, линеаризуя векторное поле (38)-(39) в окрестности неподвижных точек установим тип неподвижных точек. Положение и тип неподвижных точек позволяет построить фазовый портрет динамической системы (38)-(39). Знание фазового портрета позволяет качественно описать все возможные стационарные вихревые решения. Типичный фазовый портрет системы уравнений (38)-(39) показан на рис. 5. Наиболее интересные локализованные решения соответствуют траекториям фазового портрета, соединяющим неподвижные (особые) точки на фазовой плоскости. В частности, сепаратриса, соединяющая гиперболическую особую точку с устойчивым фокусом соответствует решению для локализованной вихревой структуры типа кинка с вращением. Это решение, приведенное на рис. 6, получено численным интегрированием. Другой вид спирального кинка соответствует решению, для которого на фазовой плоскости сепаратриса связывает неустойчивый и устойчивый фокус (рис. 6). Перейдем теперь к случаю, когда магнитное число Прандтля отлично от нуля и равно, например, единице:  $Pm = 1$ .

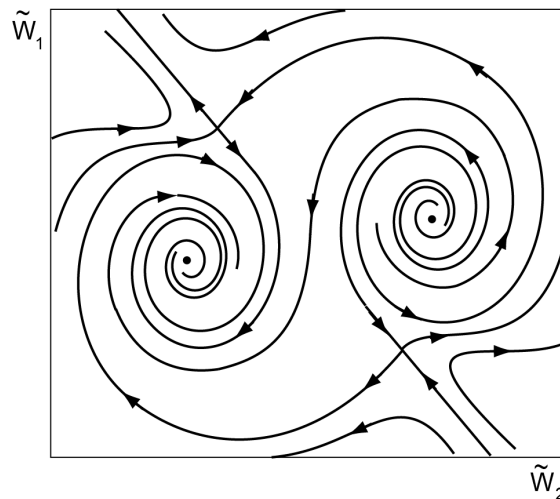


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (38)-(39) при  $f_0 = D = 1$ ,  $C_1 = -0,01$  и  $C_2 = 0,01$ . Видно присутствие двух гиперболических особых точек и устойчивого и неустойчивого фокусов.

В этом случае во вращающейся электропроводящей жидкости под действием внешней мелкомасштабной силы  $\vec{F}_0$  возникает генерация крупномасштабного магнитного поля, причем максимальная скорость роста магнитных возмущений  $\Gamma_{2max}$  превышает максимальную скорость роста крупномасштабных вихревых возмущений  $\Gamma_{1max}$ :

$$\gamma^{-1} = \frac{\Gamma_{2max}}{\Gamma_{1max}} = \left(\frac{\alpha_H}{\alpha_2}\right)^2 Pm \approx 2,09 \cdot 10^2 \tag{40}$$

для чисел  $Pm = 1, D = 3$ .

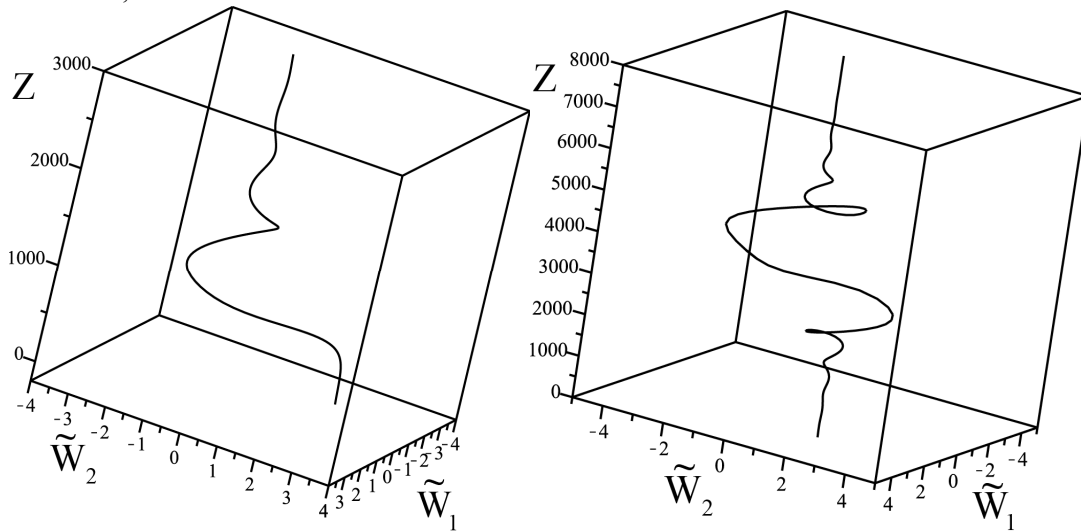


Рис. 6. Численное решение уравнений (38)-(39) для стационарных полей  $W_{1,2}$

Слева показан кинк, связывающий гиперболическую точку с устойчивым фокусом; справа - кинк, связывающий неустойчивый и устойчивый фокус.

Исходя из этого обстоятельства, можно представить следующую картину протекающих физических процессов: генерируемое крупномасштабное вихревое возмущение во вращающейся среде еще не вышло на стационарный режим, а возмущения крупномасштабного магнитного поля уже достигли своего насыщения на стационарном уровне. Очевидно, что влиянием малых амплитуд крупномасштабных вихревых возмущений  $W_{1,2} \ll 1$  на эволюцию крупномасштабного магнитного поля мы можем пренебречь. В результате стационарное крупномасштабное магнитное поле будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{d\tilde{H}_1}{dZ} = f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c} + C'_3, \tag{41}$$

$$\frac{d\tilde{H}_2}{dZ} = -f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_1^2)\tilde{H}_1}{\tilde{H}_1^8 + 20\tilde{H}_1^6 + a\tilde{H}_1^4 + b\tilde{H}_1^2 + c} + C'_4, \tag{42}$$

где введены обозначения:  $\tilde{H}_{1,2} = H_{1,2}\sqrt{Q}$ ,  $C'_{3,4} = C_{3,4}\sqrt{Q}$ ,  $a = 3D^2 + 150$ ,  $b = 50(D^2 + 10)$ ,  $c = 25\left(\left(\frac{D^2}{2} + 3\right)^2 + 16\right)$ .

Приступим к исследованию вопроса о видах стационарных магнитных структур, описываемых системой уравнений (41)-(42). Как и в предыдущем случае, установим область изменения постоянных  $(C_3, C_4)$ , которая определяется путем вычисления максимума и минимума функции

$$\Phi_{1,2} = f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_{1,2}^2)\tilde{H}_{1,2}}{\tilde{H}_{1,2}^8 + 20\tilde{H}_{1,2}^6 + a\tilde{H}_{1,2}^4 + b\tilde{H}_{1,2}^2 + c}.$$

Обозначая через  $\chi = \max\left(f_0^2 \frac{D(5 - \tilde{H}_2^2)\tilde{H}_2}{\tilde{H}_2^8 + 20\tilde{H}_2^6 + a\tilde{H}_2^4 + b\tilde{H}_2^2 + c}\right)$  при изменении  $\tilde{H}_2$ , область изменения

постоянных  $(C_3, C_4)$  определяется следующими неравенствами

$$-\chi < C_3 < \chi$$

$$-\chi < C_4 < \chi$$



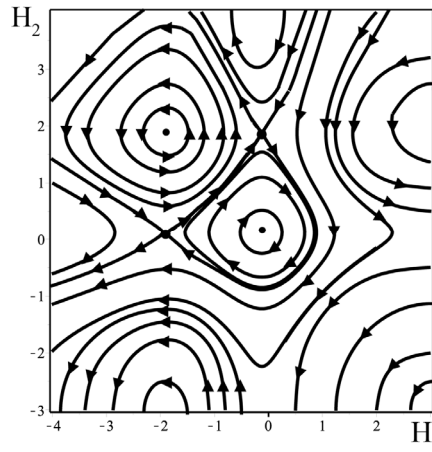


Рис. 7. Фазовый портрет динамической системы уравнений (41)-(42) при  $f_0 = Q = 1, D = 3, C_1 = -0,001$  и  $C_2 = -0,001$ . Видно присутствие двух эллиптических и двух гиперболических особых точек.

Для фиксированных значений  $f_0, D, Q$  этот максимум легко вычисляется. Далее при выполнении всех численных расчетов примем  $f_0 = 1, D = 3, Q = 1$ . Линеаризуя правые части системы уравнений (41)-(42) в окрестности неподвижных точек мы можем установить их тип и построить соответствующий фазовый портрет. Так при выборе постоянных  $C_3 \neq 0$  ( $C_3 = -0,001$ ) и  $C_4 \neq 0$  ( $C_4 = -0,001$ ) мы получаем четыре неподвижные точки: две эллиптического и две гиперболического типов. Фазовый портрет для этого случая ( $C_3 \neq 0$  и  $C_4 \neq 0$ ) представлен на рис. 7. Из него видно существование двух типов ограниченных стационарных решений, это нелинейные волны и кинки. Нелинейным волнам соответствуют замкнутые траектории фазового портрета, а кинкам сепаратрисы, соединяющие гиперболические точки (рис. 8). В принципе нелинейные волны можно разделить на два типа, в зависимости от неподвижной эллиптической точки, которую они окружают. Аналогично в этом случае можно различать и два типа кинков по сегментам сепаратрис, соединяющих две гиперболические точки.

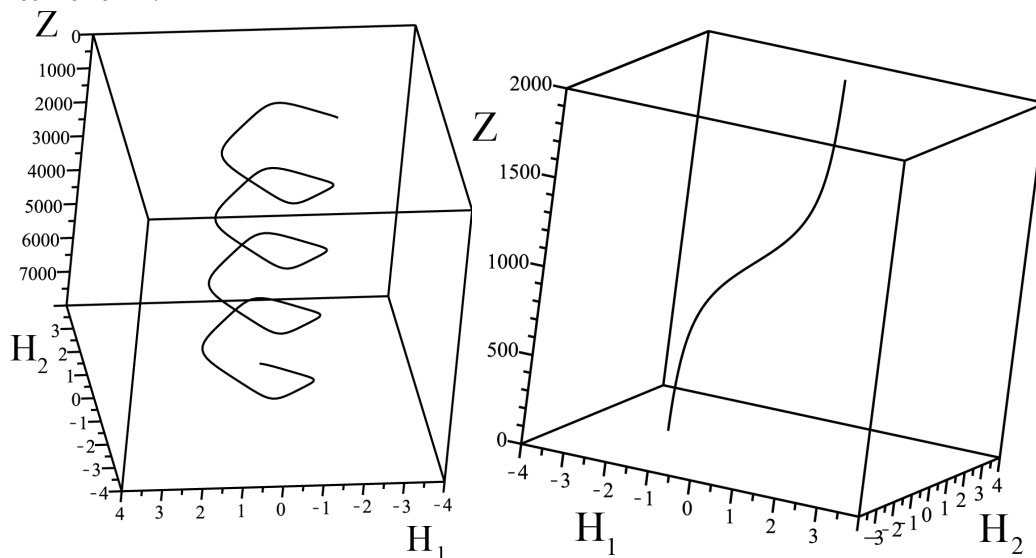


Рис. 8. Численное решение уравнений (41)-(42) для стационарных магнитных полей  $H_{1,2}$

Слева изображено стационарное решение в окрестности эллиптической точки, соответствующее нелинейной волне; справа - стационарное решение, соответствующее кинку.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена замкнутая система нелинейных уравнений для вихревых и магнитных крупномасштабных возмущений (магнито-вихревое динамо), описывающую как линейную, так и нелинейную стадии нарастания этих возмущений в электропроводящей среде со внешней мелкомасштабной силой. Эта сила поддерживает малые флуктуации поля скорости и создает мелкомасштабную турбулентность с малым числом Рейнольдса  $R \ll 1$ . Асимптотическое разложение уравнений движения по малому числу Рейнольдса позволяет

получить уравнения движения для больших масштабов. Показано, что на линейной стадии генерация крупномасштабных вихревых возмущений происходит благодаря развитию неустойчивости типа гидродинамического  $\alpha$ -эффекта, а генерация крупномасштабных магнитных полей из-за неустойчивости типа МГД  $\alpha$ -эффекта. Неустойчивость обусловлена совместным действием мелкомасштабной внешней силы и силы Кориолиса. С ростом амплитуды вихревых и магнитных возмущений неустойчивость стабилизируется и переходит в стационарный режим. В случае, когда электропроводность среды очень мала или параметр вращения мал, то нелинейные уравнения магнито-вихревого динамо трансформируются в вихревую подсистему уравнений. В этом режиме формируются нелинейные стационарные вихревые структуры-спиральные кинки, аналогичные тем, которые были найдены в обычной гидродинамике в работе [41]. Если электропроводность среды существенна, а вихревые возмущения малы, то для магнитной подсистемы мы получили решения в виде периодических нелинейных волн и кинков. Проведенный в работе качественный анализ системы уравнений (38)-(39) и (41)-(42) был выполнен для фиксированных значений параметров турбулентности  $f_0$ , вращения  $D$ , магнитного поля  $Q$  и констант  $C_{1,2,3,4}$ . Для более полного описания физической природы, рассматриваемых здесь нелинейных стационарных структур, естественно исследовать изменения общего фазового портрета системы уравнений (34)-(37) при изменении параметров системы. Такой бифуркационный качественный анализ этой многопараметрической задачи выглядит исключительно громоздким и сложным и требует специального рассмотрения, выходящего за рамки этой работы.

**ПРИЛОЖЕНИЕ I.**

**МНОГОМАСШТАБНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ**

Приведем алгебраическую структуру асимптотического разложения уравнений (7)-(9) в различных порядках по  $R$ , начиная с наименьшего. В порядке  $R^{-3}$  имеется только одно уравнение:

$$\partial_i P_{-3} = 0 \Rightarrow P_{-3} = P_{-3}(X) \quad (43)$$

В порядке  $R^{-2}$  имеем уравнение:

$$\partial_i P_{-2} = 0 \Rightarrow P_{-2} = P_{-2}(X) \quad (44)$$

Уравнения (43) и (44) выполняются автоматически поскольку  $P_{-3}$  и  $P_{-2}$  являются функциями только медленных переменных.

В порядке  $R^{-1}$  получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_i W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k W_{-1}^i &= -\partial_i P_{-1} - \nabla_i P_{-3} + \partial_k^2 W_{-1}^i + \varepsilon_{ijk} W_j D_k + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \partial_m B_{-1}^l B_{-1}^k \\ \partial_i B_{-1}^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_{-1}^i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j W_{-1}^n B_{-1}^p \\ \partial_i W_{-1}^i &= 0, \quad \partial_i B_{-1}^i = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Усреднение уравнений (45) по «быстрым» переменным дает секулярное уравнение:

$$-\nabla_i P_{-3} + \varepsilon_{ijk} W_j D_k = 0 \quad (46)$$

которое соответствует геострофическому равновесию.

В нулевом порядке по  $R$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_i v_0^i + W_{-1}^k \partial_k v_0^i + v_0^k \partial_k W_{-1}^i &= -\partial_i P_0 - \nabla_i P_{-2} + \partial_k^2 v_0^i + \varepsilon_{ijk} v_0^j D_k + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\partial_m B_{-1}^l B_0^k + \partial_m B_0^l B_{-1}^k) + F_0^i \\ \partial_i B_0^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_0^i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j W_{-1}^n B_0^p + \partial_j v_0^n B_{-1}^p) \\ \partial_i v_0^i &= 0, \quad \partial_i B_0^i = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Эти уравнения дают один секулярный член:

$$\nabla P_{-2} = 0 \Rightarrow P_{-2} = const$$

Рассмотрим приближение первого порядка  $R^1$ :

$$\begin{aligned} \partial_i v_1^i + W_{-1}^k \partial_k v_1^i + v_0^k \partial_k v_1^i + v_1^k \partial_k W_{-1}^i + W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i &= -\nabla_i P_{-1} - \\ -\partial_i (P_1 + \bar{P}_1) + \partial_k^2 v_1^i + 2\partial_k \nabla_k W_{-1}^i + \varepsilon_{ijk} v_1^j D_k + \\ + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\partial_m B_{-1}^l B_1^k + \partial_m B_0^l B_0^k + \partial_m B_1^l B_{(-1)}^k + \nabla_m B_{(-1)}^l B_{(-1)}^k) & \\ \partial_i B_1^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_1^i - Pm^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_{-1}^i &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j W_{-1}^n B_1^p + \partial_j v_0^n B_0^p + \partial_j v_1^n B_{-1}^p + \nabla_j W_{-1}^n B_{-1}^p) \\ \partial_i v_1^i + \nabla_i W_{-1}^i &= 0, \quad \partial_i B_1^i + \nabla_i B_{-1}^i = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Из этой системы уравнений следуют секулярные уравнения

$$W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_{-1} + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \nabla_m B_{-1}^l B_{-1}^k \quad (49)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j W_{-1}^n B_{-1}^p = 0 \quad (50)$$

$$\nabla_i W_{-1}^i = 0 \quad \nabla_i B_{-1}^i = 0 \quad (51)$$

Для второго порядка  $R^2$  получим уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \partial_i v_2^i + W_{-1}^k \partial_k v_2^i + v_0^k \partial_k v_1^i + W_{-1}^k \nabla_k v_0^i + v_0^k \nabla_k W_{-1}^i + v_1^k \partial_k v_0^i + v_2^k \partial_k W_{-1}^i = \\
 & = -\nabla_i P_2 - \nabla_i P_0 + \partial_k^2 v_2^i + 2\partial_k \nabla_k v_0^i + \varepsilon_{ijk} v_2^j D_k + \\
 & + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left( \partial_m B_{-1}^l B_2^k + \partial_m B_0^l B_1^k + \partial_m B_1^l B_0^k + \partial_m B_2^l B_{-1}^k + \nabla_m B_{-1}^l B_0^k + \nabla_m B_0^l B_{-1}^k \right) \\
 & \partial_i B_2^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_2^i - Pm^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_0^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left( \partial_j W_{-1}^n B_2^p + \partial_j v_0^n B_1^p + \right. \\
 & \quad \left. + \partial_j v_2^n B_{-1}^p + \nabla_j W_{-1}^n B_0^p + \nabla_j v_0^n B_{-1}^p \right) \\
 & \partial_i v_2^i + \nabla_i v_0^i = 0, \quad \partial_i B_2^i + \nabla_i B_0^i = 0
 \end{aligned} \tag{52}$$

После усреднения системы уравнений (52) по быстрым переменным видно, что в порядке  $R^2$  секулярных членов нет.

Наконец приходим к наиболее важному порядку  $R^3$ . В этом порядке уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \partial_i v_3^i + \partial_T W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k v_3^i + v_0^k \partial_k v_2^i + W_{-1}^k \nabla_k v_1^i + v_0^k \nabla_k v_0^i + v_1^k \partial_k v_1^i + v_1^k \nabla_k W_{-1}^i + v_2^k \partial_k W_{-1}^i = \\
 & = -\partial_i P_3 - \nabla_i (P_1 + \bar{P}_1) + \partial_k^2 v_3^i + 2\partial_k \nabla_k v_1^i + \Delta W_{-1}^i + \varepsilon_{ijk} v_3^j D_k + \\
 & + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left( \partial_m B_{-1}^l B_3^k + \partial_m B_0^l B_2^k + \partial_m B_1^l B_1^k + \partial_m B_2^l B_0^k + \nabla_m B_{-1}^l B_1^k + \nabla_m B_0^l B_0^k \right), \\
 & \partial_i B_3^i + \partial_T B_{-1}^i - Pm^{-1} \partial_k^2 B_3^i - Pm^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_1^i - Pm^{-1} \Delta B_{-1}^i = \\
 & = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left( \partial_j W_{-1}^n B_3^p + \partial_j v_0^n B_2^p + \partial_j v_1^n B_1^p + \partial_j v_2^n B_0^p + \nabla_j W_{-1}^n B_1^p + \nabla_j v_0^n B_0^p \right), \\
 & \partial_i v_3^i + \nabla_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_3^i + \nabla_i B_1^i = 0.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Усредняя эту систему уравнений по быстрым переменным получим основные секулярные уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных возмущений:

$$\partial_i W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k \left( \overline{v_0^k v_0^i} \right) = -\nabla_i \bar{P}_1 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \nabla_m \left( \overline{B_0^l B_0^k} \right), \tag{54}$$

$$\partial_i B_{-1}^i - Pm^{-1} \Delta B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j \left( \overline{v_0^n B_0^p} \right). \tag{55}$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ II.**

**МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ПОЛЯ В НУЛЕВОМ ПОРЯДКЕ ПО  $R$**

В Приложении I мы получили уравнения асимптотического разложения в нулевом приближении, которые можно записать в следующем виде:

$$\widehat{D}_W v_0^i = -\partial_i P_0 + \varepsilon_{ijk} v_0^j D_k + \widehat{Q} H_k (\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k) + F_0^i, \quad (56)$$

$$\widehat{D}_H B_0^i = (H_p \partial_p) v_0^i, \quad (57)$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_k B_0^k = 0, \quad (58)$$

где введены обозначения для операторов:

$$\widehat{D}_W = \partial_i - \partial_k^2 + W_{-1}^k \partial_k, \quad \widehat{D}_H = \partial_i - P m^{-1} \partial_k^2 + W_{-1}^k \partial_k.$$

Мелкомасштабные осцилляции магнитного поля легко находятся из уравнения (26):

$$B_0^i = \frac{(H_p \partial_p)}{\widehat{D}_H} v_0^i. \quad (59)$$

Подставим (59) в (56), и воспользовавшись условием соленоидальности полей  $\vec{v}_0$  и  $\vec{B}_0$  (58), находим давление  $P_0$ :

$$P_0 = \widehat{P}_1 u_0 + \widehat{P}_2 v_0 + \widehat{P}_3 w_0. \quad (60)$$

Здесь мы ввели обозначения для операторов:

$$\widehat{P}_1 = \frac{D_2 \partial_z - D_3 \partial_y}{\partial^2} - \widehat{Q} H_1 \frac{(H_p \partial_p)}{\widehat{D}_H}, \quad \widehat{P}_2 = \frac{D_3 \partial_x - D_1 \partial_z}{\partial^2} - \widehat{Q} H_2 \frac{(H_p \partial_p)}{\widehat{D}_H}, \quad \widehat{P}_3 = \frac{D_1 \partial_y - D_2 \partial_x}{\partial^2} \quad (61)$$

и скоростей:  $v_0^x = u_0$ ,  $v_0^y = v_0$ ,  $v_0^z = w_0$ . Используя представление (60), мы можем исключить давление из уравнения (56) и в результате получить систему уравнений для нахождения поля скорости нулевого приближения:

$$\begin{aligned} (D_3 + \widehat{p}_{1y}) u_0 + \left( \widehat{D}_W - \frac{\widehat{Q} (H_p \partial_p)^2}{\widehat{D}_H} + \widehat{p}_{2y} \right) v_0 + (\widehat{p}_{3y} - D_1) w_0 &= F_0^y \\ \left( \widehat{D}_W - \frac{\widehat{Q} (H_p \partial_p)^2}{\widehat{D}_H} + \widehat{p}_{1x} \right) u_0 + (\widehat{p}_{2x} - D_3) v_0 + (\widehat{p}_{3x} + D_2) w_0 &= F_0^x \\ (\widehat{p}_{1z} - D_2) u_0 + (\widehat{p}_{2z} + D_1) v_0 + \left( \widehat{D}_W - \frac{\widehat{Q} (H_p \partial_p)^2}{\widehat{D}_H} + \widehat{p}_{3z} \right) w_0 &= F_0^z \end{aligned} \quad (62)$$

Компоненты тензора  $\widehat{p}_{ij}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{1x} &= \frac{D_2 \partial_x \partial_z - D_3 \partial_x \partial_y}{\partial^2}, & \widehat{p}_{2x} &= \frac{D_3 \partial_x^2 - D_1 \partial_x \partial_z}{\partial^2}, & \widehat{p}_{3x} &= \frac{D_1 \partial_x \partial_y - D_2 \partial_x^2}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{1y} &= \frac{D_2 \partial_y \partial_z - D_3 \partial_y^2}{\partial^2}, & \widehat{p}_{2y} &= \frac{D_3 \partial_y \partial_x - D_1 \partial_y \partial_z}{\partial^2}, & \widehat{p}_{3y} &= \frac{D_1 \partial_y^2 - D_2 \partial_y \partial_x}{\partial^2}, \\ \widehat{p}_{1z} &= \frac{D_2 \partial_z^2 - D_3 \partial_z \partial_y}{\partial^2}, & \widehat{p}_{2z} &= \frac{D_3 \partial_z \partial_x - D_1 \partial_z^2}{\partial^2}, & \widehat{p}_{3z} &= \frac{D_1 \partial_z \partial_y - D_2 \partial_z \partial_x}{\partial^2}. \end{aligned} \quad (63)$$

Систему уравнений (62) можно значительно упростить, если выбрать систему координат так, чтобы ось  $Z$  совпадала с направлением угловой скорости вращения  $\vec{\Omega}$  жидкости. Тогда  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_3 = D$ . Для решения этой системы уравнений зададим внешнюю силу в явном виде. Для простоты выберем силу  $\vec{F}_0$  в следующем виде:

$$\vec{F}_0 = f_0 (\vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \cos \varphi_1), \tag{64}$$

где  $f_0$  - амплитуда внешней силы,  $\varphi_1 = \vec{\kappa}_1 \vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\varphi_2 = \vec{\kappa}_2 \vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\kappa_1 = \kappa_0(1, 0, 1)$ ,  $\kappa_2 = \kappa_0(0, 1, 1)$ . Отсюда видно, что сила  $\vec{F}_0$  задана в плоскости  $(x, y)$ , ортогональной оси вращения и удовлетворяет свойствам (5). Решение упрощенной системы уравнений (62) находится по правилам Крамера:

$$u_0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{D_H} + D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{D_H} \right) F_0^x - \left( D \frac{\partial_x^2}{\partial^2} - D \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} \right) F_0^y \right\}, \tag{65}$$

$$v_0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} - D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} \right) F_0^y + \left( D \frac{\partial_y^2}{\partial^2} - D \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} \right) F_0^x \right\}, \tag{66}$$

$$w_0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[ \left( D - D \frac{\partial_y^2}{\partial^2} \right) D \frac{\partial_z \partial_x}{\partial^2} + D \frac{\partial_y \partial_z}{\partial^2} \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} + D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \right] F_0^x + \left[ \left( D - D \frac{\partial_x^2}{\partial^2} \right) D \frac{\partial_z \partial_y}{\partial^2} - D \frac{\partial_x \partial_z}{\partial^2} \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} - D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \right] F_0^y \right\}. \tag{67}$$

Здесь  $\Delta$  - детерминант упрощенной системы (62), который в раскрытом виде имеет вид:

$$\Delta = \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} - D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \left( \hat{D}_w - \tilde{Q} \frac{(H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} + D \frac{\partial_y \partial_x}{\partial^2} \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} \right) - \left( D - D \frac{\partial_y^2}{\partial^2} \right) \left( D \frac{\partial_x^2}{\partial^2} - D \right) \left( \hat{D}_w - \frac{\tilde{Q} (H_p \partial_p)^2}{\hat{D}_H} \right). \tag{68}$$

Для вычисления выражений (65)-(68) запишем внешнюю силу (33) в комплексной форме:

$$\vec{F}_0 = \vec{i} \frac{f_0}{2} e^{i\varphi_2} + \vec{j} \frac{f_0}{2} e^{i\varphi_1} + c.c. \tag{69}$$

Тогда все операторы в формулах (65-68) действуют слева на собственные функции:

$$\hat{D}_{w,H} e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_1} \hat{D}_{w,H} (\vec{\kappa}_1, -\omega_0), \hat{D}_{w,H} e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_2} \hat{D}_{w,H} (\vec{\kappa}_2, -\omega_0), \Delta e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_1} \Delta (\vec{\kappa}_1, -\omega_0), \Delta e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_2} \Delta (\vec{\kappa}_2, -\omega_0). \tag{70}$$

Полагая  $\kappa_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  обозначим:

$$\hat{D}_W(\bar{\kappa}_1, -\omega_0) = \hat{D}_{W_1}^* = 2 - i(1 - W_1), \hat{D}_W(\bar{\kappa}_2, -\omega_0) = \hat{D}_{W_2}^* = 2 - i(1 - W_2),$$

$$W_{-1}^x = W_1, \quad W_{-1}^y = W_2,$$

$$\hat{D}_H(\bar{\kappa}_1, -\omega_0) = \hat{D}_{H_1}^* = 2Pm^{-1} - i(1 - W_1), \tag{71}$$

$$\hat{D}_H(\bar{\kappa}_2, -\omega_0) = \hat{D}_{H_2}^* = 2Pm^{-1} - i(1 - W_2).$$

Комплексно-сопряженные величины здесь и далее будем обозначать звездочкой. При выполнении дальнейших вычислений, часть компонент в тензорах  $\hat{p}_{ij}(\bar{\kappa}_1)$  и  $\hat{p}_{ij}(\bar{\kappa}_2)$  обращается в ноль, поэтому выпишем только не нулевые компоненты:

$$\hat{p}_{2x}(\bar{\kappa}_1) = \frac{D}{2}, \quad \hat{p}_{2z}(\bar{\kappa}_1) = \frac{D}{2}, \quad \hat{p}_{1z}(\bar{\kappa}_2) = -\frac{D}{2}, \quad \hat{p}_{1y}(\bar{\kappa}_2) = -\frac{D}{2}. \tag{72}$$

Учитывая формулы (71)-(72) находим поле скорости нулевого приближения

$$u_0 = C_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + c.c. = u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04}, \tag{73}$$

$$v_0 = A_1 e^{i\phi_1} - C_2 e^{i\phi_2} + c.c. = v_{01} + v_{02} + v_{03} + v_{04}, \tag{74}$$

$$w_0 = -C_1 e^{i\phi_1} + C_2 e^{i\phi_2} + c.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04}. \tag{75}$$

Здесь  $w_{02} = (w_{01})^*$ ,  $w_{04} = (w_{03})^*$ ,  $v_{02} = (v_{01})^*$ ,  $v_{04} = (v_{03})^*$ ,  $u_{02} = (u_{01})^*$ ,  $u_{04} = (u_{03})^*$  и введены новые обозначения:

$$A_{1,2} = \frac{f_0}{2} \frac{a_{1,2}}{a_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2}}, \quad C_{1,2} = \frac{f_0}{4} \frac{D}{a_{1,2}^2 + \frac{D^2}{2}}, \quad a_{1,2} = \hat{D}_{H_{1,2}}^* + \tilde{Q} \frac{H_{1,2}^2}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*}. \tag{76}$$

В предельном случае  $\sigma = 0$  неэлектропроводной жидкости формулы (73)-(75) совпадают с результатами работы [41]. Перейдем теперь к вычислениям мелкомасштабных осцилляций поля  $\vec{B}_0$ , используя при этом выражения (59) и (73)-(75):

$$B_0^x = \tilde{u}_0 = \tilde{C}_1 e^{i\phi_1} + \tilde{A}_2 e^{i\phi_2} + c.c. = \tilde{u}_{01} + \tilde{u}_{02} + \tilde{u}_{03} + \tilde{u}_{04}, \tag{77}$$

$$B_0^y = \tilde{v}_0 = \tilde{A}_1 e^{i\phi_1} - \tilde{C}_2 e^{i\phi_2} + c.c. = \tilde{v}_{01} + \tilde{v}_{02} + \tilde{v}_{03} + \tilde{v}_{04}, \tag{78}$$

$$B_0^z = \tilde{w}_0 = -\tilde{C}_1 e^{i\phi_1} + \tilde{C}_2 e^{i\phi_2} + c.c. = \tilde{w}_{01} + \tilde{w}_{02} + \tilde{w}_{03} + \tilde{w}_{04}. \tag{79}$$

Между коэффициентами  $\tilde{A}_{1,2}$ ,  $\tilde{C}_{1,2}$  и  $A_{1,2}$ ,  $C_{1,2}$  имеется следующая связь:

$$\tilde{A}_{1,2} = A_{1,2} \frac{iH_{1,2}}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*}, \quad \tilde{C}_{1,2} = C_{1,2} \frac{iH_{1,2}}{\hat{D}_{H_{1,2}}^*}. \tag{80}$$

В заключении данного раздела отметим, что найденные здесь выражения для мелкомасштабных осцилляций поля скорости  $\vec{v}_0$  и магнитного поля  $\vec{B}_0$  будут использоваться для вычислений корреляционных функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ III.

**ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА, МАКСВЕЛЛА И ТУРБУЛЕНТНОЙ Э.Д.С.**

Для замыкания системы уравнений (17)-(20), описывающих эволюцию крупномасштабных полей, необходимо вычислить корреляторы следующего вида:

$$T^{31} = \overline{w_0 u_0} = \overline{w_{01} (u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* u_{01}} + \overline{w_{03} (u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* u_{03}}, \quad (81)$$

$$T^{32} = \overline{w_0 v_0} = \overline{w_{01} (v_{01})^*} + \overline{(w_{01})^* v_{01}} + \overline{w_{03} (v_{03})^*} + \overline{(w_{03})^* v_{03}}, \quad (82)$$

$$S^{31} = \overline{\tilde{w}_0 \tilde{u}_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{u}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{u}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{u}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{u}_{03}}, \quad (83)$$

$$S^{32} = \overline{\tilde{w}_0 \tilde{v}_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{v}_{03}}, \quad (84)$$

$$G^{13} = \overline{u_0 \tilde{w}_0} = \overline{u_{01} (\tilde{w}_{01})^*} + \overline{(u_{01})^* \tilde{w}_{01}} + \overline{u_{03} (\tilde{w}_{03})^*} + \overline{(u_{03})^* \tilde{w}_{03}}, \quad (85)$$

$$G^{31} = \overline{\tilde{w}_0 u_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{u}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{u}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{u}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{u}_{03}}, \quad (86)$$

$$G^{23} = \overline{v_0 \tilde{w}_0} = \overline{v_{01} (\tilde{w}_{01})^*} + \overline{(v_{01})^* \tilde{w}_{01}} + \overline{v_{03} (\tilde{w}_{03})^*} + \overline{(v_{03})^* \tilde{w}_{03}}, \quad (87)$$

$$G^{32} = \overline{\tilde{w}_0 v_0} = \overline{\tilde{w}_{01} (\tilde{v}_{01})^*} + \overline{(\tilde{w}_{01})^* \tilde{v}_{01}} + \overline{\tilde{w}_{03} (\tilde{v}_{03})^*} + \overline{(\tilde{w}_{03})^* \tilde{v}_{03}}. \quad (88)$$

В формулах (81)-(88), для удобства приняты новые обозначения мелкомасштабных полей, введенные в Приложении II. Начнем с вычислений напряжений Рейнольдса, определяемых формулами (81), (82). Прежде всего нам потребуются выражения для мелкомасштабных полей скорости (73)-(75) (см. Приложение II), после подстановки которых в формулы (81), (82) получим:

$$T^{31} = -2|C_1|^2 + C_2 A_2^* + C_2^* A_2, \quad (89)$$

$$T^{32} = -2|C_2|^2 - (C_1 A_1^* + C_1^* A_1). \quad (90)$$

Теперь приступим к вычислению корреляторов магнитного поля или напряжений Максвелла  $S^{31}$  и  $S^{32}$ , используя при этом формулы (77)-(79) из Приложения II. Тогда в результате подстановки (77)-(79) в (83), (84) находим:

$$S^{31} = -2|C_1|^2 \frac{H_1^2}{|\hat{D}_{H_1}|^2} + (C_2 A_2^* + C_2^* A_2) \frac{H_2^2}{|\hat{D}_{H_2}|^2}, \quad (91)$$

$$S^{32} = -2|C_2|^2 \frac{H_2^2}{|\hat{D}_{H_2}|^2} - (C_1 A_1^* + C_1^* A_1) \frac{H_1^2}{|\hat{D}_{H_1}|^2}. \quad (92)$$

Поскольку в правых частях уравнений (17), (18) содержится разность  $T^{31} - \tilde{Q}S^{31}$  и  $T^{32} - \tilde{Q}S^{32}$ , то ее несложно найти воспользовавшись выражениями (89)-(92):

$$T^{31} - \tilde{Q}S^{31} = -2|C_1|^2 \left( 1 - \frac{QH_1^2}{Pm|\hat{D}_{H_1}|^2} \right) + (C_2 A_2^* + C_2^* A_2) \left( 1 - \frac{QH_2^2}{Pm|\hat{D}_{H_2}|^2} \right), \quad (93)$$



$$T^{32} - \tilde{Q}S^{32} = -2|C_2|^2 \left( 1 - \frac{QH_2^2}{Pm|\hat{D}_{H_2}|^2} \right) - (C_1A_1^* + C_1^*A_1) \left( 1 - \frac{QH_1^2}{Pm|\hat{D}_{H_1}|^2} \right). \quad (94)$$

Используя формулы (71) и (76) выпишем ряд полезных соотношений:

$$|C_{1,2}|^2 = C_{1,2}C_{1,2}^* = \frac{f_0^2}{16} \frac{D^2}{\left[ 16(1-W_{1,2})^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_{1,2})^2 \right]^2 + h_{1,2} \right]}, \quad (95)$$

где введены обозначения:

$$h_{1,2} = 2f_{1,2}(4 + (1-W_{1,2})^2)^2 + f_{1,2}^2(4 + (1-W_{1,2})^2)^2 + D^2g_{1,2},$$

$$g_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2)} \left[ 2(4 + Pm(1-W_{1,2})^2) + \frac{QH_{1,2}^2(4 - Pm^2(1-W_{1,2})^2)}{4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2} \right],$$

$$f_{1,2} = \frac{QH_{1,2}^2}{(4 + (1-W_{1,2})^2)(4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2)} \left[ 2(4 + Pm(1-W_{1,2})^2) + QH_{1,2}^2 \right], \quad (96)$$

$$C_{1,2}A_{1,2}^* + C_{1,2}^*A_{1,2} = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_{1,2}}{\left[ 16(1-W_{1,2})^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_{1,2})^2 \right]^2 + h_{1,2} \right]},$$

$$q_{1,2} = 1 + \frac{QH_{1,2}^2}{4 + Pm^2(1-W_{1,2})^2}.$$

С учетом соотношений (95), (96) формулы (93), (94) запишем в явном виде:

$$T^{31} - \tilde{Q}S^{31} = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_2(1 + Pm(1 - q_2))}{\left[ 16(1-W_2)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]} -$$

$$\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1 + Pm(1 - q_1))}{\left[ 16(1-W_1)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2 \right]^2 + h_1 \right]}, \quad (97)$$

$$T^{32} - \tilde{Q}S^{32} = -\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1 + Pm(1 - q_2))}{\left[ 16(1-W_2)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]} -$$

$$\frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_1(1 + Pm(1 - q_1))}{\left[ 16(1-W_1)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2 \right]^2 + h_1 \right]}. \quad (98)$$

Отсюда находим, что коэффициенты нелинейного гидродинамического  $\alpha$ -эффекта имеют следующий вид:

$$\alpha_{(1)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_2(1+Pm(1-q_2))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]} - \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_1))(1-W_2)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]},$$

$$\alpha_{(2)} = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dq_1(1+Pm(1-q_1))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_1)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2\right]^2 + h_1\right]} + \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2(1+Pm(1-q_2))(1-W_1)^{-1}}{\left[16(1-W_2)^2 + \left[\frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2\right]^2 + h_2\right]}.$$

В предельном случае  $\sigma = 0$  неэлектропроводящей жидкости формулы (97)-(98) переходят к уже известным результатам из работы [41] для напряжений Рейнольдса. Переходим к вычислениям последней группы корреляторов, определяемых формулами (85)-(88). Для этого нам потребуются выражения как для мелкомасштабного поля скорости (73)-(75), так и для магнитного поля (77)-(79). В результате проведения несложных математических операций находим:

$$G^{13} = |C_1|^2 iH_1 \frac{(\hat{D}_{H_1}^* - \hat{D}_{H_1})}{|\hat{D}_{H_1}|^2} + iH_2 \left( \frac{A_2^* C_2}{\hat{D}_{H_2}^*} - \frac{A_2 C_2^*}{\hat{D}_{H_2}} \right), \quad (99)$$

$$G^{31} = |C_1|^2 iH_1 \frac{(\hat{D}_{H_1}^* - \hat{D}_{H_1})}{|\hat{D}_{H_1}|^2} + iH_2 \left( \frac{A_2 C_2^*}{\hat{D}_{H_2}^*} - \frac{A_2^* C_2}{\hat{D}_{H_2}} \right), \quad (100)$$

$$G^{23} = |C_2|^2 iH_2 \frac{(\hat{D}_{H_2}^* - \hat{D}_{H_2})}{|\hat{D}_{H_2}|^2} + iH_1 \left( \frac{A_1^* C_1}{\hat{D}_{H_1}^*} - \frac{A_1 C_1^*}{\hat{D}_{H_1}} \right), \quad (101)$$

$$G^{32} = |C_2|^2 iH_2 \frac{(\hat{D}_{H_2}^* - \hat{D}_{H_2})}{|\hat{D}_{H_2}|^2} + iH_1 \left( \frac{A_1 C_1^*}{\hat{D}_{H_1}^*} - \frac{A_1^* C_1}{\hat{D}_{H_1}} \right). \quad (102)$$

Для замыкания уравнений крупномасштабного магнитного поля (19), (20) нам нужно вычислить разности  $G^{13} - G^{31}$ ,  $G^{23} - G^{32}$ , которые соответствуют компонентам турбулентной э.д.с.  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_y$  и  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_x$ . С учетом формул (99)-(102) получим:

$$\mathcal{E}_2 = G^{13} - G^{31} = i \left( \frac{\hat{D}_{H_2}^* + \hat{D}_{H_2}}{|\hat{D}_{H_2}|^2} \right) (A_2^* C_2 - A_2 C_2^*) H_2, \quad (103)$$

$$\mathcal{E}_1 = G^{23} - G^{32} = -i \left( \frac{\hat{D}_{H_1}^* + \hat{D}_{H_1}}{|\hat{D}_{H_1}|^2} \right) (A_1^* C_1 - A_1 C_1^*) H_1. \quad (104)$$

Зная определение обозначений  $A_{1,2}, C_{1,2}, \hat{D}_{H_{1,2}}$  из формул (71), (76) (см. Приложение II), находим компоненты турбулентной э.д.с.  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_1$  в явном виде:

$$\mathcal{E}_2 = -f_0^2 \frac{D(1-W_2)Pm(1+Pm(1-q_2))H_2}{(4+Pm^2(1-W_2)^2) \left[ 16(1-W_2)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_2)^2 \right]^2 + h_2 \right]} = -\alpha_H^{(2)} H_2, \quad (105)$$

$$\mathcal{E}_1 = f_0^2 \frac{D(1-W_1)Pm(1+Pm(1-q_1))H_1}{(4+Pm^2(1-W_1)^2) \left[ 16(1-W_1)^2 + \left[ \frac{D^2}{2} + 4 - (1-W_1)^2 \right]^2 + h_1 \right]} = \alpha_H^{(1)} H_1. \quad (106)$$

Здесь  $\alpha_H^{(1)}, \alpha_H^{(2)}$  соответствуют коэффициентам нелинейного магнитогидродинамического эффекта.

#### REFERENCES

1. Moffat G. *Vozbuzdenie magnitnogo polja v provodjashej srede* [Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids]. - M.: Mir, 1980. - 343p. (in Russian)
2. Zeldovitch Ja.B., Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D. *Magnitnye polja v astrofizike* [Magnetic Fields in Astrophysics]. - Izhevsk: Inst. Kopm.issl. RHD, 2006. - 384 p. (in Russian)
3. Vajnshtejn S.I., Zeldovitch Ja.B., Ruzmajkin A.A. *Turbulentnoe dinamo v astrofizike* [Turbulent Dynamo in Astrophysics]. - M.: Nauka, 1980. - 237p. (in Russian)
4. Vajnshtejn S.I. *Magnitnye polja v kosmose* [Magnetic fields in Space]. - M.: Nauka, 1983. - 237p. (in Russian)
5. Parker Ju. *Besedy ob elektritseskikh i magnitnyh poljah v kosmose* [Conversations on Electric and Magnetic Fields in Space]. - Izhevsk: Inst. Kopm.issl. RHD, 2010. - 208 p. (in Russian)
6. Krauze F., Pedler K.H. *Magnitnaja gidrodinamika srednih polej i teorija dinamo* [Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory]. - M.: Mir, 1984. - 314p. (in Russian)
7. Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D., Shukurov A.M. *Magnitnye polja galaktik* [Magnetic fields of Galaxies]. - M.: Nauka, 1988. - 279p. (in Russian)
8. Sokolov D.D., Stepanov R.A., Frik P.G. *Dinamo na puti ot astrofizitseskikh modelej k labolatornomu eksperimentu* [Dynamo: from an Astrophysical Model to Laboratory Experiments] // *Usp. Fiz.Nauk.* - 2014. - Vol. 184. - P.318-335. (in Russian)
9. Arnol'd V.I., Zel'dvich Ja.B., Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D. *Magnitnoe pole v dvizhushhejsija provodashej zhidkosti* [Magnetic Field in a Moving Conducting Fluid] // *Usp. matem. Nauk.* - 1981. - No5. - P.220-221. (in Russian)
10. Arnol'd V.I. *Evolutsija magnitnogo polija pod dejstviem perenosa i diffuzii* [Evolution of Magnetic Field under the Action of Transfer and Diffusion] // *Usp. matem. Nauk.* - 1983. - No. 2. - P.225-227. (in Russian)
11. Grinspen H. *Teorija vrashajushih zhidkostej* [The Theory of Rotating Fluids]. Per. S angl. - Leningrad: Gidrometeoizdat, 1975. - 304p. (in Russian)
12. Reshetnyak M.Yu. *Thermal Convection and the Dynamo during Rapid Rotation* // *Izvestija. Physics of the solid Earth.*-2007. - Vol.43. - No.8. - P.642-652.
13. Pedloski Dj. *Geofizicheskaja gidrodinamika v 2-h t.* Per. s angl. [Geophysical Fluid Dynamics] - M.: Mir, 1984. (in Russian)
14. Petviashvili V.I., Pohotelov O.A. *Uedinenye vihri v plasme i atmosfere* [Solitary waves in Plasma and Atmosphere].- M.:Energatomisdat, 1989. - 200p. (in Russian)
15. Aburdjanija G.D. *Samoorganizatsia nelinejnyh vihrevykh struktur i vihrevoj turbulentnosti v dispergirujuscih sredah* [Self-organization of Nonlinear Vortex Structures and Vortex Turbulence in Dispersive Media]. -M.:KomKniga, 2006. - 328p. (in Russian)
16. Kolesnichenko A.V., Marov M.Ja. *Turbulentnost' i samoorganizatsija. Problemy modelirovanija kosmicheskikh i prirodnykh sred* [Turbulence and self-organization. Problems of modeling space and natural environments]. - M.: BINOM, 2009. - 632p. (in Russian)
17. Onishenko O.G., Pohotelov O.A., Astafjeva N.M. *Generatsija krupnomasshtabnyh vihrej i sonalnykh vetrov v atmosferakh planet* [Generation of Large-Scale Vortices and Zonal Winds in Planetary Atmospheres] // *Usp. Fis. Nauk.* - 2008. - Vol.178. - No. 6 - P. 605 - 618. (in Russian)
18. Nezlin M.V., Sneshkin E.N. *Vihri Rossby i spiral'nye struktury* [Rossby Vortices and Spiral Structure]. - M.: Nauka, 1990. - 240p. (in Russian)
19. Rudiger G. *On the  $\alpha$  - Effect for Slow and Fast Rotation* // *Astron. Nachr.* - 1978. - Vol.299. - No.4. - P.217-222.

20. Steenbek M., Krause F. Vozniknovenie magnitnyh polej zvezd i planet v resul'tate turbulentnogo dvizhenija ih veshestv [The Origin of the Magnetic Fields of Stars and Planets as a Result of Turbulent Movement of their Substances] // Magnitnaja gidrodinamika. - 1967. - No.3. - P.19-44. (in Russian)
21. Moiseev S.S., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Teorija vozniknovenija krupnomasshtabnykh struktur v gidrodiamitsheskoj turbulentnosti [The Theory of the Origin of Large-Scale Structures in Hydrodynamic Turbulence] // ZhETF. - 1983. - Vol.85. - Iss.6(12). - P.1979-1987. (in Russian)
22. Gilbert A. D., Frisch U., and Pouquet A. Geophys. //And Astrophys. Fluid Dyn.-1988.-Vol. 42.-P. 151-167.
23. Krause F., Rudiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // Astron. Nachr. – 1974. Vol. 295. - P.93-99.
24. Chkhetiani O. G., Moiseev S. S., Petrosyan A. S., Sagdeev R. Z. The large scale stability and self-organization in homogeneous turbulent shear flow // Physica Scripta. - 1994. - Vol.49. - P.214–220.
25. Moiseev S.S., Rutkevitch P.B., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Vortex dynamos in a helical turbulent convection // Sov.Phys.JETP.- 1988. – Vol. 67. – P. 294 -299.
26. Lypyan E.A., Mazurov A.A., Rutkevitch P.B., Tur A.V. Generation of large-scale vortices through the action of spiral turbulence of a convective nature // Sov.Phys.JETP. - 1992. -Vol. 75.- P.838-841.
27. Moiseev S.S., Oganjan O.R., Rutkevitch P.B., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Vikhrevoe dinamo v spiral'noj turbulentnostju [Vortex Dynamo in Helical Turbulence] - Kiev: Naukova dumka. Sb.: Integrirovaniest i kineticheskie uravnenija dlja solitonov, 1990. - P.280-382. (in Russian)
28. Levina G.V., Moiseev S.S., Rutkevitch P.B. Hydrodynamic alpha-effect in a convective system // Advance in Fluid Mechanics.-2000.-Vol. 25.-P. 111.
29. Zimin V.D., Levina G.V., Moiseev S.S., Tur A.V. Vozniknovenie krupnomasshtabnykh struktur pri turbulentnoj konveksij v podogrevaevom snizu vrashajushemssja sloe [The Emergence of Large-Scale Structures under Turbulent Convection in a heated from below Rotating Layer] // Dokl. AN SSSR. - 1989. - Vol. 309. - P. 88-92. (in Russian)
30. Tur A.V., Yanovsky V.V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force//arXiv:1204.5024 v.1 (physics.flu-dyn.)(2012).
31. Tur A.V., Yanovsky V.V. Non Linear Vortex Structure in Stratified Driven by Small- scale Helical Force // Open Journal of Fluid Dynamics. - 2013. - Vol. 3 - P. 64-74.
32. Kopp M.I., Tur A. V., Yanovsky V. V. Krupnomasshtabnaja konvektivnaja neustojtchivost' v elektroprovodjashej srede s melkomasshtabnoj spiral'noj turbulentnostju [Large-Scale Convective Instability in an Electroconducting Medium with Small Scale Helicity ] // ZhETF. - 2015. - Vol. 147. - Iss. 4. - P.846-866. (in Russian)
33. Rutkevich P. B. Equation for vortex Instability Caused by Convective Turbulence and Coriolis Force.// Sov.Phys. JETP. – 1993.- Vol. 77.- P.933.
34. Smith L. M. and Waleffe F. Transfer of Energy to Two-Dimensional Large Scales in Forced, Rotating Three-Dimensional Turbulence// Physics of Fluids.- 1999.- Vol. 11.- No. 6.- P.1608.
35. Smith L. M. and Waleffe F. Generation of Slow Large Scales in Forced Rotating Stratified Turbulence // Journal of Fluid Mechanics. - 2002. - Vol.451. - P.145 -168.
36. Berezin Y. A. and Zhukov V. P. An Influence of Rotation on Convective Stability of Large Scale Disturbances in Turbulent Fluid // Izv. AN SSSR. Mech. Zhidk. Gaza. - 1989. - No. 4. - P.3.
37. Kitchatinov L.L., Rudiger G., and G.Khomenko. Large –scale vortices in rotating stratified disks // Astron. Astrophys. - 1994. -Vol.287. - P.320-334.
38. Frishe U., She Z.S., Sulem P.L. Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect // Physica 28D. - 1987. - P. 283 - 291.
39. Druzhinin O.A., Homenko G.A. Nelinejnaja teorija gidrodinamitsheskogo alfa-effekta v szhimaemoj srede i obratny kaskad energii [Nonlinear Theory of Hydrodynamic Alpha-Effect in the Compressible Fluid and the inverse Energy Cascade]. – Kiev: Naukova dumka. Tr. Mezhdunarodnoj konf.: Nelinejnye i turbulentnye protsessy v fizike, 1989. - Vol.2. - P.83 -86. (in Russian)
40. Rutkevitch P.B., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Yanovsky V.V. Nonlinear dynamic theory of the  $\alpha$ -effect in compressible fluid. - Kiev: Naukova dumka. Proceeding of the IV Intern.Workshop on Nonlinear and Turb. Pros.in Physics, 1989.
41. Kopp M., Tur A., Yanovsky V. The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // Open Journal of Fluid Dynamics.- 2015.- Vol. 5.- P. 128-138.
42. Dolginov A.Z., Urpin V.A. Termomagnitnaja neustojtchivost' neodnorodnoj plazmy [Thermomagnetic Instability of an Inhomogeneous Plasma] // ZhETF. - 1978. - Vol.77. - P.1921-1932. (in Russian)

PACS: 67.40.Bz, 67.40.Pm

## A CONVECTIVE MODEL OF A ROTON

V.I. Tkachenko<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"**The National Academy of Sciences of Ukraine**61108, Kharkov 1, Akademicheskaya str., tel./fax 8-057-349-10-78*<sup>2</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University,**61022, Kharkov, 4, Svobody sq., tel./fax 8-057-705-14-05**E-mail: [tkachenko@kipt.kharkov.ua](mailto:tkachenko@kipt.kharkov.ua)*

Received February 17, 2017

A convective model describing the nature and structure of the roton is proposed. According to the model, the roton is a cylindrical convective cell with free horizontal boundaries. On the basis of the model, the characteristic geometric dimensions of the roton are estimated, and the spatial distribution of the velocity of the helium atoms and the perturbed temperature inside are described. It is assumed that the spatial distribution of rotors has a horizontally multilayer periodic structure, from which follows the quantization of the energy spectrum of rotors. The noted quantization allows us to adequately describe the energy spectrum of rotors. The convective model is quantitatively confirmed by experimental data on the measurement of the density of the normal component of helium II, the scattering of neutrons and light by helium II. The use of a convective model for describing the scattering of light by helium II made it possible to estimate the dipole moment of the roton, as well as the number of helium atoms participating in the formation of the roton.

**KEY WORDS:** superfluid helium, convection, elementary convective cell, roton, energy spectrum of helium II, density of the normal component of helium II, neutron scattering, light scattering, dipole momentum

## КОНВЕКТИВНА МОДЕЛЬ РОТОНА

В.І. Ткаченко<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут"**Національної академії наук України**61108, м. Харків, вул. Академічна 1, tel./fax 8-057-349-10-78*<sup>2</sup>*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**61022, м. Харків, пл. Свободи, 4, tel./fax 8-057-705-14-05*

Запропоновано конвективну модель, що описує природу і структуру ротона. Згідно моделі ротон є циліндрична конвективна комірка з вільними горизонтальними межами. На підставі моделі оцінені характерні геометричні розміри ротона та описано просторовий розподіл швидкості атомів гелію та збуреної температури всередині нього. Передбачається, що просторовий розподіл роторів має горизонтально-багатошарову періодичну структуру, з якої випливає квантування енергетичного спектру роторів. Це квантування дозволяє адекватно описати енергетичний спектр роторів. Конвективна модель кількісно підтверджується експериментальними даними для вимірювання щільності нормальної компоненти гелію II, розсіюванню нейтронів і світла на гелії II. Використання конвективної моделі для опису розсіяння світла на гелії II дозволило оцінити дипольний момент ротона, а також кількість атомів гелію, що беруть участь у формуванні ротона.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** надплинний гелій, конвекція, елементарний конвективний осередок, ротон, енергетичний спектр гелію II, щільність нормальної компоненти гелію II, розсіювання нейтронів, розсіювання світла, дипольний момент

## КОНВЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ РОТОНА

В.И. Ткаченко<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"**Национальной академии наук Украины**61108, г. Харьков, ул. Академическая 1, tel./fax 8-057-349-10-78*<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**61022, г. Харьков, пл. Свободы 4, tel./fax 8-057-705-14-05*

Предложена конвективная модель, описывающая природу и структуру ротона. Согласно модели ротон является цилиндрической конвективной ячейкой со свободными горизонтальными границами. На основании модели оценены характерные геометрические размеры ротона, и описано пространственное распределение скорости атомов гелия и возмущенной температуры внутри него. Предполагается, что пространственное распределение роторов имеет горизонтально-многослойную периодическую структуру, из которой следует квантование энергетического спектра роторов. Отмеченное квантование позволяет адекватно описать энергетический спектр роторов. Конвективная модель количественно подтверждается экспериментальными данными по измерению плотности нормальной компоненты гелия II, рассеянию нейтронов и света на гелии II. Использование конвективной модели для описания рассеяния света на гелии II позволило оценить дипольный момент ротона, а также количество участвующих в формировании ротона атомов гелия.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** сверхтекучий гелий, конвекция, элементарная конвективная ячейка, ротон, энергетический спектр гелия II, плотность нормальной компоненты гелия II, рассеяние нейтронов, рассеяние света, дипольный момент

### ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА РОТОНОВ

В работе [1] Ландау представил количественную теорию сверхтекучего гелия, которая описала практически все известные к моменту ее появления экспериментальные результаты, и предсказала ряд новых явлений.

Согласно этой теории, при температуре ниже  $\lambda$  - точки ( $T_\lambda = 2,17$  K), гелий, который принято называть гелий II, одновременно содержит в себе два вида тепловых возбуждений: фононы и ротоны.

Первый вид тепловых возбуждений (фононы) существует в длинноволновой части спектра и характеризуется линейным законом зависимости энергии такой квазичастицы от ее импульса:  $\varepsilon(p) = cp$ , где  $c$  - скорость обычного звука в гелии II, равная приблизительно 240 м/сек,  $\varepsilon(p)$  и  $p$  - энергия и импульс квазичастицы соответственно.

Второй вид тепловых возбуждений (ротоны) существует в более коротковолновой относительно фононов части спектра. При этом постулируется, что связь между энергией  $\varepsilon(p)$  и импульсом  $p$  в этой части энергетического спектра характеризуется параболической зависимостью:  $\varepsilon(p) = \Delta + (p - p_0)^2 / 2\mu$ , где постоянные определяются следующим образом:  $\Delta$  - ширина энергетической щели между невозбужденным и возбужденным уровнями,  $p_0$  - импульс ротона,  $\mu$  - эффективная масса ротона (в единицах массы атома  ${}^4\text{He}$ :  $m_{\text{He}} = 6.646 \cdot 10^{-24}$  г), на котором рассеиваются нейтроны.

Постулируемая зависимость энергии от импульса в коротковолновой части спектра была подтверждена, по мнению авторов ряда публикаций (см., например, [2-4]), в экспериментах с помощью нейтронографического анализа, когда зондирующий пучок монохроматических нейтронов с определенной длиной волны рассеивался на гелии II. В этих экспериментах были определены значения постоянных энергетического спектра Ландау, которые сведены в таблицу 1:

Таблица 1.

Значения постоянных энергетического спектра ротон

$\Delta/k = 9,6, K$	$p_0/\hbar = 1,95, \text{ \AA}^{-1}$	$\mu = 1,06 m_{\text{He}}$	[2]
$\Delta/k = 8,1 \pm 0,4, K$	$p_0/\hbar = 1,9 \pm 0,03, \text{ \AA}^{-1}$	$\mu = 0,16 \pm 0,02 m_{\text{He}}$	[3]
$\Delta/k = 8,65 \pm 0,04, K$	$p_0/\hbar = 1,92 \pm 0,01, \text{ \AA}^{-1}$	$\mu = 0,16 \pm 0,01 m_{\text{He}}$	[4]

где  $m_{\text{He}} = 6.6464836122 \cdot 10^{-24}$  г - масса атома гелия [5],  $k$  - постоянная Больцмана.

Согласно [4] ширина энергетической щели  $\Delta/k$  не является постоянной величиной, а уменьшается с ростом температуры по закону  $\Delta/k = 8,68 - 0,0084 \cdot T^7$  K.

Как следует из таблицы 1, значения констант энергетического спектра имеют разные значения.

Это несоответствие указывает на необходимость придания физического смысла постулируемой коротковолновой части энергетического спектра.

### МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ РОТОНА

Набор большой экспериментальной базы данных по теплофизическим параметрам ротон до настоящего времени не завершился созданием его физической модели.

На протяжении всего периода исследования гелия II различными методами не прекращаются попытки описать структуру и свойства ротона.

Так, например, Р. Фейнман предложил модель ротона в виде вихревого кольца, состоящего из шести атомов  ${}^4\text{He}$ , и расположенных так вдоль линии кольца, что промежутки между ними порядка диаметра атома гелия. Каждый находящийся в кольце атом синхронно вращается, располагаясь то в первоначальном положении, то занимая соседний, например, левый промежуток. Характерный размер вихревого кольца порядка среднего атомного расстояния в жидком гелии II [6].

Другая модель ротонной структуры [7] основана на предположении о том, что в гелии II при температуре  $0,6 \leq T(K) \leq 1,2$  существуют стабильные кластеры, которые являются связанными состояниями некоторого числа  $N_c$  атомов  ${}^4\text{He}$  ( $N_c \gg 1$ ). Число  $N_c$  атомов в таком ротонном кластере может быть определено по минимуму свободной энергии, которая представляет собой условие устойчивости ротона. По данным [7] стабильный кластер должен иметь близкую к сферической форму, и число атомов гелия -  $N_c = 13$ . Средний радиус такого сферического кластера оценивается величиной 5,22 Å.

Однако, в описанных моделях ротона (вихревая и сферическая) отсутствует какое-либо описание физической природы сил, удерживающих атомы гелия в кольце или в сфере.

**СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ, ЭНЕРГИЯ, ЧИСЛО ФОНОНОВ И ФОНОННАЯ ЧАСТЬ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ГЕЛИЯ II**

Свободная энергия Бозе - газа в единице объема определяется выражением [1, 8, 9]:

$$F(T) = -\frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \ln(1+n(\varepsilon)) d\vec{p} \quad (1)$$

где  $n(\varepsilon(p)) = \left( e^{\frac{\varepsilon(p)}{kT}} - 1 \right)^{-1}$  - функция распределения Планка для частиц с энергией  $\varepsilon(p)$ ,  $d\vec{p} = p^2 dp d\Omega$  - элемент объема в пространстве импульсов  $\vec{p}$ ,  $d\Omega$  - элемент телесного угла.

Для фононов  $\varepsilon(p) = cp$ , где  $c$  - скорость звука в гелии II,  $p$  - модуль импульса фонона.

После интегрирования по частям в (1), для свободной энергии фононов имеем:

$$F_{ph}(T) = -\frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \ln(1+n(cp)) d\vec{p} = -\frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \ln(1+n(cp)) \frac{p^3}{3} \Big|_0^\infty d\Omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{3kT} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi np \frac{d\varepsilon(p)}{dp} d\vec{p} \right] = -\frac{1}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi n p c d\vec{p} \quad (2)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках на верхнем и нижнем пределах равно нулю.

Интегрирование (2) дает выражение:

$$F_{ph}(T) = -\frac{c}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \left( e^{\frac{cp}{kT}} - 1 \right)^{-1} p^3 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = -\frac{4\pi}{3(2\pi\hbar)^3} kT \left( \frac{kT}{c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \\ = -\frac{4\pi^5}{45(2\pi\hbar)^3} kT \left( \frac{kT}{c} \right)^3 = -\frac{E_{ph}}{3} \quad (3)$$

где  $E_{ph} = \frac{4\pi^5}{15} kT \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3$  - энергия фононов в единичном объеме гелия II.

При этом, число фононов в единичном объеме определяется выражением:

$$N_{ph}(T) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \left( e^{\frac{cp}{kT}} - 1 \right)^{-1} p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = 2\zeta(3) 4\pi \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 \quad (4)$$

где  $\zeta(x)$  - дзета-функция Римана от аргумента  $x$ ,  $\zeta(3) \approx 2.4041$ .

Таким образом, энергия фононов связана с числом фононов в единичном объеме гелия II выражением:

$$E_{ph} = \frac{\pi^4 kT}{36,0617} N_{ph} \quad (5)$$

Плотность фоновый газа определяется из выражения для потока в гелии II. Поток определяется импульсом в системе отсчета, движущейся со сверхтекучей компонентой:

$$\vec{p} = \vec{j} - \rho \vec{v}_s = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s - (\rho_n + \rho_s) \vec{v}_s = \rho_n (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = \rho_n \vec{w} \quad (6)$$

где  $\vec{w} = \vec{v}_n - \vec{v}_s$  - относительная скорость нормальной и сверхтекучей компоненты [9].

Этот же импульс по определению равен:

$$\rho_{nph} \vec{w} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \left( e^{\frac{cp - \vec{p}\vec{w}}{kT}} - 1 \right)^{-1} \vec{p} p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \quad (7)$$

Для малых значений разности скоростей  $|\vec{w}|$  функцию распределения Планка в (7) можно разложить в ряд по  $\vec{p}\vec{w}$ , и удержать только второй член разложения, т.к. первый член разложения ввиду несимметричной подынтегральной функции в симметричных пределах интегрирования равен нулю:

$$\int_{-\infty}^\infty n(cp) \vec{p} d\vec{p} = \int_{-\infty}^\infty n(cp) (p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z) dp_x dp_y dp_z = 0 \quad (8)$$

Для вычисления второго члена разложения (7) поступаем следующим образом. Умножаем (7) скалярно слева и справа на  $\vec{w}$ . В итоге имеем:

$$\rho_{nph} |\vec{w}|^2 = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{d}{d(cp)} \left( \left( e^{\frac{cp - \vec{p}\vec{w}}{kT}} - 1 \right)^{-1} \right) \Big|_{\vec{p}\vec{w}=0} (\vec{p}\vec{w})^2 p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \quad (9)$$

В правой части (9) произведение  $\vec{p}\vec{w}$  в сферической системе импульсов имеет вид:

$$\vec{p}\vec{w} = p|w|\sin(\vartheta)\cos(\varphi).$$

Тогда, после сокращения общего множителя  $|w|^2$ , выражение (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_{nph} &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{dn(cp)}{dp} p^4 \sin^3(\vartheta) \cos^2(\varphi) dp d\vartheta d\varphi = \\ &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c} \int_0^\infty p^4 d(n(cp)) \int_0^\pi \sin^3(\vartheta) d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c} \int_0^\infty p^4 d(n(cp)) \frac{\pi^2 \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} \pi = -\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \left( n(cp) p^4 \Big|_0^\infty - 4 \int_0^\infty n(cp) p^3 dp \right) = \\ &= \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, существующие представления о фононной составляющей нормальной компоненты жидкого гелия II адекватно описываются функцией распределения Планка для частиц с энергией  $\varepsilon(p)$ .

### СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ, ЭНЕРГИЯ, ЧИСЛО РОТОНОВ И РОТОННАЯ ЧАСТЬ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ГЕЛИЯ II

В работе [1] приведены результаты расчетов для плотности ротонов, в которых в функция распределения Планка энергия ротонов представлена в виде:

$$\varepsilon_r(\vec{p}) = \Delta + \frac{(\vec{p} - \vec{p}_0)^2}{2\mu} \quad (11)$$

где  $\Delta$  - энергетическая ротонная щель,  $\vec{p}_0$  - импульс минимума  $\varepsilon(\vec{p})$ ,  $\mu$  - эффективная масса ротона.

Выражение (11) указывает на существование в нормальной компоненте гелия II направленного движения с импульсом  $\vec{p}_0$ .

На самом деле весь объем жидкого гелия II находится в равновесии, и любые направленные движения отсутствуют. Это означает, что наряду с кинетической энергией движения ротона в направлении  $\vec{p}_0$ , равной  $\frac{(\vec{p} - \vec{p}_0)^2}{2\mu}$ , должна присутствовать кинетическая энергия движения ротона в направлении  $-\vec{p}_0$ , равная  $\frac{(\vec{p} + \vec{p}_0)^2}{2\mu}$ . В связи с этим энергия ротонной компоненты должна равняться средней энергии направленных навстречу потоков ротонов:

$$\varepsilon_r(\vec{p}) = \frac{(\vec{p} - \vec{p}_0)^2}{4\mu} + \frac{(\vec{p} + \vec{p}_0)^2}{4\mu} = \Delta_0 + \frac{p^2}{2\mu} \quad (12)$$

где  $\Delta_0 = \frac{p_0^2}{2\mu}$  - ротонная щель, определяемая импульсом ротона.

Цифра 4 в знаменателе (12) необходима для обеспечения перехода к классической записи зависимости энергии от импульса при  $\vec{p}_0 \rightarrow 0$ .

О возможности существования встречного движения атомов в гелии II будет сказано ниже.

Полагаем  $\Delta_0 \gg kT$ . Тогда функция распределения Планка может быть преобразована в функцию Больцмана. В этих условиях свободная энергия единичного объема ротонной компоненты имеет вид:

$$\begin{aligned} F_r(T) &= -\frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \ln(1+n(\varepsilon_r)) d\vec{p} \approx \\ &\approx -\frac{kT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi p^2 dp \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{2\mu kT} - \frac{\Delta_0}{kT}\right) = -kT \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение (13) впервые получено Ландау[1].

Количество ротонов в единичном объеме вычисляется аналогично (13), и определяется выражением:



$$N_r(T) = \frac{e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \exp\left(-\frac{p^2}{2\mu kT}\right) p^2 dp \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \left(\frac{\mu kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta_0}{kT}} \quad (14)$$

Таким образом, свободная энергия единичного объема ротонной нормальной компоненты гелия II связана с количеством ротонной компоненты выражением  $F_r(T) = -kTN_r(T)$ .

Ротонная часть плотности нормальной компоненты гелия II определяется из выражения (7). Ее величина равна:

$$\rho_{nr}\vec{w} = \frac{e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \vec{p} p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{2\mu kT} + \frac{\vec{p}\vec{w}}{kT}\right) \quad (15)$$

Разлагая экспоненту в ряд по малым  $|\vec{w}|$ , получим более простое выражение для определения ротонной части нормальной плотности:

$$\rho_{nr}\vec{w} \approx \frac{e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{kT} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \vec{p} (\vec{p}\vec{w}) p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{2\mu kT}\right). \quad (16)$$

Умножаем (16) скалярно слева и справа на вектор  $\vec{w}$ . В итоге имеем:

$$\rho_{nr}|\vec{w}|^2 \approx \frac{e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{kT} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi (\vec{p}\vec{w})^2 p^2 dp \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{2\mu kT} - \frac{\Delta_0}{kT}\right). \quad (17)$$

Подстановка  $\vec{p}\vec{w}$  в сферической системе импульсов в виде  $\vec{p}\vec{w} = p|w|\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$ , и последующее интегрирование (17) дает:  $\rho_{nr} = \mu N_r$ .

Таким образом, Число ротонной компоненты  $N_r$ , а с ним и  $\rho_{nr}$  зависят от температуры экспоненциально.

Представленные выше расчеты свободной энергии, энергии и числа квазичастиц в единичном объеме нормальной компоненты гелия II соответствуют первоначально полученным Ландау для равновесного распределения ротонной компоненты (12) [1].

Затем, немного позже он изменил энергетический спектр на неравновесный (11), добавив вместе с тем вопрос о причине появления неравновесности.

Таким образом, исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что отмеченное выше расхождение в экспериментальном определении величины ротонной энергетической щели, импульса и эффективной массы (таблица 1), а также отсутствие описания физической природы сил, удерживающих атомы гелия в ротоне, указывает на необходимость поиска моделей описания физической природы и структуры ротона.

Целью настоящей работы является описание физической модели возникновения ротона, определение его геометрических размеров и внутренней структуры, а также оценка его термодинамических параметров.

### РАВНОВЕСНЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР РОТОНОВ

Равновесный энергетический спектр для ротонной компоненты вида (12) возможен, если он образован объемным вихрем из движущихся атомов гелия в цилиндрическом объеме диаметром  $D = D_r$  и высотой  $h = L_z$ . Вихревое движение атомов организовано так, что вблизи оси цилиндра они движутся, например, вдоль направления оси цилиндра (вверх), а на внешней границе цилиндра - в обратном направлении. На Рис. 1а) схематически изображено вихревое движение атомов гелия II внутри цилиндрической ячейки.

Существование цилиндрических конвективных ячеек со свободными граничными условиями в вязкой несжимаемой жидкости впервые экспериментально исследовано и теоретически описано в работе [10]. Здесь показано, что такие ячейки имеют такие геометрические размеры, что отношение диаметра ячейки  $D_r$  к высоте  $L_z$  постоянно, и равно  $D_r/L_z = 3,44$ .

В такой ячейке в вертикальном сечении существуют взаимно противоположные течения жидкости: на верхней границе ячейки скорость течения жидкости направлена от центра, а на нижней - к ее центру или наоборот.

Следует отметить, что на вихревую природу ротона указывал в своей работе Фейнман [11]. Он писал о ротонах, как о вихревых кольцах, аналогичных кольцам дыма. При этом импульс вихря будет связан не с его поступательным движением как целого, а с движением вокруг цилиндрической поверхности, изогнутой в замкнутое кольцо.

Таким образом, ротон можно рассматривать как цилиндрическую конвективную ячейку. При этом использование энергетического спектра ротонной компоненты вида (12) оправдано, и позволяет считать гелий II в целом, как покоящуюся жидкость. Пространственное распределение потоков в ротоне относится к его внутренней структуре, и характеризует только его внутренние свойства.

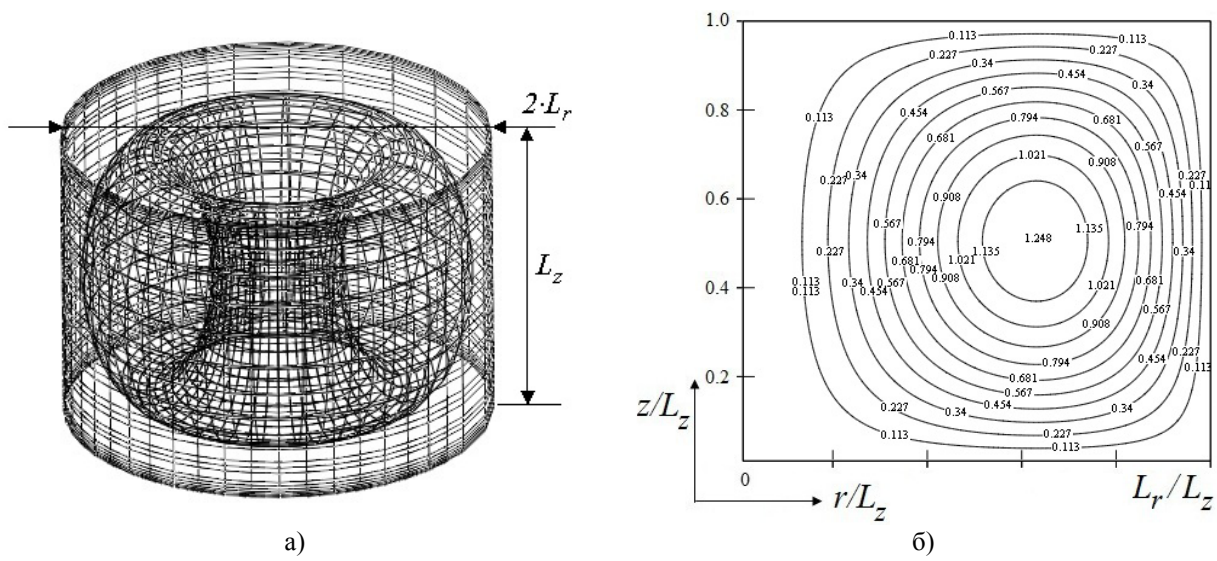


Рис. 1. Схематическое изображение общего вида цилиндрической конвективной ячейки – ротона  
 а). Распределение линий Стокса  $\psi(r, z)$  внутри ротона - б)

**ОЦЕНКА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ФОРМИРОВАНИЯ РОТОНОВ В ГЕЛИИ II**

Будем считать, что в гелии II ротонами являются цилиндрические конвективные ячейки. Тогда для подтверждения этого предположения следует оценить значения термодинамических параметров гелия II. Таким параметрами являются коэффициенты теплового расширения  $\beta$ , кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\chi$  [12]. Эти термодинамические параметры задают величину числа Рэлея, которое, в конечном итоге, определит условия возникновения и устойчивого существования ячеек - ротон.

*Число Прандтля.* Число Прандтля  $Pr$  определяется отношением  $Pr = \nu/\chi$ . Как правило, для жидких сред его значение больше 1 [13].

*Число Рэлея.* Для устойчивого существования конвективной ячейки со свободными граничными условиями число Рэлея должно равняться минимальному числу Рэлея  $R_m = g\beta L_z^3 T_\lambda / \nu\chi = 657,511$  [10,12,13].

Оценим значения размерных коэффициентов, определяющих число Рэлея.

Коэффициент теплового расширения для нормальной компоненты сверхтекучего гелия определим выражением  $\beta(T) = \frac{1}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{dT}$ . В интервале температур  $0,15 \leq T \leq 1,95 (K)$ , исходя из (10) и (17),

$$2,58 \leq \beta(T) \leq 25,45 (K^{-1}), \text{ а среднее значение } \bar{\beta} = \frac{1}{1,8} \int_{0,15}^{1,95} \beta(x) dx \text{ равно } \bar{\beta} \approx 8,82.$$

Динамический и кинематический коэффициенты вязкости определим, исходя из приведенных в научной литературе данных.

В обзоре [14] отмечено, что коэффициент динамической вязкости гелия II заведомо меньше, чем  $10^{-11}$  Па·с.

Капица из своих опытов определил верхний предел вязкости сверхтекучей компоненты [15]. В предположении ламинарности течения им было получено значение коэффициента динамической вязкости  $\approx 10^{-11} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$ .

В работе [16] значение коэффициента динамической вязкости оценивается величиной порядка  $10^{-11}$  Па·с. В [17] коэффициент динамической вязкости определяется величиной

$$\eta = 10^{-14} \left( \frac{\Gamma \cdot c}{\text{см}^2} \right) = 10^{-14} \left( \frac{980 \cdot 2 \cdot \text{см} \cdot c}{\text{см}^2 c^2} \right) = 0,98 \cdot 10^{-12} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Поэтому в дальнейших расчетах будем считать, что коэффициент динамической вязкости равен  $10^{-12}$  Па·с. Отсюда коэффициент кинематической вязкости будет иметь величину порядка

$$\nu = 10^{-12} (\text{Па} \cdot \text{с}) / \rho \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right) \approx 6,7 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Для указанного выше диапазона изменения коэффициента теплового расширения  $\beta(T)$ , число Прандтля находится в интервале  $Pr = 3,25 \dots 3,83$  [18].

Из приведенных выше оценок следует, что, например, при  $\bar{\beta} = 11,2$ ,  $Pr = 3,4988313$  число Рэлея

удовлетворяет условию устойчивого существования цилиндрической конвективной ячейки:

$$R = 3,4988313 \cdot \frac{11,2 \left(\frac{1}{K}\right) \cdot 10 \left(\frac{M}{c^2}\right) \cdot (3,262(M))^3 \cdot 2,17(K)}{(6,7)^2 \left(\frac{M^4}{c^2}\right)} \approx 657,511. \quad (18)$$

Таким образом, приведенные выше значения термодинамических параметров гелия II соответствуют тем, которые необходимы для формирования устойчивой конвективной ячейки.

### ПРИРОДА И ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ РОТОНА

До настоящего времени природа возникновения и физические параметры ротонов не установлены. Поэтому ниже будет предложено описание вышеприведенных характеристик этой квазичастицы.

Но, перед описанием природы и внутреннего строения ротона, полезно проследить процесс перехода жидкого гелия в сверхтекучее состояние.

Для понижения температуры жидкого гелия ниже  $\lambda$  - точки необходимо производить постоянную откачку паров гелия из криостата. Достижение определенной равновесной температуры, находящейся ниже  $\lambda$  - точки, обеспечивается длительным по времени поддержанием определенного пониженного давления в гелиевом криостате [3].

В процессе установления термодинамического равновесия при понижении давления в объеме гелия II возможна реализация горизонтально-многослойной структуры пространственного распределения ротонов.

Опишем более подробно процесс формирования такого пространственного распределения ротонов.

#### Горизонтально-многослойная структура пространственного распределения ротонов

Горизонтально-многослойная структура пространственного распределения ротонов, по-видимому, возникает в связи с формированием на верхней границе гелия, при переходе через  $\lambda$  - точку, одноатомного слоя сверхтекучей жидкости. В этих условиях, по-видимому, находящаяся снизу нормальная компонента гелия II образует горизонтальный переходной слой, толщина которого достаточно мала, и сопоставима с величиной межатомного расстояния в гелии II ( $L_{0z} \approx 3,579 \text{ \AA}$ ). В этом переходном слое температура нормальной компоненты гелия II будет нарастать в вертикальном направлении от нескольких градусов К на нижней границе слоя (при малых отклонениях температуры от  $\lambda$  - точки) до нуля на верхней границе слоя.

Таким образом, исходя из описанных выше условий, мы приходим к задаче Рэлея-Бенара о конвекции в слое подогреваемой снизу вязкой, несжимаемой жидкости [10].

В указанных выше условиях при свободных границах в переходном слое нормальной компоненты гелия II будут возникать цилиндрические конвективные ячейки (читай ротоны) с отношением диаметра к высоте порядка  $D_r/h = 3,44$  [10]. Схематический вид такой цилиндрической ячейки и линии Стокса

$\psi(r, z) = A \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right) J_1\left(\frac{\sigma_{1,1} r}{L_r}\right)$  приведены на Рис. 1. В такой ячейке атомы гелия движутся по тороидальной поверхности (Рис. 1, а) с возмущенной скоростью  $\vec{v}(r, z)$ , и соответствующей ей возмущенной температурой  $T(r, z)$ :

$$\begin{aligned} v_z(r, z) &= A \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right) J_0\left(\frac{\sigma_{1,1} r}{L_r}\right), \\ v_r(r, z) &= -A \frac{\pi}{L_z} \frac{L_r}{\sigma_{1,1}} \cos\left(\frac{\pi z}{L_z}\right) J_1\left(\frac{\sigma_{1,1} r}{L_r}\right), \\ T(r, z) &= B \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right) J_0\left(\frac{\sigma_{1,1} r}{L_r}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $r, z$  - горизонтальная и продольная координаты соответственно,  $v_z(r, z)$ ,  $v_r(r, z)$  - вертикальная и горизонтальная проекции возмущенной скорости атомов гелия соответственно,  $A, B$  - константы,  $J_k(x)$  - функции Бесселя первого рода  $k$  - го порядка от аргумента  $x$ ,  $\sigma_{1,1} = 3,832$  - первый ноль функции Бесселя первого рода первого порядка ( $J_1(\sigma_{1,1}) = 0$ ).

Тороидальная поверхность внутри цилиндра (Рис. 1, а) соответствует определенному значению линии Стокса (рис. 1б)), которая определяется через горизонтальную проекции возмущенной скорости движения вещества в конвективной ячейке соотношением  $v_z(r, z) = r^{-1} \partial \psi(r, z) / \partial r$ .

Из (19) следует, что на верхней границе ячейки  $z = L_z$  горизонтальная скорость максимальна при  $r = \sigma_m L_r / \sigma_{1,1}$ , где  $\sigma_m = 1,8411$  - аргумент, при котором функция  $J_1(x)$  принимает максимальное значение:  $J_1(\sigma_m) = 0,582$ .

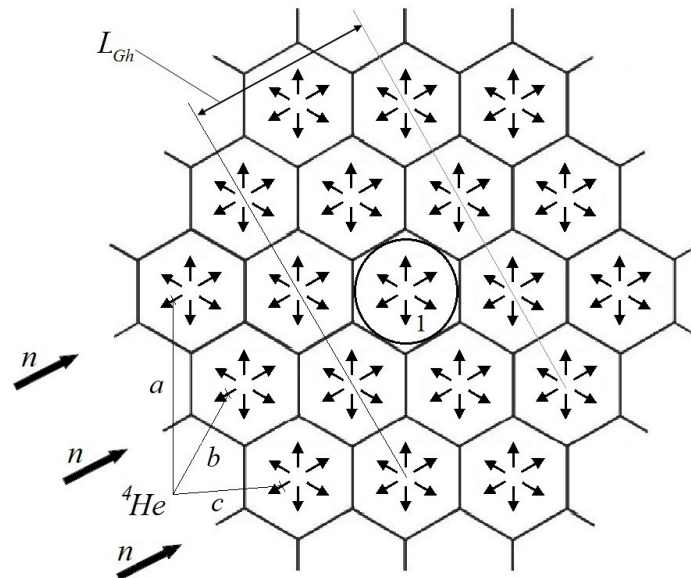


Рис. 2. Горизонтальное сечение слоя ротонов на его верхней границе с указанием направления движением атомов гелия (от центра ячейки к ее внешним границам).

При увеличении числа цилиндрических ячеек будет наблюдаться их упаковка таким образом, что каждая ячейка будет граничить с шестью такими же. На конечной стадии упаковки цилиндрические ячейки заполнят весь объем переходного слоя таким образом, что границы между ячейками будут иметь вид ячеек Бенара, т.е. гексагонов.

Сказанное выше показано на рис. 2. Здесь цифрой 1 показан вид сверху верхней границы цилиндрической ячейки, вписанной в правильный шестиугольник. Внутри каждого шестиугольника стрелками от его центра схематично указано направление движения атомов гелия на верхней границе ячейки. На нижней границе ячейки атомы гелия движутся в противоположном направлении. В точках  $a, b, c$  встречная скоростью атомов гелия максимальна,  $L_{Gh}$  - период гексагональной решетки.

Заполнение объема гелия II нижележащим слоем ротонов будет происходить следующим образом.

После формирования первого слоя конвективных ячеек - ротонов, снизу, на глубине межатомного расстояния в гелии II снова начнет формироваться мономолекулярный слой сверхтекучей жидкости. Такое перемещение сверхтекучей жидкости вглубь гелия II можно объяснить следующим образом. При понижении температуры верхней границы гелия II, к последней будет направлен поток нормальной (теплой) компоненты гелия II. Но согласно теории второго звука, нормальная и сверхтекучая компоненты перемещаются навстречу друг другу, обеспечивая отсутствие суммарного потока вещества [1]. Поэтому длительное охлаждение верхней границы гелия II будет способствовать такому же по длительности проникновению сверхтекучей компоненты вглубь, т.к. временные периоды колебаний компонент гелия II одинаковые.

Таким образом, снизу первого слоя конвективных ячеек, в результате описанного выше механизма перемещения сверхтекучей компоненты, снова образуется мономолекулярный слой сверхтекучей компоненты гелия II. При этом сверхтекучая и нормальная компоненты гелия II характеризуются соизмеримыми геометрическими размерами расслоения.

После образования мономолекулярного слоя сверхтекучей компоненты, находящаяся снизу него нормальная компонента гелия II снова образует горизонтальный переходной слой толщиной порядка межатомного расстояния в гелии II. В этом новом переходном слое начнет формироваться второй слой ротонов. После завершения формирования второго слоя ротонов сверхтекучая компонента снова начнет накапливаться снизу второго слоя, и процесс формирования третьего и последующих слоев конвективных ячеек - ротонов повторится.

Такой послонный процесс формирования ротонного газа будет осуществляться до наступления термодинамического равновесия, и накопления отвечающего данной температуре (давлению насыщенных паров) количества ротонов.

Исходя из характерных размеров элементарной конвективной ячейки со свободными границами, область расположения ротона в нормальной компоненте гелия II представляет гексагональную ячейку с характерными размерами:  $L_z = 3,262 \text{ \AA}$ ,  $L_r = 1,72 \cdot L_z = 5,61 \text{ \AA}$  [10], где высота гексагональной ячейки  $L_z$  выбрана исходя из

величины волнового числа, приходящегося на ротоновый минимум.

Таким образом, из рис. 2 следует, что в гелии II образуется гексагональная кристаллическая решетка с периодом  $L_z = 3,262 \text{ \AA}$  в вертикальном направлении, и  $L_{Ch} = 2 \cdot D_r \cdot 2/\sqrt{3} = 25,944 \text{ \AA}$  - в горизонтальном.

На рис. 2 схематично показано горизонтальное сечение верхней границы слоя ротонов. Стрелками показано движение атомов гелия из центра ячеек на периферию. Приведенная на рис.2 гексагональная структура верхней границы конвективных ячеек повторяется вглубь рисунка с периодом  $L_z$ .

Наличие описанной выше кристаллической структуры расположения ротонов приводит к рассеянию нейтронов не на ротонах, как считалось ранее, а на атомах гелия, из которого образованы ротоны.

На рис. 2. линиями показаны точки верхней границы ячейки, где нейтроны  $n$  рассеиваются на атомах гелия  $^4\text{He}$ , движущихся навстречу нейтронам. В этих точках атомы гелия имеют максимальную скорость  $-V_{He}$  [10]. В точках, расположенных симметрично относительно центра цилиндрической ячейки, максимальная скорость атомов гелия равна  $V_{He}$ , и направлена вдоль скорости нейтронов.

Расстояние указанных точек от центра ячейки равно  $R_m = \sigma_{0,1} L_r / \sigma_{1,1}$ , где  $\sigma_{0,1} \approx 2,405$  и  $\sigma_{1,1} \approx 3,832$  - 1-й ноль функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно [19].

Таким образом, из приведенного выше описания следует, что моноэнергетические холодные нейтроны рассеиваются на периодической решетке  $L_z \times L_{Ch}$ , состоящей из атомов гелия, движущихся навстречу или попутно нейтронам. Максимальная встречная скорость атомов гелия равна  $-V_{He}$ , в попутном направлении  $V_{He}$ .

### КВАНТОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА РОТОНОВ

Отсутствие в объеме гелия II направленных потоков (беспотоковый энергетический спектр) позволяет представить энергию ротонов в классическом виде:

$$\varepsilon_r(p_r, p_z) = \frac{(\vec{p})^2}{2\mu}. \quad (20)$$

Ввиду отмеченной выше пространственной периодичности распределения ротонового газа, энергетический спектр ротонов (20) должен квантоваться по вертикальному  $p_z$  и  $p_r$  горизонтальному импульсам. Такое квантование спектра (20) можно представить в виде:

$$\varepsilon_{r, nm}(p_r, p_z) = \frac{(p_z - np_{z0})^2 + (p_r - mp_{r0})^2}{2\mu} \quad (21)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$  и  $n = m - 1$  - числа квантования,  $p_{z0}/\hbar = 2\pi/L_z \text{ \AA}^{-1}$ ,  $p_{r0}/\hbar = 2\pi/L_{Ch} \text{ \AA}^{-1}$ .

Реальные значения параметров в выражении (21) можно установить исходя из экспериментальных данных по рассеянию холодных нейтронов на ротонах. Для этого используем данные зависимости энергетического спектра ротонов от волнового числа, которые сведены в одну кривую в работе [20]. Исходя из вида этой кривой можно сделать вывод, что энергетический спектр ротонов квантуется по волновому числу и энергии.

На рис. 3 приведен энергетический спектр элементарных возбуждений в гелии II как функция волнового числа для температур ниже  $\lambda$  - точки. На этом рисунке экспериментальные точки из различных источников отмечены 1, 2, 3, 4, 5 [20].

Обработка приведенных данных позволяет сформулировать следующие выводы относительно параметров квантования энергетического спектра ротонов (21):

- в спектре наблюдается квантование по волновым числам  $p_z$  и  $p_r$  с постоянными  $p_{z0}/\hbar = 1,925 \text{ \AA}^{-1}$  и  $p_{r0}/\hbar = 0,242 \text{ \AA}^{-1}$  соответственно;

- в спектре наблюдается квантование по энергии с постоянной  $\Delta_n = ((n+1)p_{r0})^2/2\mu$ , где  $n = 0, 1, 2$ . Такое квантование подтверждается аппроксимирующими параболами:  $\varepsilon_{r,01}(0, p_z)$ ;  $\varepsilon_{r,12}(0, p_z)$ ;  $\varepsilon_{r,23}(0, p_z)$ , вид которых в определенном диапазоне импульсов хорошо описывает экспериментальную зависимость;

Количественные оценки по экспериментальным данным, приведенным на рис. 3, для числа квантования  $n = 1$  дают следующие значения массы ротона и ширины энергетической ротоновой щели:  $\mu = 0,1649 \cdot m_{He}$ ;  $\Delta_1 = 8,606 \text{ K}$ .

Следует отметить, что полученные значения массы ротона и ширины энергетической ротоновой щели соответствуют приведенным в таблице 1.

Сравнение экспериментальных данных и предложенной модели указывают на квантование энергетического спектра ротонов из-за их периодического расположения в горизонтальном и вертикальном направлениях в объеме гелия II.

В предложенной модели в ротоновой части спектра энергия ротонов представлена в классическом

виде (20). Суммирование энергий двух ротонов дает энергию, постулируемую Ландау для обоснования появления ротонного минимума:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{r,21}(0, p_z) &= \frac{\varepsilon_{r,21}(0, p_z) + \varepsilon_{r,21}(0, -p_z)}{2} = \frac{(p_z - 2p_{z0})^2 + (p_z + 2p_{z0})^2 + 2(p_{r0})^2}{4\mu} = \\ &= \frac{(p_z)^2 + (2p_{z0})^2 + (p_{r0})^2}{2\mu} = \Delta_{21} + \frac{(p_z)^2}{2\mu} \end{aligned}$$

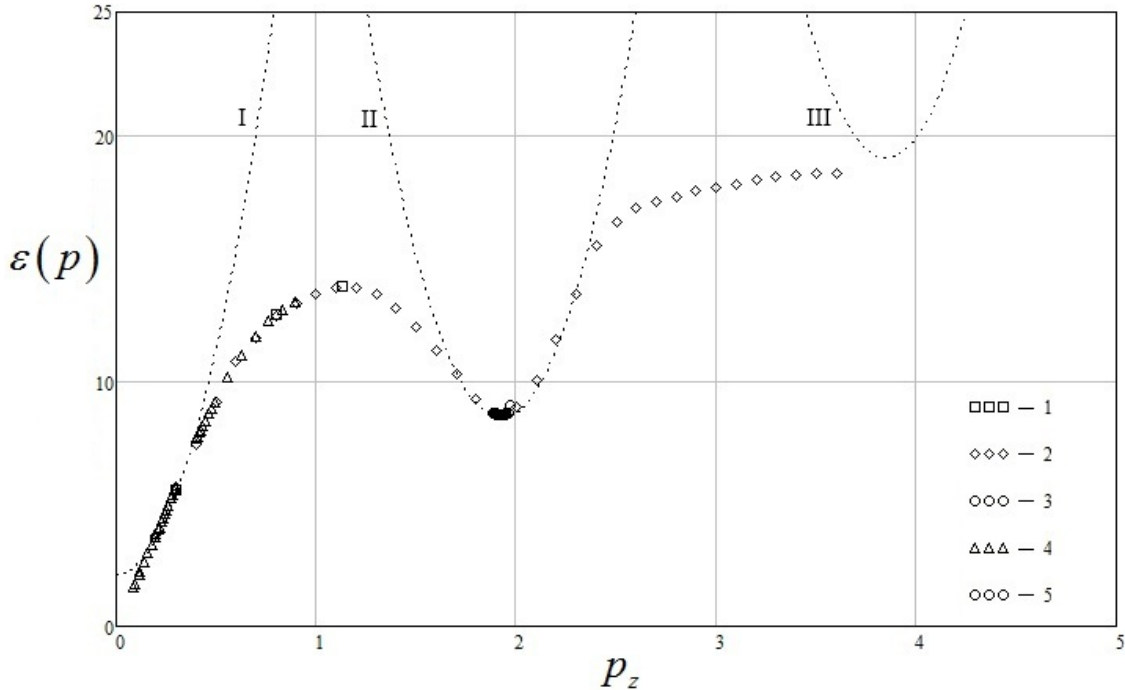


Рис. 3. Энергия  $\varepsilon$  (в градусах К) элементарных возбуждений гелия II как функция импульса  $p_z$  (в  $\text{\AA}^{-1}$ ) [18]. Параболы, изображенные точками и отмеченные цифрами I, II, III соответствуют следующим числам квантования: I -  $n = 0, m = 1$ ; II -  $n = 1, m = 2$ ; III -  $n = 2, m = 3$ .

Таким образом, в настоящем разделе показано, что экспериментальная зависимость энергии квазичастиц нормальной компоненты гелия II от импульса в коротковолновой области спектра может быть объяснена беспотоковым видом энергетического спектра ротонов и их периодическим расположением в горизонтальном и вертикальном направлениях.

### ПЛОТНОСТЬ НОРМАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ ГЕЛИЯ II С БЕСПОТОКОВЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ РОТОНОВ

Первоначально, используя классическое представление зависимости энергии ротонов от импульса вида (20), Ландау рассчитал следующие термодинамические величины нормальной компоненты гелия II: свободную энергию, энтропию, теплоемкость (на единицу массы) и плотность [8]. Затем, в той же работе, повторно опубликованной в УФН, но уже с Приложением, Ландау пересчитал полученные ранее термодинамические величины для энергии ротонов, постулируемой в виде [1]:

$$\varepsilon_r(p) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}. \tag{22}$$

Поэтому существует закономерный вопрос о правомерности применения зависимости энергии ротонов от импульса в классическом виде (20) или в виде (22).

Отношение плотности нормальной компоненты гелия II к полной плотности жидкого гелия (по традиции назовем это соотношением термином роэнкро) имеет вид [1]:

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{16 \pi^5 kT}{45 c^2 \rho} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 + \frac{\mu N_r}{\rho}. \tag{23}$$

Для решения поставленного вопроса в выражение (23) будем подставлять количество ротонов либо в виде

$N_r = N_r^{(1)} = \left( \frac{\mu k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}$ , которое определяется энергией ротона в виде (20) (линия I на рис. 4), либо -

$N_r = N_r^{(2)} = \frac{2\mu^{\frac{1}{2}} p_0^4}{3(2\pi \hbar^2)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\Delta_0}{kT}}$ , определяемое энергией ротона в виде (22) (линия II на рис. 4).

Ответом на поставленный вопрос будет служить сравнительная оценка совпадения теоретической зависимости роэнкро от температуры двух видов энергии ротон (20) и (22) с экспериментальными точками. При этом необходимо учитывать, что аналитические выражения зависимости роэнкро от температуры неприменимы для температур вблизи  $\lambda$  - точки и в окрестности нуля [9].

Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся экспериментальными данными зависимости роэнкро от температуры [20].

На рис. 4 маркерами "x" приведены рекомендуемые к использованию данные экспериментальных измерений величины роэнкро в зависимости от температуры в диапазоне температур от 0,15 K до 1,95 K.

Кривые I и II построены, исходя из выражения (23) для количества ротон в единичном объеме вида (20) и (22) соответственно:

$$\left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)_I = A_I x^4 + B_I x^{1.5} \exp\left(-\frac{D_I}{x}\right) \quad (24)$$

$$\left( \frac{\rho_n}{\rho} \right)_{II} = A_{II} x^4 + B_{II} x^{-0.5} \exp\left(-\frac{D_{II}}{x}\right) \quad (25)$$

где  $x = T/(1 K)$  - безразмерная температура;  $A_I = 1,19 \cdot 10^{-4}$ ,  $B_I = 5,66$ ,  $D_I = 6,7879$ ;  $A_{II} = 1,21 \cdot 10^{-4}$ ,  $B_{II} = 204,32$ ,  $D_{II} = 11,152$  - численно подобранные оптимальные значения констант в (24), (25).

Подбор оптимальных параметров осуществлялся по минимальному среднеквадратичному отклонению теоретической зависимости от экспериментальных точек.

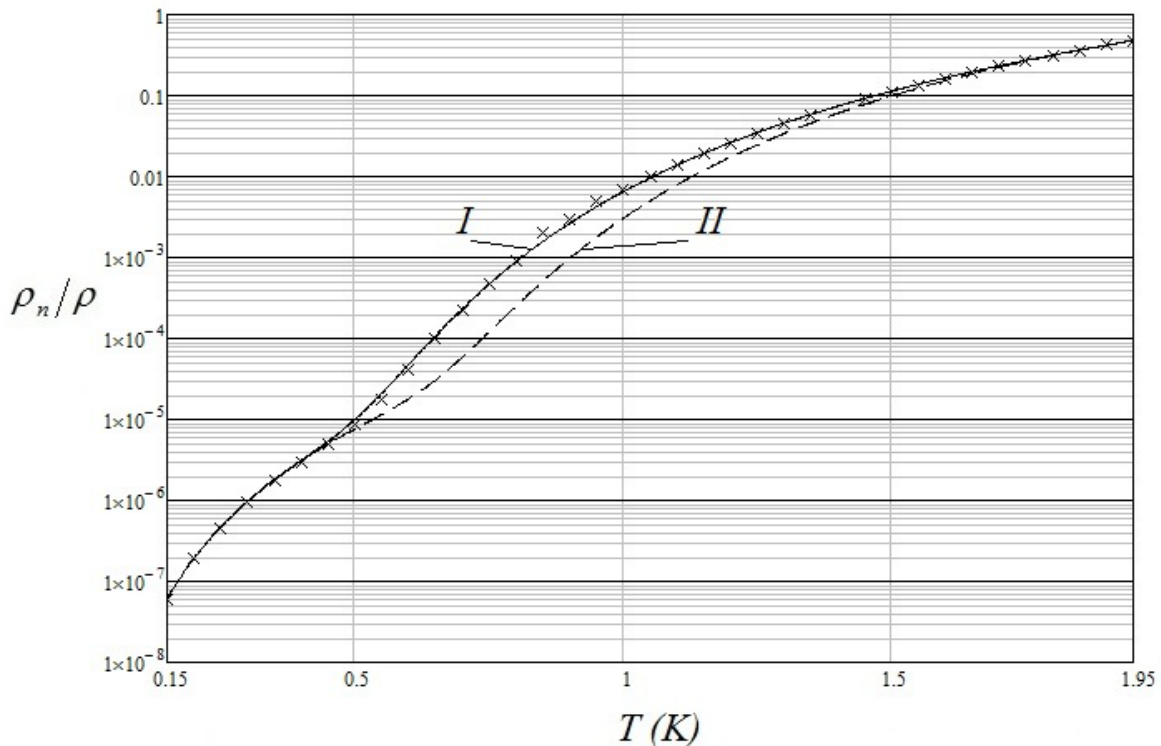


Рис. 4. Зависимость роэнкро ( $\rho_n/\rho$ ) от температуры  $T$  в диапазоне температур от 0,15 K до 1,95 K.

Значками "x" отмечены экспериментально измеренные точки. Кривая I соответствует  $N_r^{(1)}$ , Кривая II -  $N_r^{(2)}$ .

Наименьшее среднеквадратичное отклонение кривой I от экспериментальных точек составляет величину  $1,772 \cdot 10^{-3}$ , в то время, как для кривой II оно составляет величину в 2,48 раза больше -  $4,395 \cdot 10^{-3}$ .

Таким образом, в рассматриваемом диапазоне температур роэнкро гелия II с наибольшей степенью точности определяется беспотоковым энергетическим спектром ротон вида (20).

### УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА ДВИЖУЩИХСЯ АТОМАХ ГЕЛИЯ

В отличие от общепринятой концепции о рассеянии медленных нейтронов на гелии II, как неупругое их рассеяние на ротонах, представим другую картину такого процесса. Будем считать, что в конвективных ячейках нейтроны упруго рассеиваются на движущихся навстречу им атомах гелия. Рассеяние нейтронов на попутных атомах гелия не рассматриваем, т.к. они замедляются и не регистрируются времяпролетным нейтронным спектрометром [3].

Для подтверждения справедливости этого предположения сравним экспериментальные данные, полученные в Стокгольмском эксперименте на времяпролетном нейтронном спектрометре, с результатами теоретического анализа, который приведен ниже.

Рассчитаем параметры рассеяний нейтрона на движущемся атоме гелия.

Определим угол упругого рассеяния нейтрона  $\psi$  на движущемся в цилиндрической конвективной ячейке атоме  ${}^4\text{He}$ . Пусть атом гелия до столкновения имеет максимальную горизонтальную скорость  $\vec{V}_{He,\pm} = \mp V_{He} \vec{V}_n / |\vec{V}_n|$  в диаметрально противоположных точках верхней границы ячейки (рис. 1, 2).

Масса нейтрона равна  $m_n = 1,674\,928\,727\,6 \cdot 10^{-24}$  г [21], что в 0,252 раза меньше массы атома гелия. Полагаем, что скорость нейтрона до столкновения равна  $\vec{V}_n$ .

В результате упругого столкновения нейтрон приобретет скорость  $\vec{V}_{n1}$ , а атом гелия -  $\vec{V}_{He1,\pm}$ . При упругом столкновении, и в отсутствие внешних сил из законов сохранения импульса и кинетической энергии нетрудно получить выражение для определения относительной скорости рассеянного нейтрона  $V_{n1}/V_n$ :

$$\left(\frac{V_{n1}}{V_n}\right)^2 - 2\frac{V_{n1}}{V_n} \frac{1 \mp \xi_{\pm}}{1 + \zeta} \cos(\psi) + \frac{1 \mp 2\xi_{\pm} - \zeta}{1 + \zeta} = 0, \quad (26)$$

где  $\xi_{\pm} = \zeta \frac{V_{He,\pm}}{V_n}$ ,  $\zeta = \frac{m_{He}}{m_n}$ ,  $\psi$  - угол рассеяния нейтрона.

В уравнении (26) верхний знак соответствует рассеянию нейтрона на движущемся навстречу, нижний - на движущемся в том же направлении атоме гелия.

Решения уравнений (26) имеют вид:

$$\left(\frac{V_{n1}}{V_n}\right)_{1\pm} = \frac{1 \mp \xi_{\pm}}{1 + \zeta} \cos(\psi) + \sqrt{\left(\frac{1 \mp \xi_{\pm}}{1 + \zeta}\right)^2 \cos^2(\psi) - \frac{1 \mp \xi_{\pm} - \zeta}{1 + \zeta}} \quad (27)$$

$$\left(\frac{V_{n1}}{V_n}\right)_{2\pm} = \frac{1 \mp \xi_{\pm}}{1 + \zeta} \cos(\psi) - \sqrt{\left(\frac{1 \mp \xi_{\pm}}{1 + \zeta}\right)^2 \cos^2(\psi) - \frac{1 \mp \xi_{\pm} - \zeta}{1 + \zeta}} \quad (28)$$

Расчеты показывают, что наибольшую скорость имеют рассеянные нейтроны со скоростью атомов гелия  $(V_{n1}/V_n)_{1+}$ . Поэтому величина смещения во времени брэгговского обрезания первичного пучка [3] при заданном угле рассеяния будет минимальной, т.к. она обратно пропорциональна скорости рассеянной частицы.

Этот вывод основан на следующих оценках.

Будем полагать начальную скорость  $V_n$  такой же, что и скорость нейтрона после упругого рассеяния на ванадии, т.к. он рассеивает нейтроны изотропно и без изменения энергии [3]. В Стокгольмском эксперименте эта скорость оценивается величиной  $V_n = 973,71$  м/с [3].

Зададим начальную скорость нейтрона в виде  $V_n = L/t_0$ , где  $L$  - расстояние пролета нейтронов в спектрометре,  $t_0$  - время пролета.

Скорость нейтрона после его рассеяния на гелии II равна  $V_{n1} = L/(t_0 + \Delta t)$ , где  $\Delta t$  - величина смещения во времени брэгговского обрезания первичного пучка. Отсюда из равенства  $(V_{n1}/V_n)_{1+} = 1/(1 + \Delta t/t_0)$  можем оценить величину относительного смещения во времени  $\Delta t/t_0$ :

$$\Delta t/t_0 = \left(\frac{V_{n1}}{V_n}\right)_{1+}^{-1} - 1. \quad (29)$$

Из выражения (29) и экспериментальных данных, приведенных в [3], можно определить максимальную горизонтальную встречную скорость  $V_{He,+}/V_n$  в конвективной ячейке рассеивающего центра (атома гелия).

На рис. 5 приведены экспериментальные точки ( $\circ$  и  $\times$ ), показывающие зависимость горизонтальной скорости рассеивающего нейтрон атома гелия  $V_{He,+}/V_n$  от угла наблюдения  $\theta$ .



Таблица 2.

Максимальная горизонтальная скорость атома гелия  $V_{He,+}/V_n$  в конвективной ячейке при температурах  $T = 1,4 - 1,5 \text{ }^\circ\text{K}$  в зависимости от угла наблюдения  $\theta$  [3].

Вид фильтра	Угол наблюдения, $\theta$		$t_0$ , мкс	$t_0 + \Delta t$ , мкс	$\Delta t$ , мкс	$\Delta t/t_0$ *)	$\frac{V_{He,+}}{V_n}$ *)	$\left(\frac{V_{n1}}{V_n}\right)_{1+}$ *)
	град.°	рад						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Be (o)	59,4	1,037	3081 ± 5	3415 ± 10	334 ± 11	0,108	0,0355	0,902
	63,6	1,110	3081 ± 5	3395 ± 10	314 ± 11	0,10191	0,065	0,908
	67,7	1,182	3081 ± 5	3347 ± 10	266 ± 11	0,08634	0,1034	0,9205
	69,6	1,215	3081 ± 5	3338 ± 10	257 ± 11	0,0834	0,1136	0,923
	76,3	1,332	3081 ± 5	3305 ± 10	224 ± 11	0,0727	0,145	0,9322
	80,2	1,400	3081 ± 5	3317 ± 10	236 ± 11	0,0766	0,1481	0,9289
	83,0	1,449	3146 ± 10	3392 ± 10	246 ± 15	0,0782	0,1515	0,9275
	86,0	1,501	3081 ± 5	3362 ± 10	281 ± 11	0,0912	0,1431	0,9164
BeO (x)	90,0	1,571	3524 ± 10	3917 ± 15	393 ± 18	0,1115	0,1395	0,8997

\*) Для выбранного угла  $\theta$  погрешность соответствующих ему чисел в столбцах 7-9 определяется наибольшей алгебраической суммой погрешностей столбцов 4, 6.

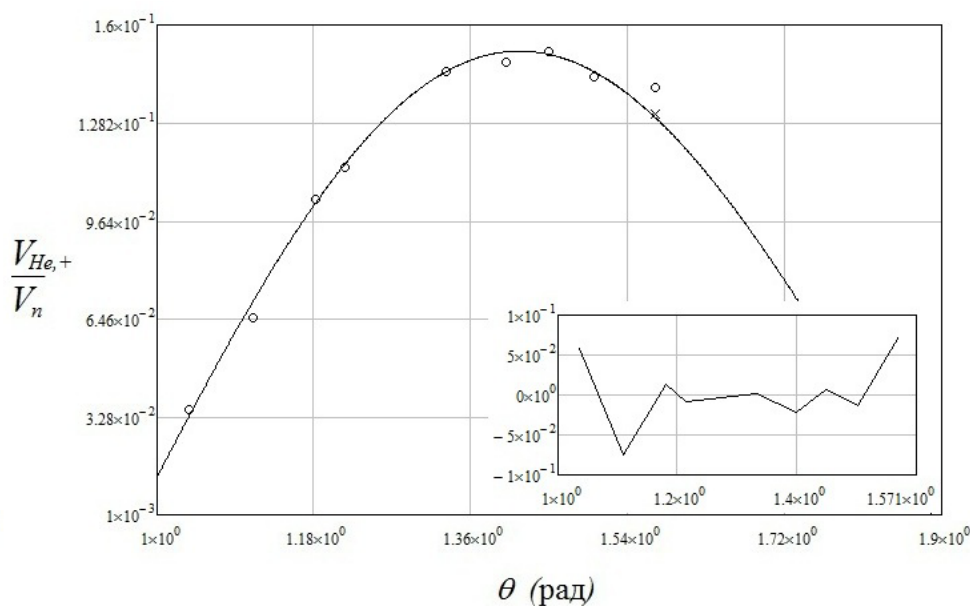


Рис. 5. Зависимость горизонтальной скорости атома гелия  $V_{He,+}/V_n$  в конвективной ячейке от угла наблюдения  $\theta$  (рад).

Из представленных в таблице 2 экспериментальных результатов следует, что в ячейке скорость рассеивающего атома гелия зависит от угла наблюдения  $\theta$ . При малых углах наблюдения - скорость мала. С приближением угла наблюдения к определенному значению, в нашем случае около  $83^\circ$ , скорость принимает максимальное значение, а затем снова уменьшается.

Отмеченное выше изменение скорости атома гелия в зависимости от угла наблюдения можно объяснить, основываясь на зависимости горизонтальной скорости гелия  $\Pi$  на верхней границе конвективной ячейки от  $r$ :  $v_r(r, L_z) \propto J_1(\sigma_{1,1}r/L_r)$  (19), где  $r$  - расстояния от центра ячейки до ее внешней границы. Такое объяснение возможно, если найти зависимость радиуса  $r$  от угла наблюдения  $\theta$ .

Для нахождения этой зависимости запишем выражение для спирали Архимеда:

$$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\varphi}{\varphi_m} \tag{30}$$

где  $\rho$  - полярный радиус,  $\varphi$  - полярный угол,  $\rho_m = \sqrt{(L_r \sigma_m / \sigma_{1,1})^2 + L_z^2} = 4,2313 \text{ } \text{\AA}$ ,

$$\varphi_m = \arctg(L_r \sigma_m / \sigma_{1,1} / L_z) = 0,6905.$$

Вид спирали Архимеда (30) определяется геометрическими размерами конвективной ячейки.

Вблизи верхней границы ячейки, в точке с координатами  $\rho_m, \varphi_m$  (например, точка  $b$  на рис. 2), горизонтальная скорость атома гелия максимальна. При столкновении в этой точке нейтрона с движущимся атомом гелия, скорость рассеянного нейтрона  $(V_{n1}/V_n)_{1+}$  является наибольшей из (27), (28). Поэтому далее все расчеты по угловому распределению рассеянного нейтрона будем проводить для вылетающего из точки  $\rho_m, \varphi_m$  быстрого нейтрона, т.к. только он фиксируется нейтронным спектрометром.

Перейдем в (30) к новым переменным. Полагаем  $\rho = r + \rho_m$ ,  $\varphi = \theta - \theta_0 + \varphi_m$ , что соответствует переносу точки  $\rho_m, \varphi_m$  в полюс полярных координат, сдвинутый по углу  $\theta$  по часовой стрелке на постоянный угол  $\theta_0$ . В этом случае радиус  $r$  можно представить в виде:

$$r = \frac{\rho_m}{\varphi_m}(\theta - \theta_0), \quad (31)$$

где величина угла  $\theta_0$  определяется из экспериментальных данных.

Подстановка (31) в (19) вблизи верхней границы ячейки приводит к выражению:

$$v_r(r, L_z) = V_{He,+} = -A \frac{\pi}{L_z} \frac{L_r}{\sigma_{1,1}} J_1 \left( \frac{\sigma_{1,1} \rho_m}{L_r \varphi_m} (\theta - \theta_0) \right) = -A \frac{\pi}{L_z} \frac{L_r}{\sigma_{1,1}} J_1 \left( \frac{3,834,233}{6,510,691} (\theta - \theta_0) \right). \quad (32)$$

Таким образом, относительная горизонтальная скорость  $V_{He,+}/V_n$  будет определяться равенством:

$$\frac{V_{He,+}}{V_n} = -A' J_1(4,1817(\theta - \theta_0)), \quad (33)$$

$$\text{где } A' = \frac{A \pi}{V_n L_z \sigma_{1,1}} \frac{L_r}{\sigma_{1,1}}.$$

Подставляя экспериментальные данные таблицы 2 в выражение (33), и проводя оптимизацию теоретических расчетов и экспериментальных данных методом наименьшего среднеквадратичного отклонения, определим значения констант:  $A' = 0,2603$ ,  $\theta_0 = 0,9755$ . Среднеквадратичное отклонение при этом достаточно мало, и составляет величину порядка  $3,919 \cdot 10^{-3}$ .

На рис. 5 сплошной линией показана оптимизированная кривая зависимости относительной горизонтальной скорости атома гелия  $V_{He,+}/V_n$  от угла наблюдения  $\theta$ . На вставке показано отклонение теоретической кривой от экспериментальных точек. Расчеты показывают, что величина отклонения не превышает 7,5%.

Таким образом, в настоящем разделе показано, что рассеяние нейтрона на ротоне можно представить, как упругое столкновение нейтрона с атомом гелия, движущимся в цилиндрической конвективной ячейке. На это указывает количественное соответствие полученных ранее другими авторами экспериментальных данных по рассеянию нейтронов на гелии II с теоретическими расчетами рассеяния нейтрона на движущемся в конвективной ячейке атоме гелия.

## КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ГЕЛИИ II

Наряду с описанным выше нейтронографическим анализом возможно исследование физических свойств ротоннов с помощью комбинационного рассеяния света. В работе [22] приведены данные по измерению на дифракционном монохроматоре спектра, интенсивности и поляризации света методом комбинационного Рамановского рассеяния излучения аргонового лазера (длина волны 514,5 нм, мощность 1 Вт) сверхтекучим гелием при температурах в интервале 1,16 °К и 2,14 °К.

В экспериментах падающий линейно поляризованный лазерный луч и рассеянный свет расположены в горизонтальной плоскости. Рассеянный свет собирался под углом 90° к падающему излучению в пределах телесного угла около 0,08 ср. Для обеспечения максимального уровня обнаруженного сигнала вектор электрического поля падающего лазерного излучения ориентировался в горизонтальном направлении [23]. Анализ интенсивности спектра рассеянного излучения отчетливо показал наличие асимметричного резкого пика, сдвинутого на энергию  $18.5 \pm 0.5$  °К относительно энергии падающего излучения.

В следующей работе по исследованию Рамановского рассеяния лазерного излучения сверхтекучим гелием [24] использовалась такая же экспериментальная установка, что и в первоначальной работе [22]. Однако, вместо дифракционного монохроматора использован спектрометр Фабри-Перо, чей свободный спектральный диапазон составлял величину 48,6 К, что примерно соответствует тройному сдвигу двух - ротонного комбинационного рассеянного света. В качестве источника света использовался аргоновый ионный лазер (длина волны 488,0 нм). В этой работе показано, что сдвиг энергии рассеянного излучения относительно

энергии падающего излучения равен  $17,022 \pm 0,027$  К при температуре 1,2 °К.

Проведенные в работах [1-3] измерения показали, что исследование рассеяния света является более точным, по сравнению нейтронографическим, инструментом для описания элементарных возбуждений в сверхтекучем гелии. Очень высокое разрешение этого метода позволяет с достаточно точно измерять такие характеристики возбуждений в жидком гелии, как энергия и времена жизни ротона.

Приведенные выше результаты экспериментов по комбинационному рассеянию света опишем, исходя из предложенной в настоящей работе конвективной модели структуры ротона.

### Дипольный момент ротона

Для определения дипольного момента ротона необходимо вычислить дипольный момент ускоренного атома, используя выражение [25]:

$$\vec{d}(r, z) = \gamma \dot{\vec{v}}(r, z), \quad (34)$$

где  $\dot{\vec{v}}(r, z)$  - ускорение атома гелия,  $\gamma = \frac{m_{He} \alpha_0}{2Z|e|}$ ,  $\alpha_0 = 0,21 \cdot 10^{-24}$  см<sup>3</sup> - поляризуемость атома гелия [26],  $m_{He}$  и  $Z=2$  - масса и заряд ядра атома гелия,  $e$  - элементарный заряд. В (34) параметр  $\gamma$  имеет величину  $\gamma \approx 7,269 \cdot 10^{-40}$  г·см<sup>3</sup>/ед. зар. СГСЕ.

Из (34) и (19) определим инерционный дипольный момент движущегося по замкнутой траектории атома гелия. Исходя из аксиальной симметрии внутреннего строения ротона, его дипольный момент должен быть ориентирован в вертикальном направлении. Покажем это.

Будем считать, что в проходящей через ось ячейки плоскости движутся по замкнутым и симметричным относительно оси ячейки траекториям два атома гелия. Определим проекции их суммарных дипольных моментов:

$$\begin{aligned} d_{rs}(r, z) &= d_r(r, z) + d_r(-r, z) = \gamma [\dot{v}_r(r, z) + \dot{v}_r(-r, z)], \\ d_{zs}(r, z) &= d_z(r, z) + d_z(-r, z) = \gamma [\dot{v}_z(r, z) + \dot{v}_z(-r, z)], \end{aligned} \quad (35)$$

где  $\dot{v}_r(r, z) = v_r(r, z) \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial r} + v_z(r, z) \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial z}$ ,  $\dot{v}_z(r, z) = v_r(r, z) \frac{\partial v_z(r, z)}{\partial r} + v_z(r, z) \frac{\partial v_z(r, z)}{\partial z}$ .

Учитывая зависимость проекций скорости  $v_r(r, z)$  и  $v_z(r, z)$  от координат  $r$  и  $z$  (19), нетрудно показать, что горизонтальный дипольный момент ротона равен нулю:  $d_{rs}(r, z) = 0$ , а вертикальный - отличен от нуля  $d_{zs}(r, z) \neq 0$ .

Исходя из (35) можно утверждать, что движущиеся по замкнутым и симметричным относительно оси ячейки траекториям в одной плоскости два атома гелия находятся в связанном состоянии.

Суммарный дипольный момент двух связанных атомов гелия равен:

$$d_{zs}(r, z) = \pi \frac{\gamma A^2}{L_z} \left[ J_0^2 \left( \frac{\sigma_{1,1} r}{L_r} \right) + J_1^2 \left( \frac{\sigma_{1,1} r}{L_r} \right) \right] \sin \left( 2\pi \frac{z}{L_z} \right), \quad (36)$$

и представляет собой два разнонаправленных диполя с цилиндрически симметричным распределением дипольного момента в пространстве.

Для оценки величины суммарного дипольного момента из (33) определим амплитуду скорости  $A$ :  $A = 179,71$  м/с.

Тогда максимальное значение суммарного дипольного момента для связанных атомов гелия достигается на оси ротона, и имеет порядок:

$$d_1 = \left| d_{zs} \left( 0, \frac{L_z}{4} \right) \right| = 0,226 \cdot 10^{-4} \text{ D}. \quad (37)$$

Определим количество атомов гелия, которые участвуют в конвективном движении в ротоне.

Из расчетов следует, что в объеме одного ротона находится 7 атомов гелия:

$$N_{Rot} = \frac{\rho}{m_{He}} V_{Rot} = \frac{0,145 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{6,646 \cdot 10^{-24} \text{ г}} 3,14 \cdot (5,61)^2 \cdot 3,262 \cdot 10^{-24} = 7,095, \quad (38)$$

где  $\rho = 0,145$  г/см<sup>3</sup> [20] - плотность гелия II,  $V_{Rot} = \pi L_r^2 L_z$  - объем ротона.

Отсюда можно предположить, что в конвективном движении в ротоне участвует три пары связанных атома гелия (36), которые находятся в трех плоскостях, сдвинутых по азимуту на 120 °.

Исходя из вышеизложенного, оценим величину максимального суммарного дипольного момента ротона в вертикальном направлении  $D_{\max} = 3d_1 = 0,678 \cdot 10^{-4}$  D. В горизонтальном направлении, без учета седьмого атома

гелия, дипольный момент ротона равен нулю.

Таким образом, приведенные выше оценки показывают, что дипольный момент ротона состоит из двух диполей, которые ориентированы в вертикальном направлении и направлены в противоположные стороны. Величина дипольного момента на оси ротона по порядку величины соответствует экспериментально измеренной [27].

**Седьмой атом гелия**

Из условия постоянства плотности гелия II следует, что седьмой атом гелия находится внутри ячейки и движется с тепловой скоростью, не покидая ее пределов. Для длительного удержания седьмого атома гелия в ротоне, и, учитывая симметрию задачи, необходимо потребовать, чтобы он двигался по круговой орбите относительно оси ячейки в плоскости  $z = L_z/2$ . В этом случае наличие седьмого осциллирующего внутри ротона атома гелия приведет к тому, что общий горизонтальный дипольный момент ротона  $d_\Sigma = d_{rs} + d_{r7}$  будет отличным от нуля:

$$d_\Sigma = d_{rs} + d_{r7} = \gamma \dot{v}_{r7}. \tag{39}$$

В выражении (39) ускорение атома гелия определяется выражением  $\dot{v}_{r7} = -r\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\pi z/L_z)$ , и задается зависимостью радиуса осциллятора от времени вида:  $R_{os} = r \cos(\omega_0 t) \sin(\pi z/L_z)$ , где  $0 \leq r \leq 5,61 \text{ \AA}$  - радиус движения атома гелия внутри ротона,  $\omega_0$  - частота осцилляций,  $t$  - время.

Сделанное выше предположение о движении атома гелия по круговой орбите может быть физически обосновано действием Ван-дер-ваальсовых ориентационных сил [28], которые характеризуют взаимодействие между электрическими диполями ротона и седьмого атома гелия.

Полная энергия ориентационного взаимодействия диполей определяется суммой энергии взаимодействия диполя атома гелия с двумя разнонаправленными диполями ротона [28]:

$$U(r) = -2\gamma R^{-3} |d_{zr}| |d_{r7}| \cos(\mathcal{G}_d), \tag{40}$$

где  $R$  - расстояние между центрами диполей,  $\mathcal{G}_d$  - угол между направлениями диполей ротона и диполем атома гелия. Координаты центров диполей задаются в виде: для седьмого атома гелия -  $(r, L_z/2)$ ; для двух диполей ротона -  $(0, (2 \pm 1)L_z/4)$ .

Исходя из выдвинутого выше предположения о длительном удержании седьмого атома гелия внутри ротона, можно утверждать, что расстояние между центрами диполей постоянно. Поэтому, полагая  $R = R_0 = \text{const}_1$  и  $\mathcal{G}_d = \mathcal{G}_{d0} = \text{const}_2$ , определим из (40) координату минимума энергии ориентационного взаимодействия диполей.

На рис. 6 показана зависимость энергии ориентационного взаимодействия диполей ротона и атома в относительных единицах от расстояния  $r/L_r$  от оси ротона.

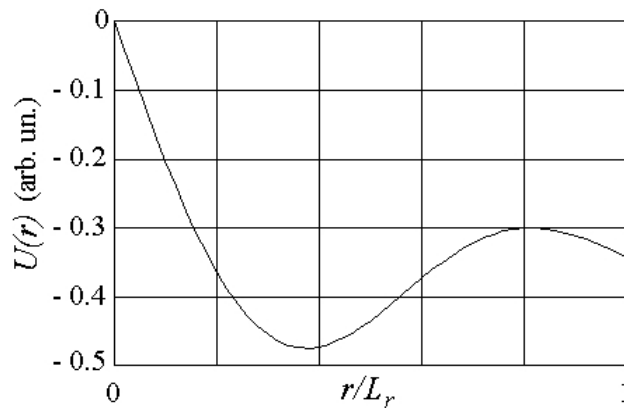


Рис. 6. Зависимость энергии ориентационного взаимодействия диполей ротона и атома гелия в относительных единицах от расстояния от оси ротона.

Из рисунка следует, что минимум энергии ориентационного взаимодействия диполей наблюдается на расстоянии  $r = 0,38L_r$ .

Отсюда следует оценка радиуса круговой орбиты седьмого атома гелия:  $r = 2,13 \text{ \AA}$ .

**Комбинационное рассеяние света на диполях гелия II**

Рассмотрим феноменологическую модель комбинационного рассеяния света на дипольных моментах ротонных в гелии II. Согласно предложенной выше модели строения ротона, ускоренные внутри него атомы

гелия поляризованы под действием инерционных сил, которым можно привести в соответствие напряженность эффективного электрического поля  $\vec{E}(r, z)$ . Вектор электрической индукции в среде определяется через напряженность электрического поля и поляризацию среды:  $\vec{D}(r, z) = \vec{E}(r, z) + 4\pi\vec{P}(r, z)$ . В отсутствие внешних зарядов и токов, когда  $\text{div}(\vec{D}) = 0$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ , вектор электрической индукции равен нулю. Тогда напряженность электрического поля в ротоне определяется выражением:

$$\vec{E}(r, z) = -4\pi\vec{P}(r, z), \quad (41)$$

где поляризация среды определяется выражением  $\vec{P}(r, z) = 3d_{zs}(r, z)\vec{e}_z + d_{r7}\vec{e}_r$ , а  $\vec{e}_z, \vec{e}_r$  - единичные вектора вдоль оси и радиуса ротона соответственно.

В рассеянии поляризованного лазерного света с ориентированным в направлении наблюдения вектором напряженности электрического поля принимает участие только горизонтальная составляющая поляризации среды, т.е.  $P_x(0, L_z/2) = d_{r7} = -\gamma r \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \sin(\pi z/L_z)$ .

Представим временную часть падающей волны лазерного света частоты  $\Omega$  в виде  $E(t) = E_0 \cos(\Omega t)$ . В поле этого излучения поляризуемость, а значит и параметр  $\gamma$ , можно представить в виде разложения по амплитудам малых возмущений [29]:

$$\gamma(q) \approx \gamma(0) + \left. \frac{d\gamma(q)}{dq} \right|_{q=0} q, \quad (42)$$

где  $q = E_0 \cos(\Omega t)$ .

Тогда напряженность электрического поля рассеянного лазерного излучения принимает вид:

$$E_x\left(\frac{L_z}{2}, q\right) = 4\pi r \omega_0^2 E_0 \left( \gamma(0) \cos(\omega_0 t) + \gamma_1\left(\frac{L_z}{2}, 0\right) \left( \cos((\Omega - \omega_0)t) + \cos((\Omega + \omega_0)t) \right) \right), \quad (43)$$

где  $\gamma_1\left(\frac{L_z}{2}, 0\right) = \left. \frac{1}{2} \frac{d\gamma(q)}{dq} \right|_{q=0}$ .

Как видно, в напряженности электрического поля рассеянного света (43) присутствует излучение с частотой, сдвинутой на  $\omega_0$  от основной частоты  $\Omega$ . Исходя из (39) и экспериментальных данных [3], определим радиус движения седьмого атома гелия, при котором наблюдается сдвиг частоты на величину

$$\omega_0 = 17 \text{ K} = 35,4229 \cdot 10^{10} \text{ Гц}; \quad r\omega_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m_{He}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}} \cdot 1,2 \text{ K}}{6,646 \cdot 10^{-24} \text{ г}}} = 7059,4 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Отсюда радиус движения седьмого атома гелия равен  $r = R_{He} = \frac{7059,4}{35,4229} 10^{-10} \text{ см} = 1,993 \text{ \AA}$ . Полученная величина радиуса количественно

соответствует той, которая приведена в предыдущем разделе:  $r = 2,13 \text{ \AA}$ .

Таким образом, рассеяние лазерного излучения на ротоне с описанными выше параметрами количественно соответствуют экспериментальным данным по комбинационному рассеянию света на гелии II. Такое соответствие указывает на возможность использования предложенной модели природы и структуры ротона для описания теплофизических свойств гелия II.

## ВЫВОДЫ

В работе дан анализ существующих в настоящее время представлений о таких термодинамических характеристиках фононов и ротонов гелия II, как свободная энергия, энергия, количество, а также соответствующая им часть плотности нормальной компоненты гелия II. В настоящее время термодинамические параметры ротонов (свободная энергия, энергия, число ротонов, ротонная часть плотности нормальной компоненты гелия II) имеют неопределенное значение: либо энергия ротона в функции распределения Планка минимальна в окрестности некоторого значения импульса  $p_0 \neq 0$ , либо она минимальна при нулевом импульсе  $p_0 = 0$ . Физически это означает то, что либо в гелии II равновесный энергетический спектр характеризуется направленным потоком ротонов, либо равновесный энергетический спектр ротонов беспотоковый.

В работе предложено рассматривать беспотоковый энергетический спектр для описания ротонной части нормальной компоненты гелия II, и дано физическое обоснование такого подхода. Это предложение основано на привлечении в описании физических процессов в гелии II такого процесса, как конвекция, который до настоящего времени в задачах о сверхтекучести не рассматривался. Оценочными расчетами показано, что

термодинамические параметры гелия II (коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности) соответствуют таким, при которых возможно формирование устойчивых цилиндрических конвективных ячеек типа ячеек Бенара.

Анализ процесса получения из жидкого гелия сверхтекучего гелия показывает, что при переходе через  $\lambda$  - точку конвективные процессы в переходном слое нормальной компоненты гелия II формируют горизонтальные слои толщиной порядка  $h = 3,262 \text{ \AA}$ , в которых плотно упакованы прямоугольные гексагональные призмы с такой же высотой и длиной ребра  $c = 3,243 \text{ \AA}$ . В такие гексагональные призмы вписаны цилиндрические конвективные ячейки высотой  $h = L_z = 3,262 \text{ \AA}$  и диаметром  $D_r = 5,61 \text{ \AA}$ , которые представляют собой ротоны. Для таких конвективных ячеек описано пространственное распределение конвективной скорости атомов гелия. Определены вертикальные и горизонтальные пространственные периоды распределения ротонного газа в объеме гелия II. Показано, что из-за пространственной периодичности распределения ротонов, их энергетический спектр квантуется по вертикальному и горизонтальному импульсу (волновому числу). Такое квантование спектра позволяет с достаточной степенью точности описать экспериментальную зависимость энергетического спектра квазичастиц нормальной компоненты гелия II. Показано, что теоретически рассчитанная кривая рознькро при беспотоковом ( $p_0 = 0$ ) энергетическом спектре в широком интервале температур (от 0,15 К до 1,95 К) наиболее точно соответствует экспериментальным данным. Для беспотокового энергетического спектра теоретически показано и экспериментально подтверждено, что рассеяние медленных нейтронов происходит не на ротонах, а на движущихся в них атомах гелия. Использование конвективной модели для описания рассеяния света на гелии II позволило определить дипольный момент ротона, а также количество участвующих в формировании ротона атомов гелия. Показано, что значение рассчитанного дипольного момента ротона по порядку величины совпадает с экспериментально измеренным. Оценочные расчеты показывают, что в формировании ротона в среднем участвуют семь атомов гелия. При этом показано, что два атома гелия в ротоне находятся в связанном состоянии, т.к. синхронно движутся с конвективной скоростью по замкнутым траекториям в проходящей через ось ротона вертикальной плоскости. Всего таких связанных пар - три, и они совершают движение в трех расположенных через равные углы по азимуту плоскостях. Согласно оценкам, седьмой атом гелия находится внутри ротона. Он движется в горизонтальной плоскости на полувывоте ротона по круговой траектории. Исходя из анализа энергии ориентационного взаимодействия диполей, дана теоретическая оценка. Полученная оценка радиуса движения седьмого атома гелия с достаточной степенью точности соответствует экспериментальным данным по рассеянию света на гелии II. В заключении сделан вывод о применимости конвективной модели природы и структуры ротона для описания физических свойств гелия II.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau L.D. Teoriya sverhtekuchesti geliya-II. Prilogenie [The theory of superfluidity of helium-II. Attachment] // UFN. – 1967. – V. 93. – Iss. 11. – P. 495 - 520. (in Russian)
2. Cohen M., Feynman R.P. Theory of Inelastic Scattering of Cold Neutrons from Liquid Helium // Phys. Rev. – 1957. - Vol. 107. – No.1. – P.13-24.
3. Palevsky H., Otnes K., Larsson K.E. Excitation of Rotons in Helium II by Cold Neutrons // Phys. Rev. – 1958. – Vol. 112. – No. 1. – P.11-18.
4. Yarnell J.L., Arnold G.P., Bendt P.J., Kerr E.C. Excitations in Liquid Helium: Neutron Scattering Measurements // Phys. Rev. – 1959. – Vol.113. - No.6. – P.1379-1386.
5. Fizicheskaya encyklopedia [Physical encyclopedia] / Gl. red. A. M. Prohorov. Red.kol. D.M. Alekseev, A. M. Baldin, A. M. Bonch-Bruevich, A.S. Borovik-Romanov i dr. – M.: Sov. encyclopedia. T.I. Aaronova – Boma effekt – Dlinnie linii. - 1988. 704 p. (in Russian)
6. Feynman R.P. Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium // Physical Review. – 1954. – Vol. 94. – No.2. – P. 262-277.
7. Kruglov V.I., Collett M.J. Roton Excitation Spectrum in Liquid Helium II // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 87. – No.18. – P.185302.
8. Landau L.D. Teoriya sverhtekuchesti geliya-II [The theory of superfluidity of helium-II] // GETF. – 1941. – Vol. 11. – P.592-616. (in Russian)
9. Halatnikov I.M. Teoriya sverhtekuchesti [The theory of superfluidity]. – M.: Nauka, 1971. – 320p. (in Russian)
10. Bozbiei L.S., Borts B.V., Kostikov A.O., Tkachenko V.I. Formation of Elementary Convective Cell in Horizontal Layer of Viscous Incompressible Fluid // East European J. of Phys.. – 2014. – Vol.1. – No.4. – P. 49-56.
11. Andronikashvili E.L. Issledovanie teplovoj strukturi geliya II s pomoshchju rasseyaniya holodnih nejtronov [Study of the thermal structure of helium II using cold neutron scattering] // UFN. – 1960 – Vol. 72. – Iss. 4. - P. 697-710. (in Russian)
12. Gershuni G.Z., Zguhovitskij E.M. Konvektivnaya ustojchivost neszgimaemoj zgidkosti [Convective stability of an incompressible fluid]. – M: Nauka, 1972. – 393p. (in Russian)
13. Getling A.V. Formirovanie prostranstvennih struktur konvekcii Releya-Benara [Formation of Rayleigh-Benard's spatial convection structures] // UFN. – 1991. – Vol.161. – Iss. 9. – P. 1–80. (in Russian)
14. Daunt Dzh.G, Smit P.S. Sovremennoe sostoyanie problemi zhidkogo geliya [The current state of the problem of liquid helium] // UFN. – 1955. – Vol. 56. – Iss. 3. – P. 249-416. (in Russian)
15. Kapitsa P.L. Sverhtekuchest geliya – II [Superfluidity of helium-II] // UFN. – 1967. – Vol. 93. – Iss. 11. – P. 481–494. (in Russian)

- Russian)
16. Meyer L., Mellink J.H. The Thermomechanical Effects in Liquid Helium II // *Physica*. – Vol. 13. – Iss. 4–5. – P. 197-215.
  17. Svoystva elementov. Ch. I. Fizicheskie svoystva. Spravochnik [Properties of elements. Part I. Physical properties. Reference book]. Pod red. G.V. Samsonova. – M.: Metallurgiya, 1976. – 600p. (in Russian)
  18. Polezgaev V.I., Soboleva E.B. Konvekciya Releya-Benara v okolo-kriticheskoj zgidkosti vblizi poroga ustojchivosti [Rayleigh-Benard convection in a near-critical fluid near the stability threshold] // *Izv. RAN. Mehanika zgidkosti i gaza*. – 2005. - No. 2. – P. 48-61. (in Russian)
  19. Royal Society Mathematical Tables: Vol. 7. Bessel functions, P. III. Zeros and associated values. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. Russkij perevod: Tablici nulej Besselya. – M.: VC AN SSSR, 1967. – BMT; Iss. 44.
  20. Donnelly R.J., Barenghi C.F. The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. – 1998. – Vol. 27. – No. 6. – P. 1217-1274.
  21. Fizicheskaya encyklopedia [Physical encyclopedia] / Gl. red. A.M. Prohorov. Red.kol. D.M. Alekseev, A.M. Baldin, A.M. Bonch-Bruevich, A.S. Borovik-Romanov i dr. – M.: Bolschaya Rossijskaya encyklopedia. Vol. 3. Magnitoplazmennij – Pojntinga teorema. – 1992. 672 p. (in Russian)
  22. Greytak T.J., Yan J. Light Scattering From Rotons In Liquid Helium // *Physical Review Letter*. – 1969. – Vol. 22. – No. 19. – P. 987 – 990.
  23. Greytak T.J. Light Scattering from Superfluid Helium. Quantum Liquids. Lectures presented at the International School of Low Temperature Physics. Edited by J. Ruvalds and T. Regge. Erice, Italy, June 11-25, 1977.
  24. Greytak T. J., Woerner R., Yan J., Benjamin R. Experimental Evidence for a Two-Roton Bound State in Superfluid Helium // *Physical Review Letters*. – 1970. – Vol. 25. – No. 22. – P.1547 - 1550.
  25. Melnikovsky L.A. Polarization of Dielectrics by Acceleration // *J. Low Temp. Phys.* – 2007. – Vol. 148. – P. 559-564.
  26. Spravochnik himika. Tom 1. Obschie svedeniya, stroenie veschestva, svoystva vazgnejshih veschestv, laboratnaya tehnika [Reference book of the chemist. Volume 1. General information, the structure of matter, the properties of critical substances, laboratory equipment] / Pod red. B.P. Nikolskogo. – M.-L.: Himiya, 1966 – 1071 p. (in Russian)
  27. Poluektov Yu.M., Savchenko V.N. On Electric Polarization of Helium Atoms by Acceleration / *PAST, Series: Nuclear Physics Investigations (57)* – 2012. – No. 1. – P. 299-301.
  28. Smirnova N.A. Metodi statisticheskoj termodinamiki v fizicheskoj himii [Methods of statistical thermodynamics in physical chemistry]. – M.: Vish. Shkola, 1982. – 455p. (in Russian)
  29. Fabelinskij I.L. Otkritie kombinacijnogo rasseyaniya sveta [The discovery of Raman scattering of light] // *UFN*. – 1978. – Vol. 126. – Iss. 1. – P. 124 - 152. (in Russian)

PACS: 05.40.-a, 02.50.Ey, 68.43.Jk, 66.30.J-

## TEMPERATURE-ABNORMAL DIFFUSIVITY IN TILTED SPATIALLY PERIODIC POTENTIALS

I.G. Marchenko<sup>1,2</sup>, I.I. Marchenko<sup>3</sup>, V.I. Tkachenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>National Scientific Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"

1, Akademicheskaya St., Kharkov, 61108, Ukraine

<sup>2</sup>V.N. Karazin Kharkov National University

4 Svobody Sq., Kharkov, 61077, Ukraine

<sup>3</sup>NTU „Kharkov Polytechnic Institute”

21 Frunze St., Kharkov, 61145, Ukraine

e-mail: [march@kipt.kharkov.ua](mailto:march@kipt.kharkov.ua)

Received January 25, 2017

The paper describes diffusion of particles in a tilted spatially periodic potential under the action of external forces in the case of a low friction. It is shown that in underdamped systems, a region of temperature-abnormal diffusivity (TAD) exists, in which the diffusion coefficient increases with decreasing temperature. The TAD width and its position depend on the friction coefficient and the system parameters. The analytical expression for diffusion coefficients in TAD area is derived. These results are important for experimental investigations of TAD and its application.

**KEY WORDS:** diffusion, computer simulation, periodic structures, Langevin equation, time-periodic fields

## ТЕМПЕРАТУРНО-АНОМАЛЬНА ДИФУЗИЯ У ПОХИЛИХ ПРОСТОРОВО-ПЕРІОДИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛАХ

I.G. Марченко<sup>1,2</sup>, I.I. Марченко<sup>3</sup>, В.I. Ткаченко

<sup>1</sup>Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

вул. Академічна 1, м. Харків 61108, Україна

<sup>2</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

пл. Свободи 4, м. Харків, 61077, Україна

<sup>3</sup>НТУ «Харківський політехнічний інститут

вул. Фрунзе 21, м. Харків 61145, Україна

У роботі досліджена дифузія частинок у похилих просторово-періодичних потенціалах під дією зовнішніх сил у системах з низьким коефіцієнтом тертя. Показано, що у всіх недодемпфованих системах існує обмежена область температурно-аномальні дифузії (ТАД). У цій області коефіцієнт дифузії зростає із зниженням температури. Визначені ширина та положення області ТАД в залежності від значення коефіцієнту тертя та параметрів системи. Знайдені аналітичні вирази для коефіцієнтів дифузії в межах низьких температур. Отримані залежності мають важливе значення для експериментального виявлення явища температурно-аномальної дифузії та подальшого його використання.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** дифузія, комп'ютерне моделювання, періодичні структури, рівняння Ланжевена, періодичні поля

## ТЕМПЕРАТУРНО-АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ В НАКЛОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

I.G. Марченко<sup>1,2</sup>, I.I. Марченко<sup>3</sup>, В.I. Ткаченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая 1, г. Харьков 61108, Украина

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

пл. Свободы 4, г. Харьков, 61077, Украина

<sup>3</sup>НТУ «Харьковский политехнический институт

ул. Фрунзе 21, г. Харьков 61145, Украина

В работе исследована диффузия частиц под действием внешних сил в пространственно-периодических потенциалах, характеризующихся малыми значениями коэффициента трения. Показано, что во всех недодемпфированных системах существует ограниченная область температурно-аномальной диффузии (ТАД). В этой области коэффициент диффузии возрастает с понижением температуры. Определены ширина и положение области ТАД в зависимости от значений коэффициента трения и параметров системы. Найдены аналитические выражения для коэффициентов диффузии в пределе низких температур. Полученные зависимости имеют важное значение для экспериментального обнаружения явления температурно-аномальной диффузии и дальнейшего его использования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** диффузия, компьютерное моделирование, периодические структуры, уравнения Ланжевена, периодические поля

Диффузия в периодических структурах играет ключевую роль во многих физических, химических и биологических процессах [1,2]. Интерес к изучению процессов транспорта частиц в наклонных периодических потенциалах (washboard potentials) связан с широким кругом физических систем, которые ими описываются. К таким системам относятся контакты Джозефсона, суперионные проводники, волны зарядовой плотности,



системы фазовой автоподстройки частоты и пр. [3].

В последние годы наблюдается возрастающий интерес к экспериментальным исследованиям ускорения диффузии частиц путем приложения внешнего поля [4-7]. Изменяя характеристики поля можно эффективно управлять процессами диффузии. Это открывает новые технологические возможности управления диффузией без повышения температуры.

Первые подробные исследования движения Броуновских частиц в наклонных периодических потенциалах были выполнены Х. Рискемом [8-13], как для случая недодемпфированного, так и для передемпфированного движения. Было показано, что для недодемпфированного случая важным в поведении ансамбля частиц является возникновение “локализованных” и “бегущих” решений. При внешней силе  $F$  превышающей критическое значение  $F_{cr}$  возникает бифуркация и вместо одного решения, возникает два: так называемые “локализованное” и “бегущее” решения. Обобщение результатов работ [8-13] можно найти в монографии [3]. Х. Рискемом были получены функции распределения частиц и выражения для мобильности частиц. В то же время коэффициент диффузии не исследовался. По-видимому, впервые методами численного решения уравнения Ланжевена диффузия систематически исследовались Ф. Марчезони [14-15]. Им был установлен существенный рост пространственной диффузии частиц в системах с малой диссипацией вблизи критической силы, вызванный переходом частиц из “локализованного” в “бегущее” решение. Дальнейшее развитие работ по изучению диффузии под воздействием постоянной силы было связано с работами группы К. Линденберг [16-19]. В работе [16] изучалось поведение дисперсии ансамбля частиц во времени. Температурная зависимость диффузии была исследована в [19]. По-видимому, в этой работе авторами впервые было показано что в наклонных периодических потенциалах коэффициент диффузии ведет себя аномальным образом. При некотором значении силы он рос с понижением температуры. Однако, ограниченность численных данных не позволила авторам установить правильную температурную зависимость. Ими был сделан вывод о том, что коэффициент диффузии имеет степенную зависимость от обратной температуры:  $D_{max} \sim T^{-3,5}$ .

В работе [20] нами впервые было показано, что в определенном интервале сил диффузия возрастает с понижением температуры экспоненциальным образом:  $D_{max} \sim \exp(\varepsilon/kT)$ . Это явление авторы позднее назвали температурно-аномальной диффузией (ТАД) [21]. Также были установлены физические причины такого аномального явления. Показано, что диффузия растет с понижением температуры за счет экспоненциального роста корреляционного времени. В работе [22] была построена феноменологическая модель, объясняющая это поведение. Было показано, что существование эффективного двухямы потенциала в пространстве скоростей в недодемпфированных системах приводит к экспоненциальному росту коэффициента диффузии. Однако, исследование области ТАД в работе [21] было проведено лишь для одного значения безразмерного коэффициента трения  $\gamma$ . Исследование ТАД было продолжено в работе [23]. И. Соколов и Б. Линднер подтвердили существование области ТАД в широком интервале  $\gamma$ . Они численно построили диаграмму существования ТАД для различных  $F$  и  $\gamma$ , используя результаты моделирования уравнений Ланжевена. В то же время, расчеты не были проведены для малых  $\gamma$  ( $\gamma \leq 0,1$ ), т.к. в этом случае время компьютерных расчетов существенно возрастает ( $\sim 1/\gamma$ ).

Целью данного исследования является установление области существования ТАД при малых  $\gamma$  на основе обширных компьютерных вычислений, а также получение аналитических выражений для коэффициента диффузии и ширины зоны ТАД на основе теоретической модели, предложенную в работе [22].

#### МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Движение частицы на одномерной решетке под действием внешней силы  $F$  описывалось уравнением Ланжевена:

$$m \ddot{X} = -\frac{d}{dx}U(X) - \Gamma \dot{X} + F + \xi(t), \quad (1)$$

где  $t$  - время,  $X$  - координата частицы в одномерной решетке,  $m$  - ее масса,  $\Gamma$  - коэффициент трения. Точка сверху означает дифференцирование по времени. Член  $\xi(t)$  описывает термические флуктуации. Предполагается, что шум является гауссовым белым и соответственно для термических флуктуаций выполняется соотношение:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\Gamma kT \delta(t-t'), \quad (2)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура.

В простейшем случае потенциальная энергия частицы  $U$  в одномерной периодической решетке может быть записана следующим образом:

$$U(X) = -\frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}X\right), \quad (3)$$

где  $a$  - постоянная решетки, а  $U_0$  - высота потенциального барьера.

На движущуюся частицу действует периодическая сила со стороны решетки  $F_{lat}$  :

$$F_{lat} = -\frac{dU}{dX} = F_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a} X\right). \quad (4)$$

Величина  $F_0 = \frac{\pi}{a} U_0$ , называемая критической силой [16, 24], соответствует минимальной действующей силе, необходимой для преодоления в вязкой среде энергетического барьера, разделяющего два соседних положения частицы на одномерной решетке. Параметры используемого пространственно-периодического потенциала были теми же, что и в работах [20-22]:  $U_0 = 0,08$  эВ,  $a = 2,0$  Å. Масса частиц соответствовала массе водорода и была равна 1 атомной единице массы.

Стохастические уравнения (1)-(2) для каждой частицы решались численно методом Эйлера [25] с шагом по времени составляющим менее 0,01 периода собственных малых колебаний. Статистическое усреднение проводилось по ансамблю с количеством частиц не менее  $N = 10^5$ . Начальные условия задавались следующим образом: частица помещалась в начале координат и ей случайным образом сообщалась скорость, имеющая Максвелловское распределение по температуре. Для достижения равновесной функции распределения частиц как по скоростям, так и по координатам проводилась термализация системы в течение  $10^4$  временных шагов. Как показали расчеты, после этого времени распределение, как по координатам, так и по скоростям ансамбля частиц не менялось. В процессе термализации частицы могли совершать скачок в соседние элементарные ячейки одномерной решетки. Для того чтобы диффузия частиц происходила из начала координат такие частицы перемещались в первую элементарную ячейку путем трансляции на целое количество постоянных решетки.

Коэффициент диффузии вычислялся по дисперсии  $\sigma^2$  в распределении ансамбля движущихся частиц при стремлении времени к бесконечности:

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{ef}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2t}, \quad (5)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по ансамблю. При каждом расчете коэффициента диффузии определялось время  $t_{lin}$  достижения линейной зависимости дисперсии от времени. Коэффициент диффузии определялся при времени  $t > 100t_{lin}$ .

Для сопоставления данных полученных в данной работе с результатами других авторов, перейдем к безразмерным величинам времени  $\tau$  и расстояния  $x$  [3]:

$$x = \frac{2\pi X}{a}, \quad \tau = t / \tau_0, \quad (6)$$

где  $\tau_0 = a\sqrt{2m/U_0}$  - период собственных малых колебаний около положения равновесия в потенциальном поле  $U(X)$ . Далее мы также будем использовать безразмерные величины температуры  $T'$  и трения  $\gamma$ :

$$T' = \frac{Tk}{U_0}; \quad \gamma = \Gamma \frac{a}{\pi\sqrt{2mU_0}}; \quad (7)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

### Численное решение уравнений Ланжевена

Было проведено численное моделирование уравнений (1)-(2) для различных значений коэффициентов трения и температур. Зависимости коэффициентов диффузии  $D(F/F_0)$  от силы для различных коэффициентов трения при температуре  $T = 0,19$  приведены на рис. 1. Для двух значений  $\gamma$  ( $\gamma = 0,03$  и  $\gamma = 0,003$ ) были также построены такие зависимости при температурах  $T = 0,13$  и  $T = 0,39$ . Из этих двух групп графиков видно, что независимо от величины  $\gamma$  в ограниченном интервале сил наблюдается область ТАД. На рис. 2 приведена температурная зависимость коэффициента диффузии от обратной температуры при  $\gamma = 0,03$ . При выбранном значении действующей силы  $F/F_0 = 0,1$  наблюдается максимальное усиление диффузии для данного  $\gamma$ . Как следует из рис. 2, при  $1/T > 1$  наблюдается рост коэффициента диффузии с падением температуры.

Как видно из рис. 1, ширина интервала действующих сил, в котором наблюдается ТАД  $\Delta F_{TAD}$ , линейно уменьшается с уменьшением  $\gamma$ . Детальный анализ всех графиков приведенных на рис. 1 показывает, что  $\Delta F_{TAD}$  линейно уменьшается с коэффициентом трения, а максимальное значение  $D$  с уменьшением  $\gamma$  линейно растет. Чтобы понять физические причины такого поведения, проанализируем изменение функции распределения частиц по скоростям  $n(V)$ , которые были построены для значений  $F$ , приведенных на рис. 1.

На рис. 3 в качестве примера построенных зависимостей приведен график функции распределения частиц по скоростям для двух различных значений  $\gamma$ , отличающихся на порядок ( $\gamma = 0,003$  и  $\gamma = 0,0003$ ). Температура была постоянной и равнялась  $T = 0,19$ . Величина  $V_0 = \sqrt{U_0/m}$ . Значение действующих на частицы сил  $F$  выбиралось таким образом, чтобы коэффициент диффузии был максимальным для данных значений  $\gamma$  и  $T$ . Как видно из рисунка, два приведенных графика совпадают. Однако, при этом оказалось, что и отношение действующих сил так же отличались на порядок.

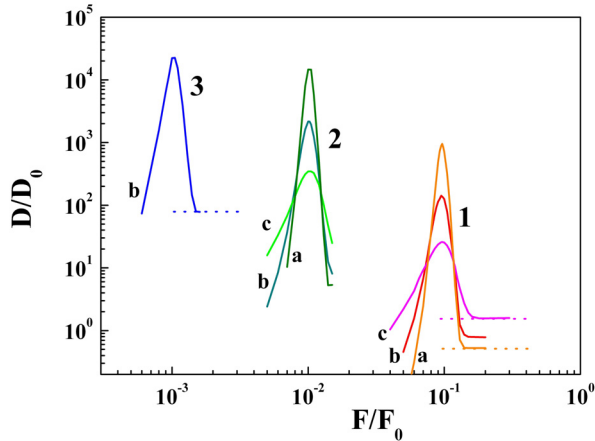


Рис. 1. Зависимости коэффициентов диффузии от действующей силы для различных  $\gamma$

1-  $\gamma = 3 \times 10^{-2}$ , 2-  $\gamma = 3 \times 10^{-3}$ , 3-  $\gamma = 3 \times 10^{-4}$ .

$D_0 = \pi^2 / \tau_0$ . Температуры равны: а -  $T' = 0,13$ ,  
б -  $T' = 0,19$ , с -  $T' = 0,39$ . Пунктирными линиями показаны коэффициенты диффузии в вязкой среде:  
 $D = kT / \gamma$ .

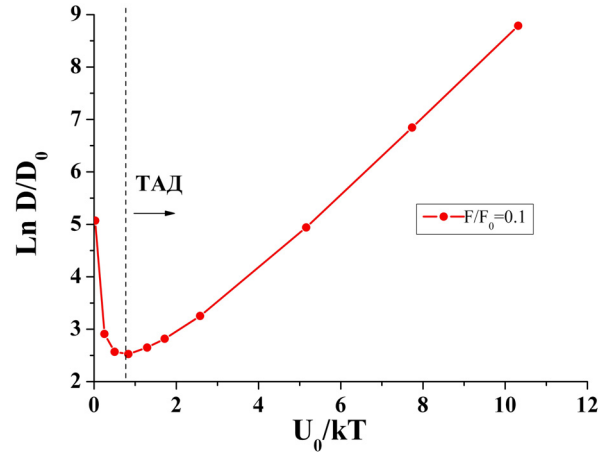


Рис. 2. Зависимость коэффициента диффузии от обратной температуры в зоне ТАД.  $\gamma = 3 \times 10^{-2}$ ,  
 $F / F_0 = 0,1$ .

Стрелкой показан интервал температур, в котором коэффициент диффузии растет с понижением температуры.

Таким образом, из приведенных графиков и анализа аналогичных графиков для других значений  $F$  и  $\gamma$  следует, что при малых  $\gamma$  функция распределения по скоростям зависит только от отношения  $F / \gamma$ . Впервые это было отмечено у Рискена (рис. 11.22-11.22а в [3]). Из этого простого факта можно получить скейлинговые зависимости, как для подвижности, так и для диффузионных кривых. В стационарном случае если известна функция распределения частиц по скоростям  $n(V)$  можно найти подвижность частиц.

Средняя скорость частиц для действующей силы  $F$  и коэффициента трения  $\gamma$  находится как

$$\langle V \rangle(F, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} V n(V) dV. \quad (8)$$

Функция  $n(V)$  нормирована, так что  $\int_{-\infty}^{\infty} n(V) dV = 1$ .

Мобильность частиц по определению есть

$$\mu(F, \Gamma) = \frac{\langle V \rangle(F, \gamma)}{F}. \quad (9)$$

Поскольку  $n(V, F, \gamma) = n(V, F / \Gamma)$ , то для подвижностей должно выполняться соотношение:

$$\Gamma_1 \mu(\Gamma_1, F_1) = \gamma_2 \mu(\Gamma_2, F_1 \Gamma_2 / \Gamma_1). \quad (10)$$

Эту зависимость хорошо демонстрируют графики на рис. 4. Здесь приведены зависимости  $\Gamma \mu$  от безразмерной величины  $F / (\Gamma V_F)$  для различных значений  $\Gamma$ . Совпадающие графики на рисунке подтверждают сделанный вывод о том что, для фиксированной температуры зависимость  $\Gamma \mu(\Gamma, F / (\Gamma V_F))$  является универсальной. Величина  $V_F$  вместо  $V_0$  введена в связи с тем, что под действием силы изменяется

величина энергетического барьера  $U_0$ , который частица должна преодолеть при прыжке в следующий минимум на решетке. При малых  $\Gamma$  величина силы вблизи области ТАД так же мала. И приближенно барьер равен  $U(F) = U_0(1 - aF/2)$ . Соответственно,  $V_F = V_0 \left(1 - \frac{a}{4m} F\right)$ . При  $\gamma \rightarrow 0$   $U(F) \rightarrow U_0$  и  $V_F \rightarrow V_0$ .

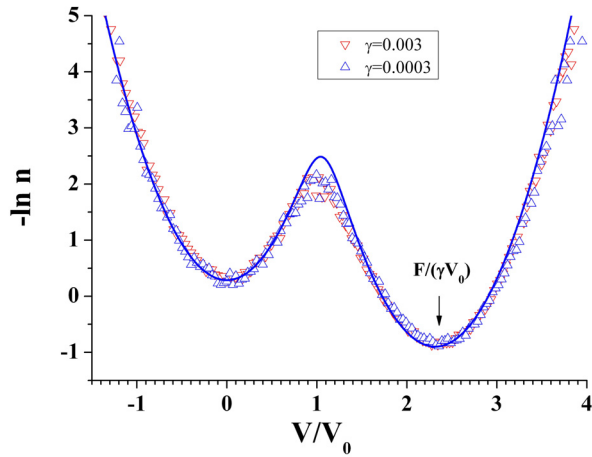


Рис. 3. Зависимость функции распределения частиц по скоростям для различных  $\gamma$  при значении силы с максимальным  $D(F)$ .

$T' = 0,19$ ,  $\nabla$  -  $\gamma = 0,003$ ,  $\Delta$  -  $\gamma = 0,0003$ . Сплошной линией нанесены расчетные значения исходя из модели двухямого потенциала  $W(V)$ . [22]. Функция имеет минимумы при  $V = 0$  и  $V = F/\gamma$ .

Аналогично с подвижностью, скейлинговые зависимости могут быть получены и для коэффициента диффузии. В соответствии с соотношением Кубо коэффициент диффузии может быть получен из автокорреляционной функции

$$D = \int_0^{\infty} d\tau \langle v(t)v(t+\tau) \rangle = \langle \Delta v^2 \rangle \tau_{corl}. \quad (11)$$

В стационарном случае коэффициент диффузии может быть рассчитан следующим образом [26]:

$$D = \frac{1}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^V (u - \langle u \rangle) n(u) du \right]^2 / n(V) dV. \quad (12)$$

Из вида зависимости  $n(V, F, \Gamma) = n(V, F/\Gamma)$ , аналогично с мобильностью, для коэффициента диффузии получаем:

$$D_1(\Gamma_1, F_1)/\Gamma_1 = D_2(\Gamma_2, F_1\Gamma_2/\Gamma_1)/\Gamma_2. \quad (13)$$

На рис. 5 приведены графики зависимости диффузии от действующей силы для 3 различных коэффициентов трения. Моделирование было проведено для трех различных температур. На рисунке хорошо видна область ТАД в которой коэффициент диффузии растет с понижением температуры.

Из графиков видно, что соотношение (13) выполняется с хорошей точностью. Небольшое различие в данных для  $\gamma = 0,03$  и  $\gamma = 0,003$  связано с обсуждавшимся выше фактом изменения активационного барьера  $U_0$  под действием силы. Величины сил ограничивающих зону ТАД, так же уменьшаются с  $\gamma$ . Поэтому различия в графиках должно нивелироваться с уменьшением  $\gamma$ . Графики на рис. 4, соответствующие температуре  $T = 0,19$  показывают, что это действительно так. Кривые соответствующие  $\gamma = 0,003$  и  $\gamma = 0,0003$  практически совпадают.

Таким образом, из анализа данных компьютерного моделирования следует, что при любых малых  $\gamma$  существует область ТАД. Ее ширина  $\Delta F_{TAD} \approx \gamma V_F$  и центр расположен вблизи силы  $F \approx 2\gamma V_F$ .

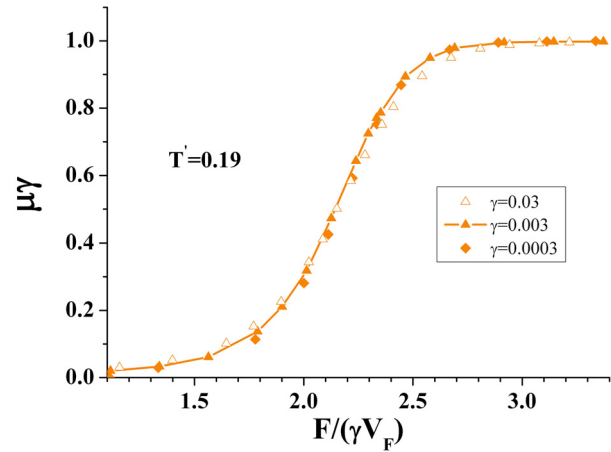


Рис. 4. Подвижность умноженная на коэффициент трения в зависимости от величины от  $F/(\gamma V_F)$  для различных  $\gamma$ .

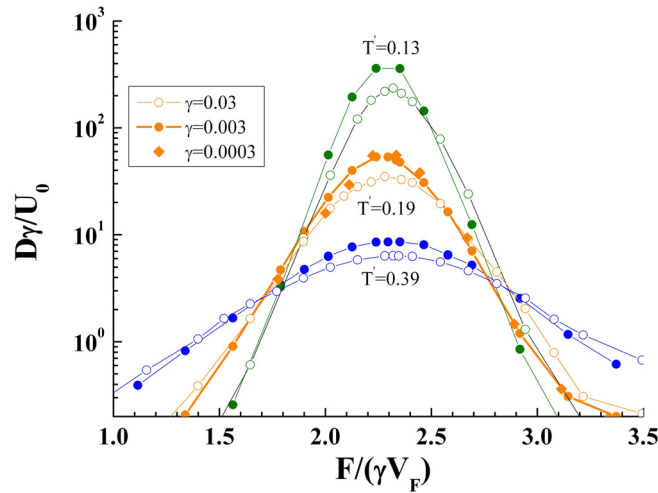


Рис. 5. Зависимость величины  $\gamma D$  от безразмерной величины  $F/(\gamma V_{cr}^F)$  для различных  $\gamma$ .

### Аналитические уравнения для ТАД

Полученные данные компьютерных расчетов дают весомые аргументы в пользу гипотезы о скейлинговой зависимости. Ширина  $\Delta F_{TAD}$  линейно уменьшается с коэффициентом трения, а максимальное значение  $D$  с уменьшением  $\gamma$  линейно растет. Для подтверждения этого вывода найдем аналитический вид зависимости  $D$  от температуры в области ТАД. Для этого обратимся к ранее используемой 2-ямной модели эффективного потенциала частиц в пространстве скоростей [22]. Согласно ей движение ансамбля частиц можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \\ \dot{V} = -\frac{\partial W(V, F)}{\partial V} + \zeta(t) \end{cases}, \quad (14)$$

где белый шум удовлетворяет уравнению:

$$\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = 2Q\delta(t-t') = 2\frac{\Gamma kT}{m^2}\delta(t-t') = 2QT. \quad (15)$$

Если известен эффективный потенциал  $W$ , то функция распределения по скоростям находится как  $n(V) = e^{-W/Q}$ . Типичный вид функции  $n(V)$  в зоне ТАД, полученный численными расчетами, приведен маркерами на рис. 3. Тут же сплошной линией приведена функция распределения, полученная в соответствии с моделью эффективного потенциала предложенного в [22]. Видно, что поведение  $n(V)$  хорошо согласуется с этой моделью. В [22]  $n(V)$  при низких температурах полагался равным:

$$n(V) = A(F)e^{-\beta^2 V^2} + B(F)e^{-\beta^2 (V-F/\gamma)^2}, \quad (16)$$

где  $\beta^2 = \frac{m}{2kT}$ . При низких температурах ( $T \ll U_0/k$ ) эффективный потенциал  $W$  имеет минимумы при  $V = 0$

и  $V = F/\Gamma$ . Вблизи минимумов  $W$  имеет параболическую зависимость:  $W(V) \sim \frac{\Gamma}{m}V^2$ . Для однозначности задания потенциала необходимо также задать условие при значении  $V = V_0$ . В качестве такового выберем:

$A(F)e^{-\beta^2 V_0^2} = \alpha B(F)e^{-\beta^2 (V_0 - F/\Gamma)^2}$ . Это условие при низких температурах эквивалентно условию введенному в [22], однако при этом функция при  $V = V_0$  остается гладкой. Величина  $\alpha$  может быть получена из данных компьютерного моделирования зависимостей  $\Gamma\mu(F, T)$ .

Для малых температур воспользуемся упрощенной 2-скоростной моделью Броека [27]. Мы будем считать, что ансамбль состоит из частиц которые двигаются только с двумя скоростями:  $V = 0$  ( $V_-$ ) и  $V = F/\Gamma$  ( $V_+$ ). Для перехода из одного состояния в другое частицам необходимо преодолеть барьеры  $W_-$  (из  $V_-$  в  $V_+$ ) и обратно -  $W_+$ . Скорость перехода из  $V_-$  в  $V_+$  равна:

$$k_- = \frac{\omega_- \omega_{cr}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta W_-}{Q}\right), \quad (17)$$

а обратно:

$$k_+ = \frac{\omega_+ \omega_{cr}}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta W_+}{Q}\right), \tag{18}$$

где  $\omega_-^2$ ,  $\omega_+^2$  и  $\omega_{cr}^2$  - абсолютные величины кривизны потенциала в точках минимума и точке перевала. Как следует из работы [22],  $\omega_-^2 = \omega_+^2 = \omega_0^2 = \frac{\Gamma}{2m}$ . При низких температурах в точке перевала эффективный потенциал имеет форму пика. В этом случае скорости переходов записываются как [28]:

$$k_{\pm} = \frac{\omega_0^2}{2\pi} \left(\frac{\pi \Delta W_{\pm}}{Q}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta W_{\pm}}{Q}\right). \tag{19}$$

Тогда, в соответствии с предложенной моделью, скорость прямого перехода равна:

$$k_- = \frac{\Gamma \beta V_{cr}}{4m\pi^{1/2}} \exp(-\beta^2 V_{cr}^2), \tag{20}$$

а обратно:

$$k_+ = \alpha \frac{\Gamma \beta V_{cr}}{4m\pi^{1/2}} \exp(-\beta^2 (V_{cr} - F/\Gamma)^2), \tag{21}$$

где  $\alpha$  будем считать постоянной величиной. Согласно [27] средняя скорость равна:  $\langle V \rangle = \frac{k_- V_- + k_+ V_+}{k_- + k_+}$ .

Подставляя выражения и приводя подобные получим:

$$\langle V \rangle = \frac{F}{\Gamma} \frac{\alpha}{\alpha + \exp\left[-\beta^2 \left(\left(F/\Gamma - V_{cr}\right)^2 - V_{cr}^2\right)\right]} = \frac{F}{\Gamma} \frac{\alpha}{\alpha + \frac{V_{cr}}{F/\Gamma - V_{cr}} \exp\left[-\frac{\beta^2}{\Gamma} F \left(\frac{F}{2\Gamma} - V_{cr}\right)\right]}. \tag{22}$$

Данное рассмотрение справедливо при  $F/\Gamma > V_{cr}$  (когда одновременно существуют “бегущее” и “локализованное” решения). В точке  $(F/\Gamma - V_{cr})^2 = V_{cr}^2$  или  $F = 2V_{cr}\gamma$  зависимость от температуры исчезает и  $\langle V \rangle = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{F}{\Gamma}$ . Подставляя значение для подвижности для этой точки получаем:  $\mu\Gamma = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ .

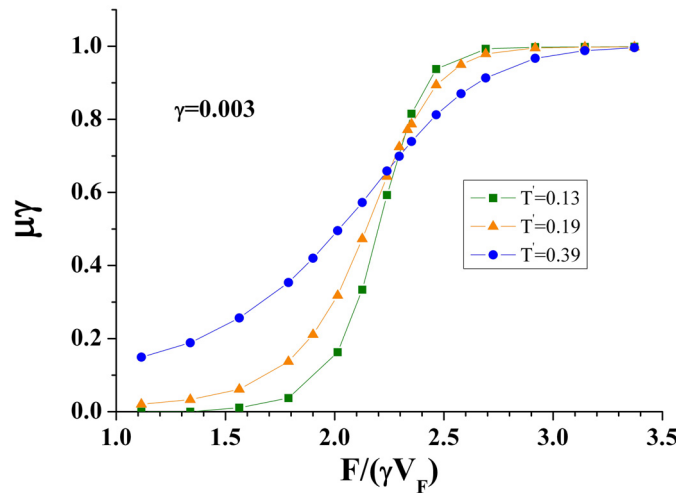


Рис. 6. Зависимость произведения подвижности на коэффициент трения от безразмерной величины  $F / (\gamma V_{cr}^F)$  для различных температур.  $\gamma = 0,003$ .

На рис. 6 приведены температурные зависимости величины  $\mu\Gamma$  от силы. Видно, что на графиках существует одна неподвижная точка. Значение  $\mu\Gamma$  в этой точке приблизительно равно  $\mu\Gamma = 2/3$ . Таким образом, из данных моделирования следует, что  $\alpha = 2$ . Подставляя значение  $\alpha$  в выражение (24) получаем для подвижности результат, совпадающий с выражением, полученным в работе [22]:

$$\langle V \rangle = \frac{F}{\Gamma} \frac{2}{2 + \exp\left[-\frac{m}{2\Gamma kT} F \left(\frac{F}{2\Gamma} - V_{cr}\right)\right]}. \tag{23}$$

Коэффициент диффузии в 2-уровневой модели [27] равен:  $D = \frac{k_- k_+}{(k_- + k_+)^3} (V_+ - V_-)^2$ .

Для простоты выкладок введем обозначение  $f = \frac{F}{\Gamma V_{cr}}$ . Тогда:

$$D = \frac{4mV_{cr}\pi^{1/2}}{\Gamma\beta} \frac{f^2 \exp\left(\beta^2 V_{cr}^2 [2 - (1-f)^2]\right)}{\left[1 + \alpha \exp\left(-\beta^2 V_{cr}^2 [(1-f)^2 - 1]\right)\right]^3}. \quad (24)$$

Рассмотрим случай  $\beta \rightarrow \infty$  (или  $T \rightarrow 0$ ). На температурных зависимостях  $D(F)$  будут существовать две области, в которых коэффициент диффузии возрастает с температурой. При  $f < 2$  (или  $F < 2\gamma V_{cr}$ ) второе слагаемое в знаменателе много больше единицы и для коэффициента диффузии получаем:

$$D \approx \frac{4mV_{cr}\pi^{1/2}}{\Gamma\beta} \frac{f^2}{\alpha^3} \exp\left(\beta^2 V_{cr}^2 [2 - (1-f)^2]\right) \exp\left(3\beta^2 V_{cr}^2 [(1-f)^2 - 1]\right). \quad (25)$$

Видно, что при  $f < f_l = 1 + 1/\sqrt{2}$  коэффициент диффузии с повышением температуры возрастает. При  $f > f_l$  и постоянном  $\Gamma$  коэффициент диффузии растет с понижением температуры как  $D \sim 1/\beta \exp\left(\beta^2 V_{cr}^2 [2(f-1)^2 - 1]\right)$ . В максимуме скорость роста коэффициента диффузии максимальна и  $D \sim 1/\beta \exp\left(\beta^2 V_{cr}^2\right)$  или  $D \sim T^{1/2} \exp\left(\frac{U_0}{2kT}\right)$ .

При  $f > 2$  (или  $F > 2\gamma V_{cr}$ ) второе слагаемое в знаменателе выражения (24) стремится к нулю. Коэффициент диффузии растет с понижением температуры до достижения точки  $f_r = 1 + \sqrt{2}$ . При  $f_r > 1 + \sqrt{2}$  характер температурной зависимости изменяется и коэффициент диффузии снова начинает повышаться с повышением температуры.

Таким образом, зона ТАД заключена между значениями  $f_r < f < f_l$  и имеет ширину  $\Delta F_{TAD} = \Gamma V_{cr} \sqrt{2}/2$ . При малых  $\Gamma$ , когда величина активационного барьера не изменяется, ширина области ТАД равна  $\Delta F_{TAD} = \sqrt{2}/2\Gamma(U_0/m)^{1/2}$ . Во всей этой области при низких температурах ( $T \ll U_0/k$ ) коэффициент диффузии растет с понижением температуры  $D \sim T^{1/2} \exp(\Delta U/kT)$ . Максимальная величина  $\Delta U$  равна  $U_0$  в максимуме и стремится к нулю в точках  $f_l$  и  $f_r$ . Ширина зоны ТАД уменьшается линейно с уменьшением  $\Gamma$ . В пределе  $\Gamma \rightarrow 0$  зона ТАД исчезает. Наблюдается скейлинг по  $\Gamma$ : с уменьшением  $\Gamma$  ширина области ТАД  $\Delta F_{TAD}(\Gamma)$  пропорционально  $\Gamma$ :

$$\Delta F_{TAD}(\Gamma_2) = \Gamma_2 \frac{\Delta F_{TAD}(\Gamma_1)}{\Gamma_1}. \quad (26)$$

Максимальный коэффициент диффузии в зоне ТАД экспоненциально растет с понижением температуры  $D \sim T^{1/2} \exp(U_0/kT)$ .

### ВЫВОДЫ

В работе исследована диффузия частиц под действием внешних сил в пространственно-периодических системах, характеризующихся малыми значениями коэффициента трения  $\gamma$ . Показано, что во всех недодемпфированных периодических системах существует ограниченная область температурно-аномальной диффузии (ТАД). В этой области действующих сил коэффициент диффузии возрастает с понижением температуры как  $\sim T^{1/2} \exp(\Delta U/kT)$ . В зависимости от значения силы, барьер  $\Delta U$  находится в интервале  $0 < \Delta U < U_0$ . Найдены аналитические выражения для мобильности и коэффициентов диффузии в пределе низких температур. Определена ширина и положение области ТАД в зависимости от  $\gamma$ . Показано, что с уменьшением  $\gamma$  ширина зоны уменьшается  $\sim \gamma$ . При этом коэффициенты диффузии в этой области, наоборот возрастают  $\sim \gamma$ .

Полученные зависимости имеют важное значение для экспериментального обнаружения явления температурно-аномальной диффузии и дальнейшего его использования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Costantini G. and Marchesoni F. Threshold diffusion in a tilted washboard potential // *Europhys. Lett.* – 1999. – Vol. 48. – P. 491.
2. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. 81. – P.337-442.
3. Risken H. *The Fokker-Planck Equation and Methods of Solution and Applications.* – Springer, 1989. – 472 p.
4. Lee S.-H., Grier D.G. Giant Colloidal Diffusivity on Corrugated Optical Vortices // *Phys. Rev. Lett.* –2006. – Vol. 96. – P. 190601.
5. Tierno P., Reimann P., Johansen T.H., Sagués F. Giant transversal particle diffusion in a longitudinal magnetic ratchet // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 105. – P. 230602.
6. Eshuis P., van der Weele K., Lohse D., van der Meer D. Experimental Realization of a Rotational Ratchet in a Granular Gas // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 104. – P. 248001.
7. Pagliara S., Schwall C., Keyser U.F. Optimizing Diffusive Transport Through a Synthetic Membrane Channel // *Advanc. Mat.* – 2013. – Vol. 25. – P. 844.
8. Risken H., Vollmer H.D. Low friction nonlinear mobility for the diffusive motion in periodic potentials // *Phys. Lett.* - 1979. – Vol. 69A. – No.6. – P.387- 389.
9. Risken H., Vollmer H.D. Brownian Motion in Periodic Potentials; Nonlinear Response to an External Force // *Z. Physik.* - 1979. – Vol. B 33. – P.297.
10. Risken H., Vollmer H.D. Bistability Effects of the Brownian Motion in Periodic Potentials // *Z. Physik.*- 1980. – Vol. B 37. – P. 343-349.
11. Risken H., Vollmer H.D. Distribution Functions for the Brownian Motion of Particles in a Periodic Potential Driven by an External Force // *Z. Physik.* – 1979. – Vol. B34. – P. 313-322.
12. Risken H., Vollmer H.D. Nonlinear Response to an External Force // *Z. Physik.* – 1979. – Vol. B 35. – P. 177-184.
13. Jung P., Risken H., Eigenvalues for the Extremely Underdamped Brownian Motion in an Inclined Periodic Potential // *Z. Physik.* – 1984. – Vol. B 54. – P. 357-370.
14. Costantini G., Marchesoni F. Threshold diffusion in a tilted washboard potential // *Europhys. Lett.* – 1999. – Vol. 48. – P. 491-497.
15. Borromeo M., Costantini G., Marchesoni F. Critical Hysteresis in a Tilted Washboard Potential // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 82. – P. 2820–2823.
16. Lindenberg K., Sancho J.M., Lacasta A.M., Sokolov I.M. Dispersionless Transport in a Washboard Potential // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98. – P. 020602.
17. Sancho J. M., Lacasta A.M., Lindenberg K., Sokolov I.M., Romero A. H. Diffusion on a Solid Surface: Anomalous is Normal // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 92. – P. 250601.
18. Khoury M., Gleeson J. P., Sancho J. M., Lacasta A. M., Lindenberg K. Diffusion coefficient in periodic and random potentials // *Phys. Rev.* – 2009. – Vol. E 80. – P. 021123.
19. Lindenberg K., Lacasta A.M., Sancho J.M., Romero A.H. Transport and diffusion on crystalline surfaces under external forces // *New Jour. of Phys.* – 2005. – Vol. 7. – P. 29.
20. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Diffusion in the systems with low dissipation: Exponential growth with temperature drop // *Europhysics Letters.* – 2012. – Vol. 100. – P. 5005.
21. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Temperature-abnormal diffusivity in underdamped space-periodic systems driven by external time-periodic force, <http://arxiv.org/abs/1701.01424>.- 2017.
22. Marchenko I.G., Marchenko I.I., Zhiglo A.V. Particle transport in space-periodic potentials in underdamped systems // *Europ. Phys. Jour.* – 2014. – Vol. B87. – P. 10.
23. Lindner B., Sokolov I.M. Giant diffusion of underdamped particles in a biased periodic potential // *Phys. Rev.* – 2016. – Vol. E93. – P. 042106.
24. Reimann, P., Van den Broeck C., Linke H., Hänggi P., Rubi J. M., Pérez-Madrid A. Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. E65. – P. 031104.
25. Kuznetsov D.F. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya: teoriya i praktika chislennogo resheniya* [Stochastic differential equations: theory and practice of numerical solution]. – SPb: Sankt-Peterburg, Iz-vo Politeh. un-ta, 2007. – 800p. (in Russian)
26. Lindner B., Nicola E.M. Critical Asymmetry for Giant Diffusion of Active Brownian Particles // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 101. – P. 190603.
27. van den Broeck C. Taylor dispersion revisited // *Physica.* – 1990. – Vol. A168. – P. 677-696.
28. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* – 1990. – Vol. 62. – P. 251–341.



PACS: 81.07. Bc, 61.46. - w

## THE LATTICE PARAMETERS AND RESIDUAL STRESSES IN BULK NANOCRYSTALLINE AND ULTRAFINE-GRAINED TITANIUM

**Yu.M. Plotnikova, R.V. Smolianets, I.S. Braude, V.A. Moskalenko**

*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NAS of Ukraine*

*47 Nauky Ave., Kharkiv, 61103, Ukraine*

*e-mail: [plotnikova@ilt.kharkov.ua](mailto:plotnikova@ilt.kharkov.ua)*

*Received January 20, 2017*

Lattice parameters and residual stresses in the bulk nanocrystalline/ultrafine-grained titanium were studied by X-ray diffraction methods. The investigated samples were prepared using the method of the cryomechanical grain structure fragmentation with multiple rolling at the temperature of liquid nitrogen to the true strain value  $|e| = 3$ . Phasic change of the  $a$  and  $c$  parameters has been found with increasing degree of cryoreduction. This change was stronger for the parameter  $a$ . The observed change parameters associated with a relative slip and twinning activity (initial cryo-reduction stage) as well as the formation of the nanocrystalline state (at higher degree of deformation). The most likely source of residual stresses arising in titanium at cryorolling is heterogeneous plastic deformation. The production of nanocrystalline / ultrafine-grained titanium using cryomechanical grain fragmentation method is accompanied by the formation of uniform compressive residual stresses in the informative deformable layer of billet.

**KEY WORDS:** lattice parameters, residual stresses, bulk nanocrystalline/ultrafine-grained titanium, X-ray diffraction, cryo-reduction

### ПАРАМЕТРИ КРИСТАЛІЧНОЇ ҐРАТКИ ТА ЗАЛИШКОВІ МАКРОНАПРУЖЕННЯ В ОБ'ЄМНОМУ НАНОКРИСТАЛІЧНОМУ ТА УЛЬТРАДРІБНОЗЕРНИСТОМУ ТИТАНІ

**Ю.М. Плотнікова, Р.В. Смолянець, І.С. Брауде, В.А. Москаленко**

*Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України,*

*61103, Україна, м. Харків, просп. Науки, 47*

Параметри кристалічної ґратки та залишкові макропруження в об'ємному нанокристалічному/ультрадрібнозернистому титані були досліджені з використанням методів рентгенівської дифрактометрії. Зразки для дослідження були одержані застосувавши метод криомеханічної фрагментації зеренної структури з багаторазовим вальцюванням при температурі рідкого азоту до істинних значень деформації  $|e| = 3$ . Виявлена стадійна зміна параметрів  $a$  і  $c$  в залежності від деформації, більш сильне для  $a$  параметру. Спостережувана зміна параметрів пов'язується з відносною активністю ковзання і двійникування (початковий етап криовальцювання) та формуванням нанокристалічного стану (більш високий ступінь деформації). Найбільш вірогідним джерелом залишкових макропружень, виникаючих в титані при криовальцюванні, є неоднорідна пластична деформація. Встановлено, що одержання нанокристалічного/ультрадрібнозернистого титану з використанням методу криомеханічної фрагментації зерна супроводжується формуванням однорідних стискувальних залишкових напружень по глибині інформативного шару деформованої заготовки.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** параметри кристалічної ґратки, залишкові макропруження, об'ємний нанокристалічний/ультрадрібнозернистий титан, рентгенівська дифрактометрія, криодеформація

### ПАРАМЕТРЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ И ОСТАТОЧНЫЕ МАКРОНАПРЯЖЕНИЯ В ОБЪЕМНОМ НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ И УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТОМ ТИТАНЕ

**Ю.М. Плотникова, Р.В. Смолянец, И.С. Брауде, В.А. Москаленко**

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины*

*61103, Украина, г. Харьков, просп. Науки, 47*

Параметры кристаллической решетки и остаточные макро напряжения в объемном нанокристаллическом/ультрамелкозернистом титане были изучены с использованием методов рентгеновской дифрактометрии. Образцы для исследования были получены, применив метод криомеханической фрагментации зеренной структуры с многократной прокаткой при температуре жидкого азота до истинных значений деформации  $|e| = 3$ . Обнаружено стадийное изменение параметров  $a$  и  $c$  в зависимости от деформации, более сильное для параметра  $a$ . Наблюдаемое изменение параметров связывается с относительной активностью скольжения и двойникового (начальный этап криодеформации), а также с формированием нанокристаллического состояния (более высокая степень деформации). Наиболее вероятным источником остаточных макро напряжений возникающих в титане при криопроблатке является неоднородная пластическая деформация. Установлено, что получение нанокристаллического/ультрамелкозернистого титана с использованием метода криомеханической фрагментации зерна сопровождается формированием однородных сжимающих остаточных напряжений по глубине информативного слоя деформируемой заготовки.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** параметры кристаллической решетки, остаточные макро напряжения, объемный нанокристаллический/ультрамелкозернистый титан, рентгеновская дифрактометрия, криодеформация

Титан и титановые сплавы обладают комплексом важных конструкционных и функциональных свойств, что определяет достаточно широкую сферу их практического использования – от аэрокосмической техники до изделий медицинского назначения. Однако низкая прочность нелегированного титана существенно

ограничивает возможности его практического применения. Альтернативным легированию способом упрочнения, который не изменяет химический состав, улучшает функциональные свойства и сохраняет исходную плотность металла, является создание объемного структурного состояния с субмикронным/наноразмерным зерном при использовании деформационных технологий [1,2].

Эффективным методом создания объемного нанокристаллического состояния в таких ГПУ металлах как титан и цирконий является метод криомеханической фрагментации зеренной структуры (КМФЗ) [3]. Данный метод, по сути, является распространением стандартных методов обработки металлов давлением (волочение, прокатка с формированием листов, лент, фасонных профилей и пр.) на область низких температур. Его физической основой является склонность данных металлов к двойникованию при криодеформации. Применив один из вариантов метода КМФЗ – прокатку при температуре жидкого азота (77 К), в работе [3] впервые был получен объемный нанокристаллический титан с унимодальной зеренной структурой ( $10 < d < 100$  нм) при среднем размере зерен  $d \approx 35$  нм.

Недавно [4,5] с использованием методов электронной просвечивающей микроскопии (ПЭМ) и рентгеноструктурного анализа (РСА) были получены данные о параметрах микроструктуры титана технической чистоты ВТ1-0, деформированного прокаткой при температуре 77 К, в условиях формирования в нем ультрамелкозернистого/нанокристаллического состояния. Об эволюции нанозеренной структуры образца в результате криодеформации судили по результатам оценки размеров зерен и областей когерентного рассеяния (ОКР) или кристаллитов и величины микродеформации. Обнаружен стадийный характер изменения размеров зерен и кристаллитов от степени криодеформации, который коррелирует с активностью деформационных мод – скольжением и двойникованием.

Криопрокатка, как технологический процесс, в результате которого зерна микронного размера конвертируются в нанозерна, осуществляется при очень высоких деформирующих напряжениях и отсутствии процессов отдыха. Формирующемуся в этих условиях наноструктурному состоянию будут присущие сильные искажения кристаллической решетки и вероятные изменения ее параметров, а в полученных образцах будут возникать внутренние (остаточные) или макроскопические напряжения. С физической точки зрения образование остаточных напряжений после пластической деформации связано с необратимыми (остаточными) изменениями объема. Эти изменения объема, остающиеся после снятия нагрузки, и вызывают остаточные напряжения [6].

Остаточные напряжения оказывают существенное влияние на поведение металла под воздействием внешних нагрузок, а также на его функциональные свойства [7]. Сжимающие напряжения в поверхностном слое подвергаемых усталости деталей, как правило, считаются полезными, так как эти остаточные напряжения могут эффективно уменьшать поверхностные растягивающие напряжения до уровня, который не вызывает образование трещин или разрушения, повышают упругость изделия, выносливость, увеличивают коррозионную стойкость [8,9]. С другой стороны, остаточные напряжения растяжения могут значительно повысить эффективные уровни напряжения и привести к непредвиденным разрушениям [10]. Поэтому изучение остаточных напряжений представляет большой практический и научный интерес.

Целью настоящей работы являлось исследование параметров кристаллической решетки и остаточных внутренних напряжений (макронапряжений) с помощью рентгеновской дифрактометрии нанокристаллического/ ультрамелкозернистого титана ВТ1-0, полученного прокаткой при температуре жидкого азота до различных степеней обжатия при криопробатке.

### МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Был изучен титан технической чистоты ВТ1-0 в виде плиты промышленного изготовления толщиной 16 мм с содержанием основных примесей (масс. %): Fe 0,06; O 0,1; N 0,02; C 0,01; H 0,002. Объектом рентгенографических исследований служили образцы с различным структурным состоянием, которые были полученные многократной прокаткой до разных степеней обжатия с использованием лабораторного прокатного стана. Перед каждым проходом образцы предварительно охлаждались в жидком азоте до температуры 77 К. Величина истинной деформации (деформации обжатия) определялась как  $e = \ln(t_0/t_c)$  ( $t_0$  и  $t_c$  – начальная и конечная толщины листа) и варьировалась от  $|e| = 0,06$  до  $|e| = 3$ .

Съемки производили при комнатной температуре на дифрактометре ДРОН-2.0 в  $\text{Cu K}\alpha$ - излучении с никелевым фильтром, используя набор коллимационных щелей. Распределения интенсивностей рассеяния рентгеновских лучей регистрировали в диапазоне углов  $30^\circ < 2\theta < 110^\circ$  с шагом сканирования  $0,1^\circ$ . Последующая обработка данных осуществлялась с помощью компьютерных программ. В качестве анализируемой была выбрана плоскость прокатки, которая не подвергалась дополнительной обработке. Это исключало возможность внесения изменений в структурное состояние в результате последующей механической обработки при более высокой (комнатной) температуре.

Параметры кристаллической решетки рассчитывались, используя метод наименьших квадратов, при этом абсолютная погрешность составляла  $5 \cdot 10^{-5}$  нм. Титан, имеющий ГПУ кристаллическую решетку, характеризуется двумя параметрами: –  $a$  и  $c$ , которые определяются согласно формуле

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4}{3} \frac{h^2 + hk + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}, \quad (1)$$

где  $d$  – межплоскостное расстояние плоскости  $(hkl)$ ,  $hkl$  - индексы Миллера для анализируемой плоскости,  $a$  и  $c$  – параметры решетки. В данной работе вычисления осуществляли по восьми отражениям  $(10\bar{1}0)$ ,  $(0002)$ ,  $(10\bar{1}1)$ ,  $(10\bar{1}2)$ ,  $(10\bar{1}3)$ ,  $(20\bar{2}1)$ ,  $(0004)$ ,  $(10\bar{1}4)$ .

Напряженное состояние исследовали по классическому методу  $\sin^2\psi$  [11]. Положение пика определяли после отделения фона и  $K_{\alpha 2}$ -линии дублета. Для расчета напряжений использовали отражение  $(2\bar{1}\bar{3}3)$ . Остаточные напряжения в выбранном направлении  $\varphi$  определяли по [11]:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1 + \mu} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль нормальной упругости (модуль Юнга),  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона прямой зависимости  $\theta_{\varphi, \psi} = f(\sin^2 \psi)$ . Расчет  $\theta_{\varphi, \psi} = f(\sin^2 \psi)$  производили по методу наименьших квадратов. Значение модуля упругости было взято как  $E = 110$  ГПа, а  $\mu = 0,32$  [12]. Размеры, вырезанных из прокатанной полосы образцов для исследования, предположительно исключали возможное влияние релаксационных процессов на уровень остаточных напряжений в анализируемой области. Погрешность определения макронапряжений не превышала 13 МПа.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

### Влияние криодеформации на параметры кристаллической решетки

Сохраняющиеся после снятия силовой нагрузки внутренние напряжения вызывают упругие деформации и искажения кристаллической решетки. Рассчитанные по методу наименьших квадратов параметры кристаллической решетки титана, прокатанного при температуре 77 К до различных степеней обжатия, показаны на рис. 1. Как для параметра  $a$ , так и для параметра  $c$  наблюдается более высокая их чувствительность к деформации на начальной стадии обжатия ( $|e| \lesssim 0,6$ ). На этом этапе криодеформирования увеличение параметра  $a$  по отношению к исходному состоянию (изображено пунктирной линией) достигает  $\approx 1,2\%$ , а параметра  $c$  – около 0,4% (с неравномерным характером его изменения). То есть, искажения кристаллической решетки деформационной природы сильнее влияют на параметр  $a$ , чем на параметр  $c$ .

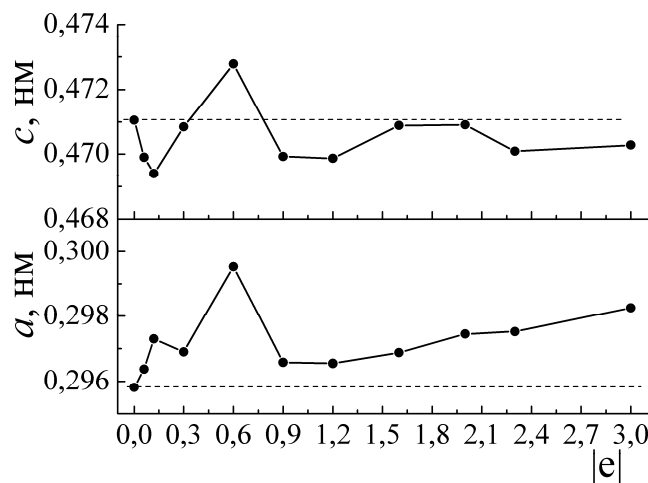


Рис. 1. Влияние степени обжатия при криопробатке  $|e|$  на параметры решетки  $a$  и  $c$  титана VT1-0

Основной причиной этому можно считать различное влияние на параметры  $a$  и  $c$  искажений решетки, обусловленных скольжением и двойникованием, которые имеют различные кристаллографические характеристики деформационного сдвига. Искажения решетки, вызванные призматическим скольжением, являются результатом увеличения плотности дислокаций с вектором Бюргера  $1/3\langle 11\bar{2}0 \rangle$ , то есть с кристаллографическим сдвигом в направлении  $\langle a \rangle$ . В рамках линейной теории упругости наличие дислокаций не должно сказываться на средней плотности кристалла, а соответственно, и на параметрах решетки. Однако на близком расстоянии от ядра деформации, вследствие их очень высоких значений, не могут быть описаны линейной теорией упругости. Ангармонические члены являются достаточно большими, а под действием

гидростатического давления они вызывают дополнительную дилатацию и дислокации должны уменьшать плотность материала [13]. Возможность изменение плотности титана вследствие увеличения плотности дислокаций в результате криопротатки была показана в работе [14]. При этом наблюдалась корреляция между закономерностями в изменении плотности  $\rho$  и параметра решетки  $a$  в зависимости от режимов криомеханической и термической обработок.

В то же время небольшое уменьшение параметра  $c$  при криообжати  $|e| = 0,12$  (рис. 1) можно объяснить возникновением двойников  $\{11\bar{2}2\}\langle 11\bar{2}3\rangle$ , вызывающих сжатие в направлении оси  $c$  (при формирующейся в зернах ламинарной двойниковой структурой). В дальнейшем этот эффект подавляется активизацией вторичного двойникования, при котором внутри двойников сжатия увеличивается плотность двойников растяжения, вызывающих растяжение решетки в направлении оси  $c$ . Таким образом, тенденция в изменении параметров  $a$  и  $c$  на начальной стадии обжата при криопротатке обусловлена искажениями кристаллической решетки, с различной кристаллографией сдвиговых деформаций.

Резкое уменьшение обоих параметров  $a$  и  $c$  при деформации  $|e| = 0,9$ , а затем слабое их изменение, совпадает с формированием нанокристаллического состояния. Как косвенные, так и прямые экспериментальные результаты указывают на невозможность накопления дислокаций в зернах субмикронного и нанометрового размера. Последнее может приводить к уменьшению как плотности дислокаций в зерне, так и общей ее величины и, следовательно, к уменьшению искажений кристаллической решетки. Обычно предполагается, что пластическая деформация в таких материалах обусловлена зернограничным скольжением [15]. В этом случае можно предположить, что отражением увеличения плотности зернограничных  $\langle a \rangle$  дислокаций является, опять-таки, более заметный рост параметра  $a$ .

#### Остаточные внутренние напряжения

Под остаточными внутренними напряжениями или макронапряжениями понимаются внутренние напряжения, возникающие в титановом прокате после обжата при температуре жидкого азота и сохраняющиеся после окончания криомеханической обработки и отогрева до комнатной температуры. При определении полей остаточных внутренних напряжений с использованием рентгеноструктурного анализа масштаб измерения деформации является межплоскостное расстояние  $d$  кристаллографических плоскостей ( $hkl$ ) [11]. Являясь одним из важнейших параметров структурного состояния деформированного материала, остаточные макронапряжения характеризуются сжатием или растяжением кристаллической решетки. Они приводят к изменению межплоскостных расстояний на величину  $\Delta d$ , а, следовательно, и к смещению дифракционных линий на угол  $\Delta\theta$ . В связи с обнаруженными ранее изменениями параметров решетки можно ожидать изменения внутренних остаточных напряжений в зависимости от степени обжата при криопротатке.

На рис. 2 представлены результаты по влиянию степени обжата при криопротатке  $|e|$  на остаточные внутренние напряжения  $\sigma$ , рассчитанные согласно формуле (2). Видно, что в исходном материале эти напряжения являются сжимающими, как следствие технологического процесса изготовления плиты (горячая прокатка плюс отжиг). При криопротатке начальная степень обжата ( $|e| \lesssim 0,12$ ) вызывает рост сжимающих макронапряжений, после чего наблюдается их существенное уменьшение. Величина  $\sigma$  изменяется с 420 МПа до 200 МПа. В итоге можно считать, что при  $|e| \gtrsim 0,6$  степень криодеформации не влияет на уровень остаточных внутренних напряжений. Среднее значение  $\sigma$  составляет  $\sim 240$  МПа (рис. 2).

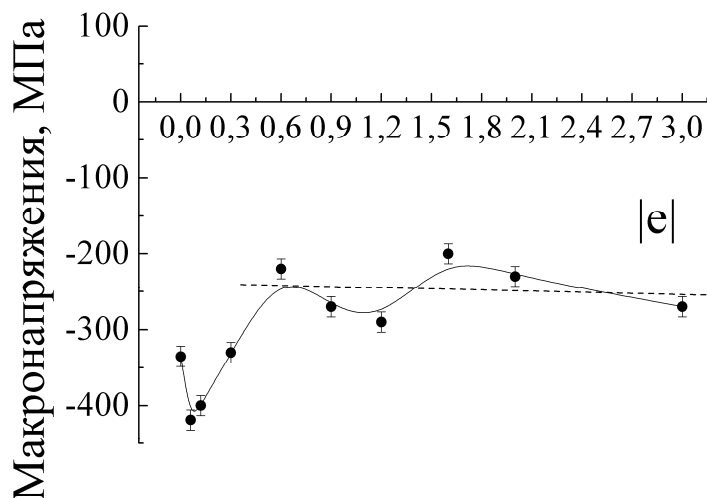


Рис. 2. Влияние степени обжата при криопротатке  $|e|$  на величину остаточных внутренних напряжений  $\sigma$  в полосе титана ВТ1-0

В поликристаллических металлических материалах условием возникновения остаточных макронапряжений является протекание неоднородного изменения удельного объема. Основными источниками такой неоднородности являются неоднородная пластическая деформация, неоднородное протекание фазовых и структурных превращений, инициированных внутренними напряжениями, наличие градиента тепловых полей. Рассмотрим возможность проявления каждого из них в полосе титана технической чистоты, который подвергался указанному выше режиму криодеформации (многократной криопроблатке).

Нелегированный титан при температуре ниже 1155 К состоит из  $\alpha$ -фазы с гексагональной плотноупакованной решеткой [12]. Отсутствие каких-либо фазовых превращений в процессе криодеформации обжатием до  $|e| = 3$  было подтверждено в предыдущей работе [4] при анализе дифракционных картин. Однородный температурный режим в объеме образца во время криопроблатки обеспечивался выполнением следующих условий эксперимента. Охлажденный в жидком азоте, образец в течение короткого времени (не более 3 секунд) помещался между валками. При этом конденсирующаяся на поверхности образца пленка жидкого воздуха экранировала температурное воздействие окружающей среды в течение всего периода проблатки. В зависимости от длины образца время проблатки составляло не более 3 секунд. Передачей тепла от валков образцу в этом случае можно пренебречь. С другой стороны, при выполнении условий адиабатичности заметного повышения температуры можно ожидать за счет перехода механической энергии пластической деформации в тепловую энергию. Оценка локального повышения температуры  $\Delta T$  в зоне деформации была выполнена согласно соотношению

$$\Delta T = \left( \frac{\beta}{\rho C_p} \right) \int_0^e \sigma de. \quad (3)$$

Здесь плотность титана  $\rho = 4500 \text{ кгс/м}^3$ , удельная теплоемкость при 77 К  $C_p = 10 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$  [16],  $\sigma$  - деформирующее напряжение при 77 К, истинная деформация в течение одного прохода  $e = (0,005 - 0,05)$  и  $\beta = 0,9$  - доля механической энергии пластической деформации преобразованной в тепло. Видно, что локальное повышение температуры  $\Delta T$  будет зависеть от величины истинной деформации при обжатии и уровня деформирующего напряжения. Строго говоря, обе величины существенно изменяются в процессе многопроходного цикла при формировании ультрамелкозернистого/нанокристаллического состояния. Напряжение течения  $\sigma_t$  увеличивается с  $\sim 500 \text{ МПа}$  до  $\sim 1300 \text{ МПа}$  как результат уменьшения размера зерна [17] в соответствии с соотношением Холла-Петча. Истинная деформация  $e$  при сохранении степени обжатия за один проход  $\Delta t = 0,1 - 0,2 \text{ мм}$  изменялась в результате уменьшения толщины проблатываемой полосы  $t_e$ , как следствие способа ее определения (смотри выше). Было установлено, что при выполнении условий адиабатичности повышение температуры  $\Delta T$  может составлять 2 - 11 К, что есть достаточно малой величиной. Смещаясь вдоль образца, зона повышенной температуры под валками обеспечивает выравнивание теплового поля в объеме образца в течение короткого времени проблатки.

Таким образом, наиболее вероятным источником остаточных макронапряжений является неоднородная пластическая деформация, вызванная упругопластической деформацией под нагрузкой, когда одна из частей тела деформируется упруго, а другая - пластически [11]. Этот случай реализуется при проблатке металлов давлением, то есть проблатке, штамповке и др. В исследуемом проблатке нанокристаллического/ультрамелкозернистого титана средняя величина остаточных напряжений  $\sigma$  во всем изученном диапазоне криодеформации остается практически неизменной (рис. 2). Уровень сжимающих остаточных напряжений составляет  $\sigma \approx 240 \text{ МПа}$ . Такая тенденция свидетельствует о достаточно равномерной деформации по толщине образца в процессе обжатия при криопроблатке. То есть, технологическая обработка металла с использованием метода КМФЗ сопровождается формированием однородных сжимающих остаточных напряжений по глубине информативного слоя деформируемой заготовки.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К наиболее успешному и перспективному в получении объемного нанокристаллического титана относится метод криомеханической фрагментации зерна, одним из вариантов которого является проблатка при температуре жидкого азота. Используя методы рентгеновской дифрактометрии, были изучены параметры кристаллической решетки и остаточные напряжения в проблатке нанокристаллического/ультрамелкозернистого титана, полученного последовательным обжатием до истинной деформации  $|e| = 3$ . На этапе обжатия до  $|e| \lesssim 0,6$  возникающие деформационные искажения приводят к заметным изменениям параметров кристаллической решетки. Параметр  $a$  по сравнению с исходным состоянием увеличивается более, чем на 1,2%, а параметр  $c$  - на  $\sim 0,4\%$ . Эти изменения параметра  $a$  обусловлены, прежде всего, существенным увеличением плотности  $\langle a \rangle$  дислокаций. Более слабое изменение параметра  $c$  связано с кристаллографией деформации двойникованием. Резкое уменьшение обоих параметров  $a$  и  $c$  при  $|e| = 0,9$  и слабое их изменение в дальнейшем при более высоких степенях обжатия при криопроблатке связано с формированием нанокристаллического состояния и изменением механизма пластической деформации.

Наиболее вероятным источником остаточных напряжений, которые возникают в титане при криопротатке, является неоднородная пластическая деформация, вызванная упругопластической деформацией под нагрузкой. Эти напряжения являются сжимающими, они практически не изменяются со степенью обжатия. Их величина составляет  $\approx 240$  МПа. Такая тенденция свидетельствует о достаточно равномерной деформации по толщине образца в процессе криодеформации. Таким образом, технологическая обработка титана с целью получения нанокристаллического состояния при использовании метода КМФЗ сопровождается формированием однородных сжимающих остаточных напряжений по глубине информативного слоя деформируемой заготовки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meyers M.A., Mishra A., Benson D.I. Mechanical properties of nanocrystalline materials // *Prog. Mater. Sci.* – 2006. – Vol. 51. – P.427.
2. Kutniy K.V., Volchok O.I., Kislyak I.F., Tikhonovsky M.A., Storozhilov G.E. Obtaining of pure nanostructured titanium for medicine by severe deformation at cryogenic temperatures // *Mater. Sci. and Eng. Technol.* – 2011. – Vol. 42. – No. 2. – P. 114-117.
3. Moskalenko V.A., Smirnov A.R., Moskalenko A.V. Cryomechanically obtained nanocrystalline titanium: microstructure and mechanical properties // *Low Temp. Phys.* – 2009. – Vol. 35. – P.905-907.
4. Plotnikova Yu.M., Braude I.S., Moskalenko V.A. X-ray parameters of a nanocrystalline titanium microstructure, obtained via cryodeformation // *Low Temp. Phys.* – 2016. – Vol. 42. – P. 1175–1180.
5. Moskalenko V.A., Smirnov A.R., Smolianets R.V. Low-temperature plastic deformation and strain-hardening of nanocrystalline titanium // *Low Temp. Phys.* - 2014. – Vol. 40. – P. 837–845.
6. Birger I.A. Ostatechnyye napryazheniya [Residual stresses]. – М.: Mashgiz, 1963. – 232p. (In Russian)
7. Wroński M., Wierzbowski K., Wrybel M., Wroński S., Bacroix B. Effect of rolling asymmetry on selected properties of Grade 2 // *Met. Mater. Int.* – 2015. – Vol. 21. – No. 5. – P. 805-814.
8. Noyan I.C., Cohen J.B. An X-ray diffraction study of the residual stress-strain distributions in shot-peened two-phase brass // *Mater. Sci. Eng.* – 1985. – Vol. 75. – P. 179-193.
9. De los Rios E.R., Walley A., Milan M.T., Hammersley G. Fatigue crack initiation and propagation on shot-peened surfaces in A316 stainless steel // *Int. J. Fatigue.* – 1995. – Vol. 17. – P. 493–499.
10. Wu T., Hartley C.S., Wang X.M., Tsai C.T. Residual stress distribution in cold rolled brass sheet // *J. Mater. Process. Technol.* – 1994. – Vol. 45. – P. 111-116.
11. Gladkikh L.I., Malykhin S.V., Pugachev A.T. Difraktsionnyye metody analiza vnutrennikh napryazheniy. Teoriya i eksperiment: Ucheb. Posobiye [Diffraction methods for analysis of internal stresses. Theory and experiment: Handbook]. - Khar'kov: NTU «KHP», 2006. – 304p. (In Russian)
12. Tsvikker U. Titan i yego splavy [Titanium and its alloys]. – Moskva: Metallurgiya, 1979. – 512p. (In Russian)
13. Friedel J. Dislocations. – Moskva: Mir, 1967. – 600 s.
14. Moskalenko V.A., Betekhtin V.I., Kardashev B.K., Kadomtsev A.G., Smirnov A.R., Smolyanets R.V., Narykova V.V. Mechanical properties and Structures of Nanocrystalline titanium produced by cryorolling // *Physics Solid State.* – 2014. – Vol. 56. – No. 81. – P. 1590-1596.
15. Zhu Y.T., Liao X.Z., Wu X.L. Deformation twinning in nanocrystalline materials // *Prog. Mater. Sci.* - 2012. - Vol. 57. - P. 1-62.
16. Tablicy fizicheskikh velichin [Tables of physical quantities.]. Ed. Akad. I.K. Kikoin. - М.: Atomizdat, 1976. – 1008p. (in Russian)
17. Moskalenko V.A., Smirnov A.R., Smolianets R.V. Low-temperature plastic deformation and strain-hardening of nanocrystalline titanium // *Low Temp. Phys.* - 2014. – Vol. 40. - P.837 - 845.

PACS: 07.20.Dt; 52.25.Rv; 44.10+i; 29.27.-a

## TEMPERATURE MONITORING OF POLYMER FILMS UNDER IRRADIATION BY FAST ION BEAM

<sup>1</sup>V.N. Bondarenko, <sup>1</sup>A.V. Goncharov, <sup>1</sup>V.I. Sukhostavets,  
<sup>2</sup>T.Kh. Salikhov, <sup>2</sup>A.A. Abdurahmonov

<sup>1</sup>National Scientific Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"  
1, Akademicheskaya st., Kharkov 61108, Ukraine

E-mail: [goncharov@kipt.kharkov.ua](mailto:goncharov@kipt.kharkov.ua)

<sup>2</sup>Tajik National University, Research Institute of Science  
17, Rudaki avenue, Dushanbe 734025, Tajikistan

E-mail: [tsalikhov@mail.ru](mailto:tsalikhov@mail.ru)

Received December 27, 2016

A technique for infrared thermometry remote monitoring of temperature of area of a polymer film under ion irradiation is described. Calculation part of the technique takes into account the case when the irradiated area is significantly smaller than the instrument field of view. Temperature measurements were carried out with 20  $\mu\text{m}$  polyimide films irradiated by 1000 to 1600 keV protons, with 1...5  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$  current density. A model for calculation of temperature depth distribution in the irradiated film is developed. The model is also applicable for the case of ion irradiation in gaseous atmosphere, and takes into account temperature dependence of the polymer substance thermal conductivity, of the emissivity coefficient, and of the convective heat transfer coefficient. The calculated data are compared with the temperature measurements.

**KEY WORDS:** irradiation, fast ions, polyimide film, infrared thermometry

### КОНТРОЛЬ ТЕМПЕРАТУРИ ПОЛІМЕРНИХ ПЛІВОК ПРИ ОПРОМІНЕННІ ПУЧКОМ ПРИСКОРЕНИХ ІОНІВ

<sup>1</sup>В.М. Бондаренко, <sup>1</sup>О.В. Гончаров, <sup>1</sup>В.І. Сухостаєць, <sup>2</sup>Т.Х. Саліхов, <sup>2</sup>А.А. Абдурахмонов

<sup>1</sup>Національний Науковий Центр "Харківський фізико-технічний інститут"

вул. Академічна 1, м. Харків 61108, Україна

<sup>2</sup>Таджикський національний університет, Науково-дослідний інститут  
пр. Рудаки, 17, м. Душанбе 734025, Таджикистан

Розглянуто методику дистанційного контролю температури опромінюваної ділянки полімерної плівки за допомогою інфрачервоної термометрії. Розрахункова частина методики враховує також випадок, коли розміри опромінюваної ділянки значно менше поля зору термометра. На зразках поліімідних плівок товщиною 20 мкм проведені вимірювання температури на ділянці, що опромінювалась протонами в різних режимах (енергії протонів 1000...1600 кеВ, густина струму пучка 1...5  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ ). Розроблено модель для розрахунку розподілу температури по товщині опромінюваної плівки. Модель може застосовуватись і у випадку опромінювання у газовій атмосфері і враховує залежність від температури для коефіцієнта теплопровідності речовини полімеру, коефіцієнта чорноти поверхні та коефіцієнта тепловіддачі. Дані розрахунку порівнюються з даними вимірювань температури.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** опромінення, прискорені іони, поліімідна плівка, інфрачервона термометрія

### КОНТРОЛЬ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ПУЧКОМ УСКОРЕННЫХ ИОНОВ

<sup>1</sup>В.Н. Бондаренко, <sup>1</sup>А.В. Гончаров, <sup>1</sup>В.И. Сухостаев, <sup>2</sup>Т.Х. Салихов, <sup>2</sup>А.А. Абдурахмонов

<sup>1</sup>Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая 1, г. Харьков 61108, Украина

<sup>2</sup>Таджикский национальный университет, Научно-исследовательский институт  
пр. Рудаки, 17, г. Душанбе 734025, Таджикистан

Рассмотрена методика дистанционного контроля температуры облучаемой области полимерной пленки с помощью инфракрасной термометрии. Расчетная часть методики учитывает и случай, когда размер облучаемой области значительно меньше поля зрения термометра. На образцах полиимидных пленок толщиной 20 мкм проведены измерения температуры в области пленки, облучаемой протонами в разных режимах (энергии протонов 1000...1600 кеВ, плотности тока пучка 1...5  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ ). Разработана модель для расчета распределения температуры по толщине облучаемой пленки. Модель применима и для случая облучения в газовой атмосфере и учитывает зависимость от температуры для коэффициента теплопроводности вещества полимера, коэффициента черноты поверхности и коэффициента теплоотдачи. Данные расчета сопоставляются с данными измерений температуры.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** облучение, ускоренные ионы, полиимидная пленка, инфракрасная термометрия

Пучки ускоренных ионов широко применяются для модификации свойств полимеров: изменения их электрических, адгезионных, прочностных и прочих характеристик [1-3]. В результате радиолитического происходит также изменение элементного состава полимерных материалов [2,4].

Известно, что от температуры полимера во время облучения существенно зависит подвижность свободных радикалов и газообразных продуктов, образующихся под действием облучения. С повышением плотности тока пучка, а значит, и температуры образца при облучении, увеличивается электропроводность облученного полимера [1]. Кроме того, с повышением температуры полимера может происходить изменение его структуры.

В частности, для полиимида такой характерной температурой является температура стеклования ( $321^{\circ}\text{C}$  [5]).

В конечном счете, эти температурные эффекты могут существенно сказываться на характеристиках облученных материалов [1, 3, 6-8]. В работе [9] отмечено, что с точки зрения исследования механизмов собственно радиационных эффектов в полимере проведение измерений при высоких температурах не очень желательно, так как в этом случае относительный вклад радиационных эффектов в эволюцию структуры облучаемого материала снижается.

Таким образом, с точки зрения воспроизводимости экспериментальных результатов в опытах по облучению полимеров важен контроль не только флюенса облучения, но и температуры образца в зоне облучения в самом процессе опыта.

В случаях, когда размеры образца достаточно велики, наиболее удобным является дистанционный контроль его температуры по ИК излучению с поверхности данного объекта. Так, например, в работе [10] эта методика применялась для контроля температуры свариваемых стыков конструкций сверхпроводящих резонаторов в процессе остывания после электронно-лучевой сварки.

А в работе [11] таким методом контролировалась температура образцов, облучаемых сканируемым пучком электронов с энергией 10 МэВ и мощностью 10 кВт. При этом размеры облучаемой области были достаточно большими – 20 см и более.

Однако применение такого рода контроля существенно усложняется, если размеры области, в которой происходит выделение энергии, заметно меньше поля зрения ИК термометра.

В настоящей работе были поставлены следующие цели: а) разработка методики дистанционного контроля температуры именно для такого случая, а конкретно для контроля температуры облучаемой ионным пучком области полимерной пленки, когда размеры этой области не превышают нескольких мм; б) разработка теоретической модели, описывающей распределение температуры в облучаемой области пленки. Первая часть работы была выполнена в ННЦ ХФТИ, а вторая – в Таджикском национальном университете.

### ЭКСПЕРИМЕНТ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Исследование температурных режимов облучаемых полимерных пленок проводилось на универсальной камере для ядерно-физических методов анализа [12] на протонном пучке ускорителя “Сокол” ННЦ ХФТИ (рис. 1).

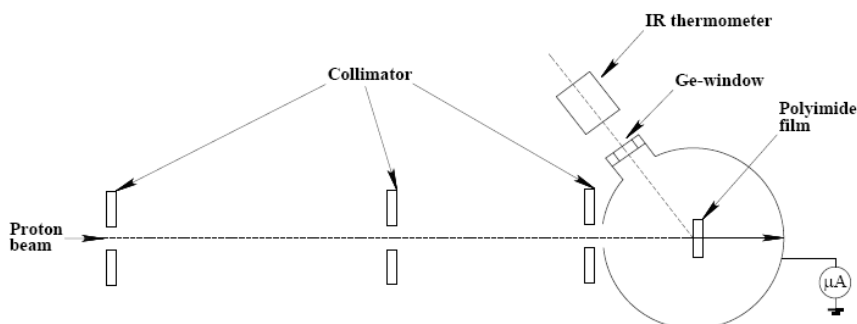


Рис. 1. Схема измерений температуры поверхности облучаемой полимерной пленки.

Пучок ускоренных протонов сквозь систему круглых диафрагм проходил в камеру мишени, электрически соединенную с держателем мишени. Поскольку размеры камеры были существенно больше размеров облучаемой области мишени, то вторичные электроны, образующиеся при бомбардировке поверхности мишени, стекали на внутреннюю поверхность камеры. В стенке камеры тормозились и протоны, прошедшие сквозь пленку. Камера была соединена с землей через интегратор тока. Такая геометрия позволяла контролировать средний ток пучка  $I=Q/t$ , где  $Q$  – регистрируемый интегратором стекающий заряд,  $t$  – время экспозиции.

Откачка камеры до остаточного давления  $5 \cdot 10^{-4}$  Па обеспечивалась турбомолекулярным насосом и азотной ловушкой, расположенной над держателем мишени.

В настоящей работе в качестве мишеней-образцов использовались полиимидные пленки марки ПМ толщиной  $L=20$  мкм. Полиимиды относятся к термостойким полимерам. Внутренний диаметр держателя, в котором закреплялась пленка, составлял 19 мм. Центр держателя и, соответственно, центр мишени совпадали с центром камеры.

Облучение проводилось протонами с энергией 1,0...1,6 МэВ. Плоскость мишени была перпендикулярна направлению пучка. Камера юстировалась по отношению к пучку таким образом, чтобы пучок попадал на центр мишени.



Измерения размеров облученной области, проводившиеся с помощью фотометрического метода, показали, что средний диаметр облучаемого пятна изменялся в пределах 1,8...2,2 мм в зависимости от режима работы ускорителя. С учетом вариации тока пучка в пределах 30...150 нА это соответствовало плотностям тока пучка на мишени в пределах 1...5 мкА/см<sup>2</sup>.

Измерение температуры в облучаемой области полиимидного образца осуществлялось дистанционно с помощью инфракрасного термометра “Fluke576CF”, регистрирующего тепловое излучение от мишени. Согласно паспортным данным, спектральный диапазон длин волн инфракрасного излучения, в котором работает прибор, составляет 8...14 мкм, а погрешность определения температуры – 0,75 % [13].

Поскольку образец находился в вакууме, то излучение от мишени к прибору выводилось сквозь Ge-окно. Пропускная способность германиевых окон в указанном рабочем диапазоне длин волн очень слабо зависит от длины волны.

ИК-термометр был расположен под углом  $\varphi=40^{\circ}$  относительно нормали к мишени и установлен на расстоянии 300 мм от мишени. Согласно техническому описанию на таком расстоянии диаметр поля зрения прибора составляет 6 мм, что заметно больше размера облучаемого пятна на мишени. С помощью специальной трехлучевой лазерной подсветки прибора его можно было отъюстировать по отношению к облучаемому пятну таким образом, чтобы оно находилось в центре поля зрения прибора. Эта операция проводилась на атмосфере в отсутствие Ge-окна.

Таким образом, в данной геометрии прибор регистрировал ИК-излучение как от облучаемой области, так и от окружающей ее не облучаемой области пленки, что является основной трудностью методики измерения, использованной в настоящей работе. Поэтому возникает необходимость в построении модели, с помощью которой можно было бы определить искомую среднюю температуру  $T_{irrad}$  в облучаемой области мишени из данных измерения с помощью ИК-термометра.

Пусть  $A_{irrad}$  – площадь облучаемой области мишени;  $T_{unirrad}$  – температура в необлучаемой области;  $A_{unirrad}$  – площадь этой области в пределах поля зрения ИК-термометра;  $T_{eff}$  – некоторая эффективная температура, определяемая на основании мощности излучения, регистрируемой прибором со всего поля зрения;  $A_{total}=A_{irrad}+A_{unirrad}$ . Будем считать, что в установившемся тепловом режиме отвод мощности из облучаемой области пленки происходит главным образом за счет теплового излучения. В нашем случае это оправдано тем, что теплопроводность полимеров низка, а расстояние от данной области до металлического держателя много больше ее размеров. В соответствии с законом Стефана–Больцмана, поток теплового излучения от поверхности твердого тела пропорционален  $T^4$ , где  $T$  – абсолютная температура тела. Тогда, применительно к нашему случаю, это приводит к соотношению

$$A_{total} T_{eff}^4 = A_{irrad} T_{irrad}^4 + A_{unirrad} T_{unirrad}^4 \quad (1)$$

В обеих частях этого соотношения опущены такие постоянные, как  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $\alpha$  – коэффициент черноты излучающей поверхности (для полимеров эта величина близка к единице), постоянная пропускания Ge-окна и геометрический фактор  $\cos\varphi$ , обусловленный тем, что ИК-термометр расположен под углом относительно нормали к излучающей поверхности.

Очевидно, что если температура в облучаемой области мишени заметно превышает температуру в области не облучаемой, то второй член в правой части соотношения (1) много меньше первого члена.

Анализ показывает, что основной погрешностью в выражении (1) является неопределенность в измерении радиуса облучаемой области. Она составляла порядка 10%, что приводило к погрешности искомой температуры  $T_{irrad}$  до 20-30 градусов.

В таблице 1 представлены характеристики режимов облучения.

Таблица 1.

Проективные пробеги протонов в полиимиде, рассчитанные с помощью программы SRIM [14], сбросы их энергии в 20-микронной полиимидной пленке и использовавшиеся режимы облучения.

Энергия протонов, кэВ	Проективный пробег протонов, мкм	Сброс энергии протонов в пленке, кэВ	Ток пучка, нА	Энерговыделение пучка в пленке, мВт/мм <sup>2</sup>
1000	19,2	1000	30, 60, 90	10, 19, 29
1200	25,6	774	30, 60, 90, 120	7, 15, 22, 30
1400	32,6	638	30, 60, 90, 120, 150	6, 12, 18, 24, 31
1600	40,4	558	30, 60, 90, 120, 150	5, 11, 16, 21, 27

Энерговыделение пучка рассчитывалось, исходя из плотности тока пучка и сброса энергии протонов в пленке.

Таким образом, лишь при энергии 1000 кэВ протоны не проходили сквозь использовавшуюся полиимидную пленку.

Температура  $T_{irrad}$  может быть также оценена из баланса между поглощаемой и излучаемой мощностью. Если предположить, что температуры лицевой и тыльной поверхностей пленки в области облучения

одинаковы, то радиационное охлаждение образца будет происходить с обеих этих поверхностей с одинаковой интенсивностью. Тогда в установившемся режиме средняя температура в облучаемой области может быть оценена из равенства мощности пучка, поглощаемой в пленке, и мощности, излучаемой по закону Стефана–Больцмана:

$$I\Delta E / e = 2\alpha\sigma(T_{irrad}^4 - T_0^4)A_{irrad}, \quad (2)$$

где  $I$  – ток пучка;  $\Delta E$  – сброс энергии ионов в материале пленки;  $e$  – заряд электрона;  $T_0$  – исходная температура образца (комнатная температура в К).

Очевидно, что в соотношении (2) не учтен сток тепла от облучаемого объема к держателю образца за счет теплопроводности в материале пленки. Поэтому температура  $T_{irrad}$ , рассчитанная с помощью этого соотношения, является заведомо завышенной, но, в принципе, может приближаться к искомой в случае большого энерговыделения в облучаемой области (т.е. в случае больших плотностей тока пучка).

### ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН НА СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТОНКИХ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНКАХ ПОД ИОННЫМ ОБЛУЧЕНИЕМ

В данном разделе описана модель для расчета распределения температуры по толщине облучаемой тонкой полимерной пленки. Ниже под тонкими пленками будем подразумевать такие, толщины  $L$  которых меньше длины  $R$  проективного пробега ионов в веществе пленки.

Будем рассматривать установившийся, стационарный режим облучения, когда время облучения много больше времени тепловой релаксации.

Для общности будем считать, что облучаемый образец пленки находится в газообразной среде (такой случай может быть реализован, например, при выводе ионного пучка в атмосферу).

Также примем во внимание зависимость от температуры  $T$  для коэффициента теплоотдачи  $h=h(T)$ , коэффициента теплопроводности  $\kappa=\kappa(T)$  вещества образца и коэффициента черноты поверхности образца полимера  $\alpha=\alpha(T)$ .

Пусть однородный по поперечному сечению поток быстрых ионов с энергией  $E$  падает на мишень перпендикулярно ее поверхности вдоль оси  $X$ . Будем считать, что сток тепла от облучаемой области образца на держатель пленки в направлении, перпендикулярном оси  $X$ , пренебрежимо мал по сравнению с исходящим от облучаемой области потоком теплового излучения. Тогда задача сводится к одномерной, и в рассматриваемом стационарном случае справедливо следующее нелинейное уравнение теплопроводности [15]:

$$\frac{d}{dx} \left[ \kappa(T) \frac{dT}{dx} \right] = - \frac{G(L, R)EJ}{eR}, \quad (3)$$

где  $T(x)$  – распределение абсолютной температуры по толщине пленки;  $J$  – плотность потока ионов;  $e$  – заряд электрона. Величина  $G(L, R)$  описывает фактор уменьшения величины энергии, переданной ионом пленке, в зависимости от  $R=R(E)$ . В грубом приближении эту величину можно представить в виде  $G(L, R) \approx L/R$ .

Два граничных условия, учитывающих тепловое излучение и конвективное охлаждение с обеих поверхностей пленки, можно записать в виде [16]:

$$\left[ \kappa(T) \frac{dT}{dx} \right]_{x=0} = \left[ h(T)(T - T_0) + \sigma(\alpha(T)T^4 - \alpha(T_0)T_0^4) \right]_{x=0}, \quad (4)$$

$$\left[ -\kappa(T) \frac{dT}{dx} \right]_{x=L} = \left[ h(T)(T - T_0) + \sigma(\alpha(T)T^4 - \alpha(T_0)T_0^4) \right]_{x=L}, \quad (5)$$

где  $T_0$  – исходная температура.

Температурные зависимости для коэффициентов теплопроводности, черноты поверхности и теплоотдачи примем в следующем, линейном приближении:

$$\kappa(T) = \kappa_0 [1 + \delta_2 (T - T_0)], \quad \kappa_0 = \kappa(T_0), \quad \delta_1 = \frac{1}{\kappa_0} \left. \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right|_{T=T_0}, \quad (6)$$

$$\alpha(T) = \alpha_0 [1 + \delta_3 (T - T_0)], \quad \alpha_0 = \alpha(T_0), \quad \delta_2 = \frac{1}{\alpha_0} \left. \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right|_{T=T_0}, \quad (7)$$

$$h(T) = h_0 [1 + \delta_4 (T - T_0)], \quad h_0 = h(T_0), \quad \delta_3 = \frac{1}{h_0} \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{T=T_0}. \quad (8)$$

Введем  $\tau(x) = T(x) - T_0$ . Соответственно, уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 + \delta_1 \tau) \frac{d\tau}{dx} \right] = - \frac{G(L, R)EJ}{e\kappa_0 R} = -2F. \quad (9)$$

Используя обозначение  $z(x)=1+\delta_1\tau(x)$  найдем первый и второй интегралы уравнения (9):

$$\frac{z}{\delta_1} \frac{dz}{dx} = C_1 - 2Fx, \quad z(x) = (2\delta_1(C_1 - Fx)x + C_2)^{1/2}, \quad (10)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования. Их можно выразить через установившиеся температуры  $T_1$  и  $T_2$ , соответствующие лицевой и тыльной поверхностям пленки в облучаемой области, решая систему уравнений

$$z(0) = 1 + \delta_1\tau_1 = C_2^{1/2}, \quad z(L) = 1 + \delta_1\tau_2 = (2\delta_1(C_1 - FL)L + C_2)^{1/2}, \quad (11)$$

где  $\tau_1=T_1-T_0$ ,  $\tau_2=T_2-T_0$ . Температура  $T_1$  эквивалентна температуре  $T_{irrad}$ , о которой речь шла выше.

В результате, выражение, описывающее распределение температуры по толщине пленки в облучаемой области, принимает вид:

$$\delta_1\tau(x) = -1 + \left\{ 1 + 2\delta_1 \left[ \tau_1 \left( 1 + \frac{\delta_1\tau_1}{2} \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \tau_2 \left( 1 + \frac{\delta_1\tau_2}{2} \right) \frac{x}{L} + F(L-x)x \right] \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

При этом граничные условия (4-5) в новых обозначениях преобразуются в систему уравнений

$$\tau_1 - \tau_2 + \frac{\delta_1}{2} (\tau_1^2 - \tau_2^2) - FL^2 + \frac{h_0L}{\kappa_0} (1 + \delta_3\tau_1)\tau_1 + \frac{\alpha_0\sigma L}{\kappa_0} [(1 + \delta_2\tau_1)(\tau_1 + T_0)^4 - T_0^4] = 0, \quad (13)$$

$$\tau_1 - \tau_2 + \frac{\delta_1}{2} (\tau_1^2 - \tau_2^2) + FL^2 - \frac{h_0L}{\kappa_0} (1 + \delta_3\tau_2)\tau_2 - \frac{\alpha_0\sigma L}{\kappa_0} [(1 + \delta_2\tau_2)(\tau_2 + T_0)^4 - T_0^4] = 0. \quad (14)$$

С помощью численного решения данной системы нелинейных алгебраических уравнений для  $\tau_1$  и  $\tau_2$  можно найти зависимости этих величин от параметров падающего потока ионов.

Анализ системы уравнений (13-14) показывает, что величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  практически совпадают. При  $\delta_1\tau_1 \ll 1$  распределение (12) принимает форму, близкую к параболической:

$$\tau(x) \cong \tau_1 + F(L-x)x. \quad (15)$$

Приближение (15) справедливо при условии  $FL^2 \ll \tau_1$ . Из (15) следует, что температура достигает максимума  $\tau = \tau_{max}$  при  $x=L/2$ , т.е. в центре облучаемого объема пленки. С помощью этого приближения можно оценить разность между максимальной температурой и температурой на облучаемой поверхности:

$$\tau_{max} - \tau_1 \cong FL^2 / 4. \quad (16)$$

Это значит, что данное различие в температурах монотонно растет с увеличением мощности, вводимой в облучаемую область, т.е., в конечном счете, с увеличением температуры на облучаемой поверхности.

Приведем также приближенное выражение для искомой температуры  $T_1$  для частного случая, когда облучение производится в вакууме. Тогда из уравнения (13) при условии  $\tau_2=\tau_1$  следует:

$$(1 - \delta_2 T_0 + \delta_2 T_1) T_1^4 \cong \left( \frac{\kappa_0 FL}{\alpha_0 \sigma} + T_0^4 \right) = H^4. \quad (17)$$

При условии  $\delta_2\tau_1 \ll 1$  из этого уравнения вытекает приближенное решение:

$$T_1 \cong H(1 - \delta_2(H - T_0)/4). \quad (18)$$

Второй член в (18) представляет собой отрицательную поправку к первому приближению  $T_1 \approx H$ . Поскольку произведение  $\kappa_0 F$  не зависит от  $\kappa_0$ , то температура  $T_1$ , определяемая выражением (18), также не зависит от характеристик теплопроводности. Выражение (18) через параметр  $\delta_2$  температурной зависимости коэффициента черноты дает несколько меньшее значение температуры поверхности облучаемой области по сравнению с первым приближением и значением, которое следует из уравнения (2).

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

При пересчете экспериментально измеренной температуры  $T_{eff}$  в искомую температуру  $T_{irrad}$  с помощью соотношения (1) предполагалось, что средняя температура  $T_{unirrad}$  в не облучаемой области пленки близка к комнатной температуре  $T_0$ . Эти данные представлены в третьей колонке таблицы 2.

Расчет температуры поверхности пленки в облучаемой области с помощью соотношения (2) проводился при фиксированном значении 0,95 для коэффициента черноты поверхности полиимидной пленки. Результаты расчета даны в четвертой колонке.

В пятой колонке представлены результаты расчета температуры поверхности в облучаемой области с помощью рассмотренной выше теоретической модели, учитывающей температурные зависимости для коэффициента теплопроводности вещества образца и коэффициента черноты поверхности образца полимера.

При расчете на основе решения системы уравнений (13-14) использовались следующие значения параметров:  $L=20 \cdot 10^{-6}$  м;  $h_0=0$  (поскольку облучение проводилось в вакууме);  $\kappa_0=0,155$  Вт·м<sup>-1</sup>К<sup>-1</sup> и  $\delta_1=8,4 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup> [17];  $\alpha_0=0,95$  и  $\delta_2=1,4 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup> [10]. Параметры  $E$  и  $R$  заимствовались из таблицы 1. При расчете плотности тока пучка предполагалось, что радиус облучаемой области равен 1 мм, т.е. среднему значению для радиусов характерных пятен, возникавших на пленке в процессе облучения в рассмотренных режимах.

Для энергии протонов 1000 кэВ расчет с помощью модели не является вполне корректным, т.к. в этом случае не соблюдалось условие  $L < R$ .

Таблица 2.

Результаты обработки измерений и результаты расчета.

Энергия протонов, кэВ	Энерговыведение пучка в пленке, мВт/мм <sup>2</sup>	Температура облучаемой поверхности пленки, °С		
		определенная с помощью соотношения (1)	вычисленная с помощью соотношения (2)	вычисленная из системы уравнений (13-14)
1000	10, 19, 29	195, 292, 340	283, 382, 450	291, 374, 464
1200	7, 15, 22, 30	204, 276, 354, 374	252, 343, 406, 455	248, 322, 387, 434
1400	6, 12, 18, 24, 31	191, 278, 317, 343, 377	230, 316, 376, 422, 461	212, 280, 338, 382, 420
1600	5, 11, 16, 21, 27	204, 239, 292, 327, 364	215, 298, 355, 400, 437	184, 245, 299, 340, 374

Расчет показывает, что для всех использовавшихся режимов облучения имеет место  $FL^2 \ll \tau_1$ . Поэтому вычисляемая с помощью соотношения (16) разность между температурой в центре облучаемого объема пленки и температурой на облучаемой поверхности является пренебрежимо малой.

Естественно было предположить, что, в условиях конвертации потери энергии ионов в пленке преимущественно в тепловую энергию, точки, относящиеся к разным режимам облучения, должны в координатах температура/энерговыведение ложиться на некоторую универсальную кривую. Данные из таблицы 2 в графическом виде представлены на рис. 2, из которого видно, что экспериментальные точки действительно с некоторым разбросом группируются вокруг такой кривой. Систематически ниже ее расположены точки, соответствующие облучению при энергии протонов 1000 кэВ, при которой имеет место их полное замедление в материале пленки.

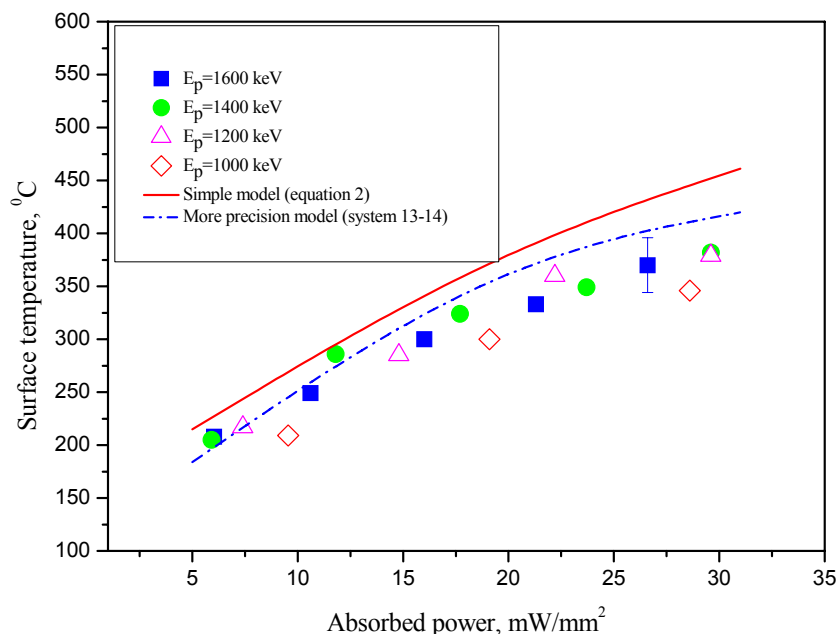


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей температуры поверхности облучаемой области пленки полиимида от энерговыведения протонного пучка для разных режимов облучения (см. табл.2).

Из данной универсальной зависимости следует, что если облучение полиимидной пленки необходимо проводить в области температур ниже температуры стеклования полиимида (321°С [5]), то энерговыведение не должно превышать 17 мВт/мм<sup>2</sup>.

Конечно, рассматриваемая модель не учитывает сток тепла к держателю через не облучаемую часть пленки за счет механизма теплопроводности. Но оценки показывают, что для размеров пленок,

использовавшихся в настоящих измерениях, этот фактор не является значительным в силу низкого коэффициента теплопроводности полиимида.

Также оценки показывают, что унос энергии из полиимидной пленки за счет мгновенного излучения, например, эмиссии вторичных электронов с обеих поверхностей облучаемой области пленки или за счет выхода из облучаемого объема электромагнитного излучения в видимом, ультрафиолетовом и рентгеновском диапазоне, также является незначительным, хотя все эти типы эмиссии и растут пропорционально току пучка. Например, абсолютный световой выход даже специально допированного полиимида не превышает 0,3% [18]. Поэтому в наших условиях погрешность теплового энерговыделения за счет этого фактора также не превышает этой величины, а соответствующая погрешность определения температуры не превышает 0,5 градуса.

Из рис. 2 видно, что согласие экспериментальной зависимости и теоретической зависимости, учитывающей температурные зависимости теплофизических характеристик облучаемого полимера, является вполне удовлетворительным. Несколько худшее согласие наблюдается с кривой, построенной на основании соотношения (2) с фиксированным значением  $\alpha=0,95$ . И этому есть простое объяснение: учет монотонного нарастания зависимости  $\alpha(T)$  с температурой эквивалентен дополнительному увеличению эффективного значения  $\alpha$ , а рост  $\alpha$  приводит к большей интенсивности радиационного охлаждения пленки.

Конечно, некоторое расхождение между данными измерений и данными расчета может быть связано и с различием между табличными данными по коэффициенту черноты поверхности и реальным значением этого параметра для использовавшегося образца полиимидной пленки.

### ВЫВОДЫ

Рассмотренная методика контроля температуры в облучаемой области полимерной пленки, использующая инфракрасную термометрию, позволяет осуществлять это бесконтактным дистанционным образом в непрерывном режиме даже в случае, когда размеры облучаемой области заметно меньше поля зрения ИК термометра.

Предложенная модель расчета распределения температуры по толщине пленки, облучаемой потоком ионов, учитывает температурные зависимости теплофизических характеристик облучаемого полимера, что позволяет вычислить температуру поверхности облучаемой области пленки более корректным образом и объяснить некоторое различие в температурах между поверхностями облучаемой области пленки и ее заглубленными слоями. Это различие нарастает с увеличением мощности, вводимой в пленку при облучении.

Очевидно, что хотя измерения и конкретные расчеты были проделаны для протонного пучка, рассмотренные в данной работе экспериментальная и расчетная методики контроля температуры облучаемой пленки могут быть применены и для других типов ионов. Конечно же, условием применения расчетной методики остается критерий  $L < R$ .

Понятно, что описанные методики могут быть применены не только для случая облучения полимерных пленок, но и для тонких образцов любого материала с низкой теплопроводностью, например, для неметаллических материалов.

При сравнении экспериментальных и расчетных данных наблюдается небольшое систематическое расхождение. Причина этого не вполне ясна, поэтому необходимо дальнейшее продвижение как в совершенствовании процесса измерения, так и в развитии предложенной теоретической модели.

Авторы выражают признательность Зацу А.В., Кузьменко В.В. и Карпусю С.Г. за содействие в проведении измерений.

### REFERENCES

1. Popok V.N., Azarko I.I., Haybullin R.I. Vliyanie vysokih doz implantacii i plotnosti ionnogo toka na svoystva plenok poliimida [Influence of high implantation doses and ion current density on polyimide film properties] // ZnTF. - 2002. - Vol.72. - Iss.4. - P.88-93. (in Russian)
2. Vencatesan T., Forrest S.R., Kaplan M.L., Murray C.A., Schmidt P.H., Wilkens B.J. Ion-beam-induced conductivity in polymer films // J. Appl. Phys. - 1983. - Vol.54. - No.6. - P.3150-3153.
3. Guseva M.I. Ionnyaya implantaciya v metallah [Ion implantation in metals] // Poverhnost. Ser. Fizika, himiya, mehanika. - 1982. - No.4. - P.27-50. (in Russian)
4. Bondarenko V.N., Goncharov A.V., Sukhostavets V.I., Karpus S.G., Kuzmenko V.V., Shebeko K.V. Oxygen depletion of mylar under bombardment by 1.0 and 1.6 MeV protons // East European Journal of Physics. - 2015. - Vol.2(1). - P.15-22. (in Russian)
5. Mitrofanov A.V., Apel P.Yu., Blonskaya I.V., Orelovich O.L. Dyfrakcionnye filtry na osnove poliimidnyh i polietilennaftalatnyh trekovyh membran [Diffraction filters on the basis of track polyimide and polyethylene terephthalate membranes] // ZhTF. - 2006. - Vol.76. - Iss.9. - P.121-126. (in Russian)
6. Aleshin A.N., Gribanov A.V. Dobrodumov A.B., Суворов А.В., Шлимак И.С. Elektrofizicheskie svojstva plenok poliimida PM, podvergnutyh ionnoj bombardirovke [Electrophysical properties of PM polyimide films under ion irradiation] // FTT. - 1989. - Vol.31. - Iss.1. - P.12-18. (in Russian)
7. Sato S., Iwaki M. Target temperature dependence of sheet resistance and structure Ar-implanted diamonds // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. - 1988. - Vol.B32. - P.145-149.
8. Bondarenko V.N. Two-parameter model for irradiated polymer conductance vs ion beam fluency / The Journal of Kharkiv

- National University.-Physical series “Nuclei, Particles, Fields”. - 2010. - No.899. - Issue 2/46/. - P.29-34. (in Russian)
9. Bondarenko V.N., Goncharov A.V., Kuzmenko V.V., Sukhostavets V.I. Study of polyimide electrical resistance vs ion beam fluence at irradiation by ions of nitrogen // The Journal of Kharkiv National University.-Physical series “Nuclei, Particles, Fields”. - 2010. – No.933. - Issue 4/48/. - P.70-74. (in Russian)
  10. Michelato P., Monaco L., Sertore D. In-vacuum temperature measurement of niobium components using infrared pyrometry during electron beam welding procedure // Proceedings of IPAC2013 (Shanghai, China). - P.2334-2336.
  11. Boriskin V.N., Romanovsky S.K., Momot V.A., Titarenko Yu.A., Titov D.V., Uvarov V.L., Shevchenko V.A., Shelepko S.V. Optical monitoring the temperature of objects irradiated at an electron accelerator // Problems of atomic science and technology. Series “Nuclear Physics Investigations”. - Kharkov: NSC KIPT. - 2015. - No.6(100). - P.105-107.
  12. Bondarenko V.N., Glazunov L.S., Goncharov A.V., Zats A.V., Kolot V.Ya., Kuzmenko V.V., Levenets V.V., Omelnik A.P., Pystryak V.M., Sukhostavets V.I., Schur A.A. Analiticheskaya ustanovka dlya yaderno-fizicheskikh metodov analiza [Analytical facility for ion-beam analysis] // Nauchnye vedomosti (Belgorodskiy gosudarstvennyy universitet), Series “Fizika”. - 2001. – No.2(15). - P.86-92. (in Russian)
  13. 572X\_\_gseng0000.pdf (<http://www.fluke.com>).
  14. The Stopping and Range of Ions in Matter [http:// www.srim.org](http://www.srim.org)
  15. Vaysburd D.I., Pichugin V.F., Chebodayev M.I. Metodika opredeleniya termicheskogo soprotivleniya kontakta dielektrik-podlozhka pri intensivnyh rezhimakh oblucheniya dielektrika [Techniques of thermal resistance of dielectric/substrate contact at intensive irradiation regime of dielectric] // Izv. vuzov. Fizika. - 2001. - No.12. - P.36-43. (in Russian)
  16. Boyko V.I., Skvorcov V.A., Fortov V.Ye., Shamanin I.V. Vzaimodejstviye impulsnyh puchkov zaryazennykh chastich s veschestvom [Interaction of bunches charged particles beams with substance].-Moskow.: FIZMATLIT, 2003.-288p. (in Russian)
  17. Lambert D.K. Thermal conductivity 21. Edited by C.J. Kremers and H.A. Fine. - N.Y.: Plenum Press, 1990. - P.209-219.
  18. Quaranta A., Carturan S., Maggioni G., Milazzo P.M., Abbondano U., Della Mea G., Gramegna F., and Pieri U. Polyimide-based scintillation thin films // IEEE Trans. Nucl. Sci. - 2001. - Vol.48. - No.2. - P.219-224.

PACS: 61.05.cp, 72.80.Ng

## INFLUENCE OF COMPOSITION AND MICROSTRUCTURE ON THE FEATURES OF MECHANICAL PROPERTIES OF Co-Cr-Fe-Mn-Ni HIGH ENTROPY ALLOYS

A.V. Levenets<sup>1</sup>, I.V. Kolodiy<sup>2</sup>, N.V. Berezhnaya<sup>2</sup>, Y.S. Lipovskaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkiv National University  
Svobody Sq.4, 61022 Kharkiv, Ukraine

<sup>2</sup>NSC «Kharkiv Institute of Physics and Technology»,  
Academicheskaya Str.1, 61108 Kharkiv, Ukraine  
e-mail: avlevenets@gmail.com

Received February 20, 2017

The structure and mechanical properties of high-entropy CoCrFeMnNi (equiatomic) and Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub> alloys, which differ significantly in the stacking-fault energy, are studied. The structure of the alloys was investigated in three states – as-cast, after homogenizing annealing at T = 1000 °C for 24h and after annealing at T = 850 °C. It was found that in the cast state and after homogenizing annealing at 1000 °C both alloys are single-phase solid solutions with a FCC lattice. Annealing at 850 °C preserves the single-phase state in the equiatomic CoCrFeMnNi alloy, but leads to the appearance of a σ-phase in the Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub> alloy. The mechanical properties of these alloys were studied in a single-phase state by uniaxial compression tests and hardness measurements. It was discovered, that both alloys in a single-phase state had high plasticity and tendency to force strain hardening. The behavior of hardening coefficients in the area of true strains  $\epsilon = 0.05 - 0.17$  vary considerably. This may be due to a significant difference in the stacking-fault energy of the investigated alloys. As a result, in Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub> alloy along with dislocation deformation mechanism there is a high probability of implementation the twinning mechanism.

**KEYWORDS:** high-entropy alloys, Co-Cr-Fe-Mn-Ni alloys, stacking-fault energy, mechanical properties, deformation mechanism

### ВЛИЯНИЕ СОСТАВА И МИКРОСТРУКТУРЫ НА ОСОБЕННОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЫСОКОЭНТРОПИЙНЫХ СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Co-Cr-Fe-Mn-Ni

А.В. Левенец<sup>1</sup>, И.В. Колодий<sup>2</sup>, Н.В. Бережная<sup>2</sup>, Ю.С. Липовская<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина  
пл. Свободы 4, 61022 Харьков, Украина

<sup>2</sup>ННЦ "Харьковский физико-технический институт"  
ул. Академическая 1, 61108 Харьков, Украина

Исследованы структура и механические свойства высокоэнтروпийных сплавов CoCrFeMnNi (эквиатомный) и Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub>, которые значительно отличаются энергией дефектов упаковки. Структура сплавов исследовалась в трех состояниях – после отливки, после гомогенизирующего отжига при T = 1000 °C в течении 24 часов и после отжига при T = 850 °C. Было обнаружено, что в литом состоянии и после гомогенизирующего отжига при 1000 °C оба сплава являются однофазными твердыми растворами с ГЦК-решеткой. Отжиг при 850 °C сохраняет однофазное состояние в эквиатомном сплаве CoCrFeMnNi, но приводит к появлению σ-фазы в сплаве Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub>. Механические свойства этих сплавов изучались в однофазном состоянии с помощью испытаний на одноосное сжатие и измерение твердости. Было обнаружено, что оба сплава в однофазном состоянии обладают высокой пластичностью и склонностью к сильному деформационному упрочнению. При этом поведение коэффициентов упрочнения в области истинных деформаций  $\epsilon = 0,05 - 0,17$  существенно различается. Это может быть обусловлено значительным различием энергии дефектов упаковки в исследуемых сплавах, в результате чего в сплаве Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub> наряду с дислокационным механизмом деформации велика вероятность реализации механизма двойникования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** высокоэнтропийные сплавы, сплавы Co-Cr-Fe-Mn-Ni, энергия дефектов упаковки, механические свойства, деформационный механизм

### ВПЛИВ СКЛАДУ І МІКРОСТРУКТУРИ НА ОСОБЛИВСТІ МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВИСОКОЕНТРОПІЙНИХ СПЛАВІВ СИСТЕМИ Co-Cr-Fe-Mn-Ni

А.В. Левенець<sup>1</sup>, І.В. Колодій<sup>2</sup>, Н.В. Бережна<sup>2</sup>, Ю.С. Липовська<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Фізико-технічний факультет, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
м. Свободи 4, 61022 Харків, Україна

<sup>2</sup>ННЦ "Харківський фізико-технічний інститут"  
вул. Академічна 1, 61108 Харків, Україна

Досліджено структуру та механічні властивості високоентропійних сплавів CoCrFeMnNi (еквіатомний) і Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub>, які значно відрізняються енергією дефектів упаковки. Структура сплавів досліджувалась в трьох станах – після виливки, після гомогенізуючого відпалу при T = 1000 °C протягом 24 годин і після відпалу при T = 850 °C. Було виявлено, що в литому стані і після гомогенізуючого відпалу при 1000 °C обидва сплави є однофазними твердими розчинами з ГЦК-решіткою. Відпал при 850 °C зберігає однофазний стан в еквіатомному сплаві CoCrFeMnNi, але призводить до появи σ-фазы в сплаві Co<sub>20</sub>Cr<sub>26</sub>Fe<sub>20</sub>Mn<sub>20</sub>Ni<sub>14</sub>. Механічні властивості сплавів вивчалася в однофазному стані за допомогою випробувань на одноосне стиснення і вимір твердості. Було встановлено, що обидва сплави в однофазному стані мають високу пластичність і схильність до сильного деформацийного зміцнення. При цьому поведінка коефіцієнтів зміцнення в області дійсних деформаций  $\epsilon = 0,05 - 0,17$  істотно розрізняється. Це може бути обумовлено значною різницею

енергії дефектів пакування в досліджуваних сплавах, в результаті чого, в сплаві  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  поряд із дислокаційним механізмом деформації велика ймовірність реалізації механізму двійникування.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** високоентропійні сплави, сплави Co-Cr-Fe-Mn-Ni, енергія дефектів упаковки, механічні властивості, механізм деформації

High-entropy (or concentrated multicomponent) alloys, actively studied in recent years, are of interest not only for various technical applications [1,2], but also in terms of establishing the features of their structure formation and mechanisms of various physical processes, in particular the plastic deformation processes. A typical representative of high-entropy alloys (HEA's) is an equiatomic CoCrFeMnNi alloy (Cantor alloy), which is a solid solution with a FCC lattice [3, 4]. There are a number of works in which the mechanical properties of this alloy are studied, but opinions on plastic deformation mechanisms vary greatly. For example, in [5] after the rolling deformation at room temperature the presence of twins was detected at a deformation degree of more than 20%, whereas in [6] after the tension deformation twins have been observed only at the largest deformations (near destruction). It is known that both the kind of loading and certain "internal" features of alloy (in particular, the stacking-fault energy) significantly influence on the deformation mechanism.

The aim of this work was to study the microstructure and mechanical properties of equiatomic CoCrFeMnNi and non-equiatomic  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  (in at %) alloys after the compression deformation. They have different stacking-fault energy (19 and  $3.5 \text{ mJm}^{-2}$ , accordingly [7]).

### MATERIALS AND METHODS

CoCrFeMnNi and  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloys were melted in arc furnace in argon atmosphere. The purity of initial metals wasn't less than 99.9%. To ensure composition and microstructure uniformity ingots were remelted 5 times, turning them every melting. Before the investigations samples were annealed at  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  24 h, some of the samples were also annealed at  $T = 850 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Samples preparation for microstructural studies was carried out by grinding on waterproof abrasive paper with grit from 300 to 1000 with subsequent polishing with diamond paste on the velvet. Final polishing was performed on pure velvet with gasoline. For microstructure detection samples were etched in the following reagent:  $\text{HNO}_3$  – 1 part, HF - 1 part,  $\text{H}_2\text{O}$  – 1 part,  $\text{H}_2\text{SO}_4$  – few drops. Etching time was  $15 \div 20$  seconds.

X-ray diffraction analysis was carried out using DRON-4-07 diffractometer in a copper  $\text{Cu-K}\alpha$  radiation. Mechanical properties were studied under uniaxial compression conditions at room temperature. Samples for mechanical tests were prepared by spark cutting in a parallelepiped form size of  $4 \times 4 \times 3.8 \text{ mm}^3$ , and following faces grinding on a special device with the abrasive grit paper with grit from 400 to 2000. Compression test was conducted on a universal testing machine 1958 Y-10 at a strain rate of  $0.17 \text{ mm/min}$ . After loading up to a certain value the samples were unloaded, their geometric parameters were measured and on planes, perpendicular to the compression axis, the Vickers hardness was measured on a universal instrument 2137 TY with a load of 20 kg. Then samples were subjected to compression deformation again and yield strength and hardness were measured. This procedure was carried out several times; the dependence of hardness and yield strength on the pre-compression deformation value was built from obtained results.

### RESULTS AND DISCUSSION

#### The microstructure

As-cast alloys have a typical dendritic microstructure (Fig. 1a). At the same time, as shown previously [1], dendrites (marked as number 1) enriched with Co, Cr and Ni and the interdendritic space (marked as number 2) – with Ni and Mn. After homogenizing annealing at  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$ , the alloys have a grain microstructure with a grain size of several hundred micrometers (Fig. 1b).

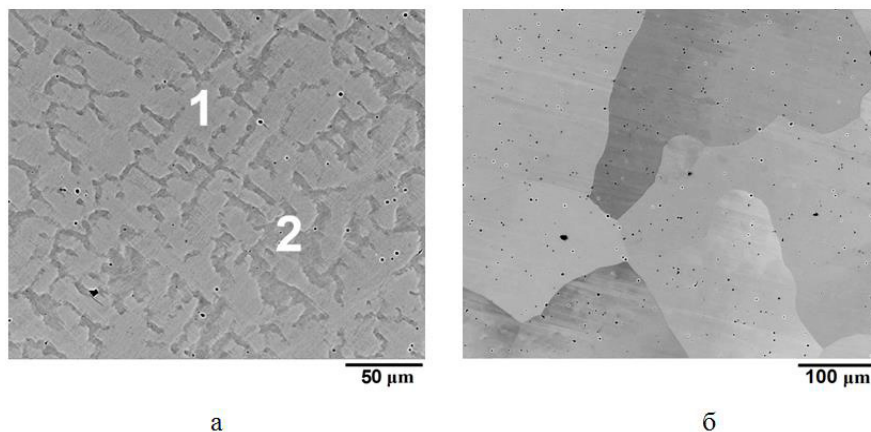


Fig. 1. Microstructure of the samples after melting (a) and annealing at  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  for 24 hours (b).



**The crystal structure**

X-ray studies have shown that the equiatomic CoCrFeMnNi alloy in as-cast state and after homogenizing annealing is a single-phase solid solution with a FCC lattice ( $a=3.602 \text{ \AA}$ ), which is in full accordance with the known literature data [2].  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy in the cast state is also a single-phase FCC solid solution. The structural state of the  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy depends on the annealing temperature.

Annealing at  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  preserves the single-phase state of the alloy, the FCC lattice parameter is  $3.583 \pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ . After annealing at  $850 \text{ }^\circ\text{C}$  the alloy is two-phase - along with the main FCC-phase the  $\sigma$ -phase is present in the alloy (Fig. 2). In this case, the lattice parameter of the FCC-phase is  $a = 3.603 \pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$  and the lattice parameters of the  $\sigma$ -phase are  $a = 8,797 \text{ \AA}$ ,  $c = 4,557 \text{ \AA}$ .

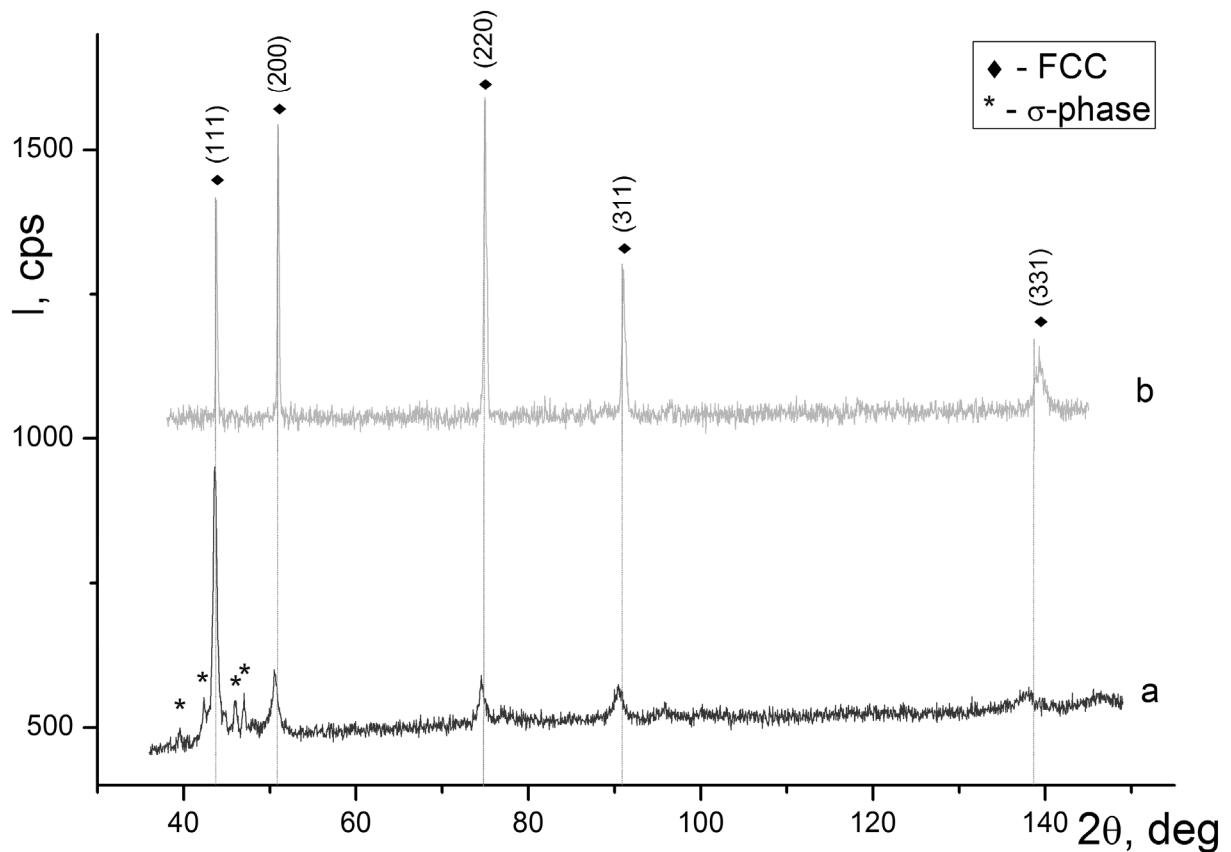


Fig. 2. Diffraction patterns of  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy  
 a - after annealing at  $T = 850 \text{ }^\circ\text{C}$ , b - after annealing at  $T = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Mechanical properties**

Typical technical and true strain curves of compressed samples are shown in Fig. 3.

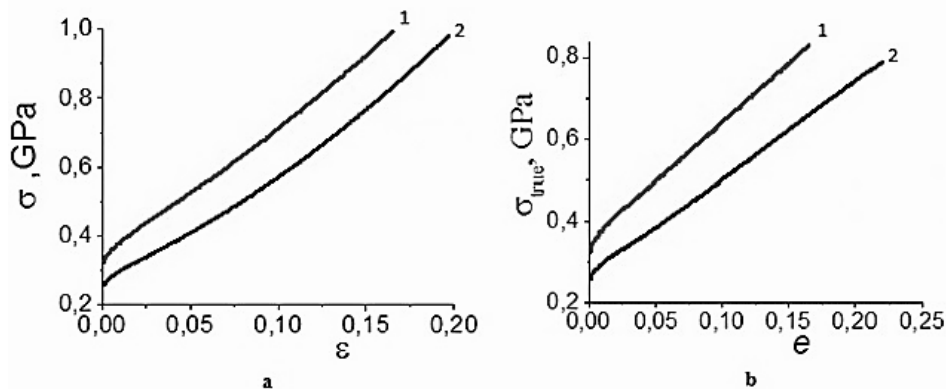


Fig. 3. Typical actual (a) and true (b) strain curves under uniaxial compression for CoCrFeMnNi (curve 1) and  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  (curve 2) alloys

Recalculation of technical (actual) strain curves in true coordinates performed by standard formulas for compression deformation:

$$\sigma_{true} = \sigma(1 - \varepsilon), \quad e = -\ln(1 - \varepsilon),$$

where  $\sigma_{true}$  - true stress,  $e$  - true strain,  $\sigma$  - actual stress,  $\varepsilon$  - actual strain.

The hardness of both as-cast alloys was close and amounted to 1400-1500 MPa. Compression test also showed that the yield strength  $\sigma_{0,2}$  was  $262 \pm 2.5$  MPa for the equiatomic CoCrFeMnNi alloy and about  $204 \pm 8$  MPa for the  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy. Both of these investigated alloys are plastic and do not break under compression rate more than 50%.

Note that although the yield strength  $\sigma_{0,2}$  is slightly lower for annealed  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy than that for the equiatomic alloy, after plastic deformation with  $\varepsilon \geq 20\%$  values  $\sigma_{0,2}$  are almost identical for both alloys (Fig. 4a), as well as hardness (Fig. 4b).

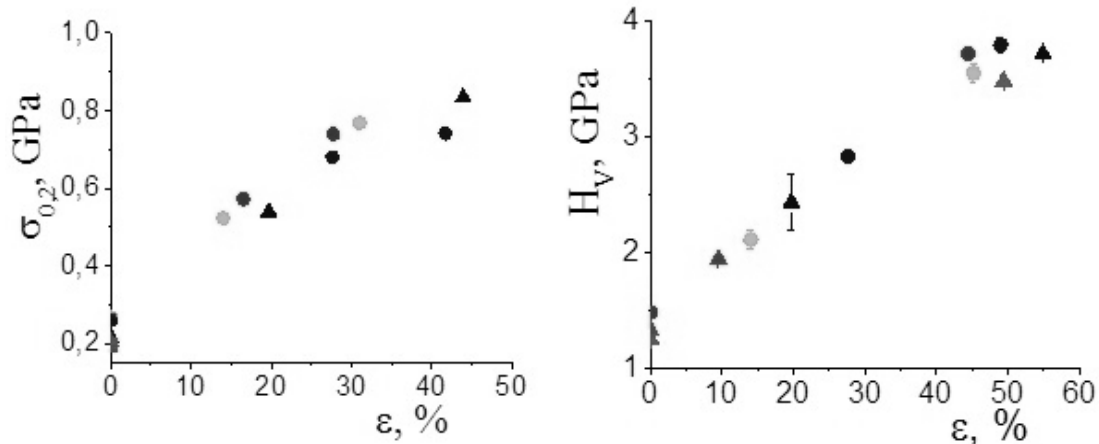


Fig. 4. Effect of the deformation degree on the yield strength (a) and hardness (b) of alloys. Circles - CoCrFeMnNi samples, triangles -  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  samples

The behavior of the material under deformation is characterized by a hardening coefficient  $d\sigma_{true}/de$  (Fig.5). As can be seen from Fig.5, dependences of the hardening coefficient on deformation are essentially different for the investigated alloys.

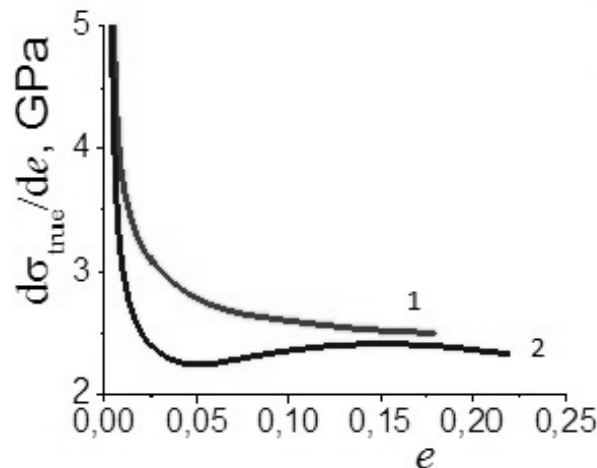


Fig. 5. Strain hardening coefficient dependency on true strain for CoCrFeMnNi (curve 1) and  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  (curve 2) alloys

The behavior of  $d\sigma_{true}/de$  for an equiatomic alloy is typical for FCC metals – at the initial stage the coefficient falls sharply and then it gradually decreases [6,8]. In the  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy three phases of the hardening coefficient change are observed: a sharp fall on the initial stage with a minimum at  $e \approx 0,05$ , a growth of  $d\sigma_{true}/de$  up to deformations of  $e \approx 0,15 - 0,17$ , and a further gradual decline. The greatest interest is the second phase, which can mean the activation of a new deformation mechanism. A similar behavior of the hardening coefficient was observed in [6] on the equiatomic CoCrFeMnNi alloy in the case of deformation at 77 K, when a twinning mechanism was activated at a certain deformation stage. As it known, the low stacking-fault energy promotes twinning. So, it can be expected that a critical twinning stress is achieved at a certain degree of strain hardening in non-equiatomic  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  alloy that has very low stacking-fault energy ( $3,5 \text{ mJm}^{-2}$  [7]), even in the case of room temperature a twinning occurs along with dislocation gliding.

Twin boundaries acts as an obstacles and delays the dislocations motion, which leads to the increasing of the hardening coefficient. But further research is needed to experimentally confirm this assumption.

### CONCLUSIONS

1. Equiatomic CoCrFeMnNi and non-equiatomic  $\text{Co}_{20}\text{Cr}_{26}\text{Fe}_{20}\text{Mn}_{20}\text{Ni}_{14}$  high-entropy alloys are single-phase FCC solid solutions in as-cast state and after annealing at 1000 °C. Both alloys have a high plasticity and a significant ability to deformation hardening.

2. Although the mechanical properties at room temperature (yield strength and microhardness) at high compression strains are similar for both alloys, the behavior of the hardening coefficient in the range of true stress  $\sigma = 0,05 - 0,17$  is significantly different. This may indicate the implementation of various deformation mechanisms in these alloys at certain deformation stages, which caused by the difference in the stacking-fault energy.

### REFERENCES

1. Murty B.S., Yeh J.W., Ranganathan S. High-entropy alloys. - Elsevier Science & Technology (Elsevier inc), 2014. – 218 p.
2. Pogrebnjak A.D., Bagdasaryan A.A., Yakushchenko I.V., Beresnev V.M. The structure and properties of high-entropy alloys and nitride coatings based on them // Russian Chemical Reviews. – 2014. – Vol.83. – No.11. – P.1027-1061.
3. Cantor B., Chang I.T.H., Knight P., Vincent A.J.B. Microstructural development in equiatomic multicomponent alloys // Materials science and engineering. -2004.- Vol. A375-377. – P.213-218.
4. Salishchev G.A., Tikhonovsky M.A., Shaisultanov D.G., Stepanov N.D., Kuznetsov A.V., Kolodiy I.V., Tortika A.S., Senkov O.N. Effect of Mn and V on structure and mechanical properties of high-entropy alloys based on FeCrCoNi system // Journal of Alloys and Compounds. – 2014. – No.591. - P.11-21.
5. Stepanov N., Tikhonovsky M., Yurchenko N., Zybkin D., Klimova M., Zherebtsov S., Salishchev G., Efimov A. Effect of cryo-deformation on structure and properties of CoCrFeNiMn high-entropy alloy // Intermetallics. – 2015. – Vol.59. – No. 4. - P.8-17.
6. Laplanche G., Kostka A., Horst O.M., Eggeler G., George E.P. Microstructure evolution and critical stress for twinning in the CrMnFeCoNi high-entropy alloy // Acta materialia. – 2016. - Vol.118. - P.152-163.
7. Zaddach A.J., Niu C., Koch C.C., Irving D.L. Mechanical properties and stacking fault energies of NiFeCrCoMn high-entropy alloy // J. of Metals. – 2013. - Vol.65. - P. 1780-1789.
8. Tikhonovsky M.A., Tortika A.S., Kolodiy I.V., Stoev P.I., Rudycheva T.Y., Berezhnaya N.S., Tantsjura I.G. Microstructure and properties of high entropy alloys  $\text{CoCrFeMnNiV}_{0,25}\text{C}_{0,175}$  and  $\text{CrFe}_2\text{MnNiV}_{0,25}\text{C}_{0,175}$  // Problems in atomic Science and Technology (PAST). Series “Physics of radiation defects and radiation materials science”. – 2016. – Vol. 4(104). - P.37-41.

PACS: 05.45.-A; 05.20.GG; 02.50.-R; 02.60.CB; 02.70.-C

## SIMULATION OF SYNCHRONIZATION OF NONLINEAR OSCILLATORS BY THE EXTERNAL FIELD

V.M. Kuklin, D.N. Litvinov, S.M. Sevidov, A.E. Sporov

*V.N. Karazin Kharkiv National University, School of Computer Sciences*

*Svobody Sq. 4, 61022, Kharkiv, Ukraine*

*e-mail: [sporov@yahoo.com](mailto:sporov@yahoo.com)*

Received March 17, 2017

In this paper, the self-consistent model was considered, consisting of a system of oscillators, the coupling between them was assumed to be integral (due to the fields formed as a result of their co-radiation). With the help of this model, the features of synchronization by waves of finite amplitude of a system of oscillators were refined, the initial phase values of which are random. The effect of nonlinearity, in particular, due to the change in the mass of the oscillator due to relativistic effects, was taken into account. It was shown that the nonlinearity does not violate the nature of the energy exchange between the wave and the oscillator system, leading only to a slight decrease in the efficiency of such an exchange.

**KEYWORDS:** oscillator, nonlinearity, synchronization, energy exchange

### МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ СИНХРОНІЗАЦІЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ ЗОВНІШНІМ ПОЛЕМ

В.М. Куклін, Д.М. Літвінов, С.М. Севідов, О.Є. Споров

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна факультет комп'ютерних наук*

*м. Свободи 4, 61022, Харків, Україна*

У даній роботі було розглянуто самоузгоджену модель, що складається з системи осциляторів зв'язок між якими передбачається як інтегральний (за рахунок полів, що формуються в результаті їх спільного випромінювання). За допомогою даної моделі було уточнено особливості синхронізації хвилями скінченної амплітуди системи осциляторів, початкові значення фаз яких є випадковими. Було проведено облік впливу нелінійності, зокрема, обумовленої зміною маси осцилятора за рахунок релятивістських ефектів. Було показано, що урахування нелінійності не порушує характер обміну енергією між хвилею і системою осциляторів, приводячи лише до невеликого зниження ефективності такого обміну.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** осцилятор, нелінійність, синхронізація, обмін енергією

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

В.М. Куклин, Д.Н. Литвинов, С.М. Севидов, А.Е. Споров

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина факультет компьютерных наук*

*пл. Свободы 4, 61022, Харьков, Украина*

В данной работе была рассмотрена самосогласованная модель, состоящая из системы осцилляторов, связь между которыми предполагалась интегральной (за счет полей, формируемых в результате их совместного излучения). С помощью данной модели были уточнены особенности синхронизации волнами конечной амплитуды системы осцилляторов, начальные значения фаз которых являются случайными. Был проведен учет влияния нелинейности, в частности, обусловленной изменением массы осциллятора за счет релятивистских эффектов. Было показано, что нелинейность не нарушает характер обмена энергией между волной и системой осцилляторов, приводя лишь к небольшому снижению эффективности такого обмена.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** осциллятор, нелинейность, синхронизация, обмен энергией

Synchronization of systems of oscillators which drew the attention of C. Huygens as early as in the seventeenth century, was discussed by many researchers [1,2]. The influence of external periodic force is able to adjust the parameters of the oscillator and its phase. Therefore, synchronization is often referred to as “locking” of frequency and/or phase [3,4].

The most efficient synchronization of a large number of oscillators occurs under the influence of a strong external force or under the impact of already synchronized oscillators.

The coupling between the oscillators can be local due to their mutual non-linear influence or have integral nature due to the fields generated by their joint radiation. Of great interest are the various parametric mechanisms affecting the efficiency of interaction of oscillators [5,6], although in this work, we neglect their direct interaction. Instead, we focus on the case when independent oscillators interact via the common field (generated by them and influencing them).

An important factor of interest to this case is the apparent self-consistency of the described systems and the great practical importance of such problems. The considered models are able to clarify some useful properties of oscillators' synchronization by the finite-amplitude waves when initial phases of oscillators are random. Also, we studied non-linear effects, particularly caused by the change of the oscillator's mass due to the relativity effects.

So, the aim of the work is to investigate the features of synchronization by waves of finite amplitude of the specified oscillator system taking into account the nonlinear effects. It is shown that nonlinearity does not introduce any

new effects into the nature of energy exchange between the wave and oscillators in the regime of synchronization by a large field, and only leads to a moderate decrease of the efficiency of such exchange.

**PROBLEM STATEMENT**

Consider the synchronization of the oscillators by the electromagnetic wave with frequency  $\omega$ , wave vector  $\vec{k} = (0, 0, k)$ , and the fields of the form:  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ ,  $\vec{B} = (0, E, 0)$ , and  $E = |E| \cdot \exp\{-i\omega t + ikz + i\varphi\}$ .  $N$  oscillators are distributed along the  $OZ$  axis over the wavelength  $2\pi/k$ . The mass of the oscillator is equal  $m$ , the charge is equal  $-e$ , the frequency of the oscillator coincides with the frequency of the wave  $\omega$ . The initial oscillation amplitude of the oscillator is  $a_0$ . We assume that the oscillator moves only in the direction of the axis  $OX$ . In this case, the influence of the magnetic field of the wave on the dynamics of the oscillator can be neglected. Amplitude of their oscillations as a function of time is equal to  $x_i = |x_i| \cdot \exp\{-i\omega t + i\psi_i\}$ . The equations for the field, in this case, can be represented as:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N A_i \cdot \text{Sin}(\psi_i - Z_i - \varphi), \tag{1}$$

$$E \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N A_i \cdot \text{Cos}(\psi_i - Z_i - \varphi). \tag{2}$$

The motion equations for the oscillators will be:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \tau} = \frac{E}{2} \text{Sin}(\varphi - \psi_i + Z_i), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \tau} - \Delta_i = -\frac{E}{2A_i} \text{Cos}(\varphi - \psi_i + Z_i). \tag{4}$$

The energy conservation law follows from the equations (1) and (3)

$$E^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A_i^2 = \text{const}, \tag{5}$$

where we have used the following representations:

$$\frac{eE}{\omega m \gamma a_0} = E, \quad \tau = \gamma t, \quad A_i = |x_i| / a_0,$$

$$\gamma^2 = \frac{\pi e^2 n_0}{\epsilon_0 m}, \quad kz_i = Z_i \in (0, 2\pi).$$

For the non-relativistic case (the mass of the oscillator is independent of its speed) assume that  $\Delta_i = 0$ , with relativity:  $\Delta_i = \alpha \cdot A_i^2$ ,  $\alpha = \frac{3\omega}{4} (k \cdot a_0)^2$ .

**ANALYSIS OF DIFFERENT MODES OF OPERATION**  
**Pendulum mode**

In the case when the mass of the oscillators in the lab frame is independent of their speed or their energy ( $\Delta_i = 0$ ), for the high initial energy of field and particles ( $E(0) = A_i(0) = 1$ ) we can see the following dynamics of the system.

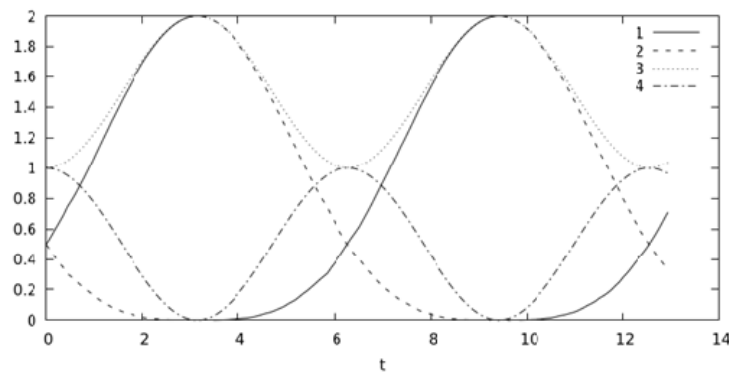


Fig. 1. Dynamics of energy redistribution in the system  
1 – energy of emitting particles, 2 – energy of absorbing particles, 3 – energy of all particles, 4 - field energy

Fig.1 depicts the energy of the emitting particles with a solid line, and the energy of absorbing particles with the dashed line (i. e., energy is taken from the wave). Dotted curve represents total energy of all particles. The dash-dotted curve depicts the field's energy  $E^2$  (i.e., the last two curves are components of integral (5)). Fig.2 shows how many particles absorb or emit energy.

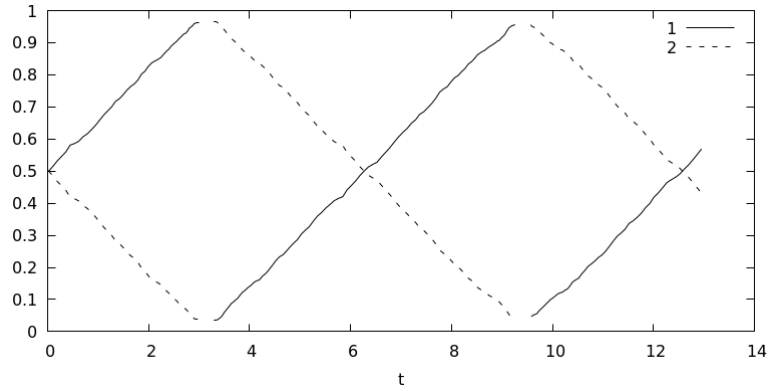
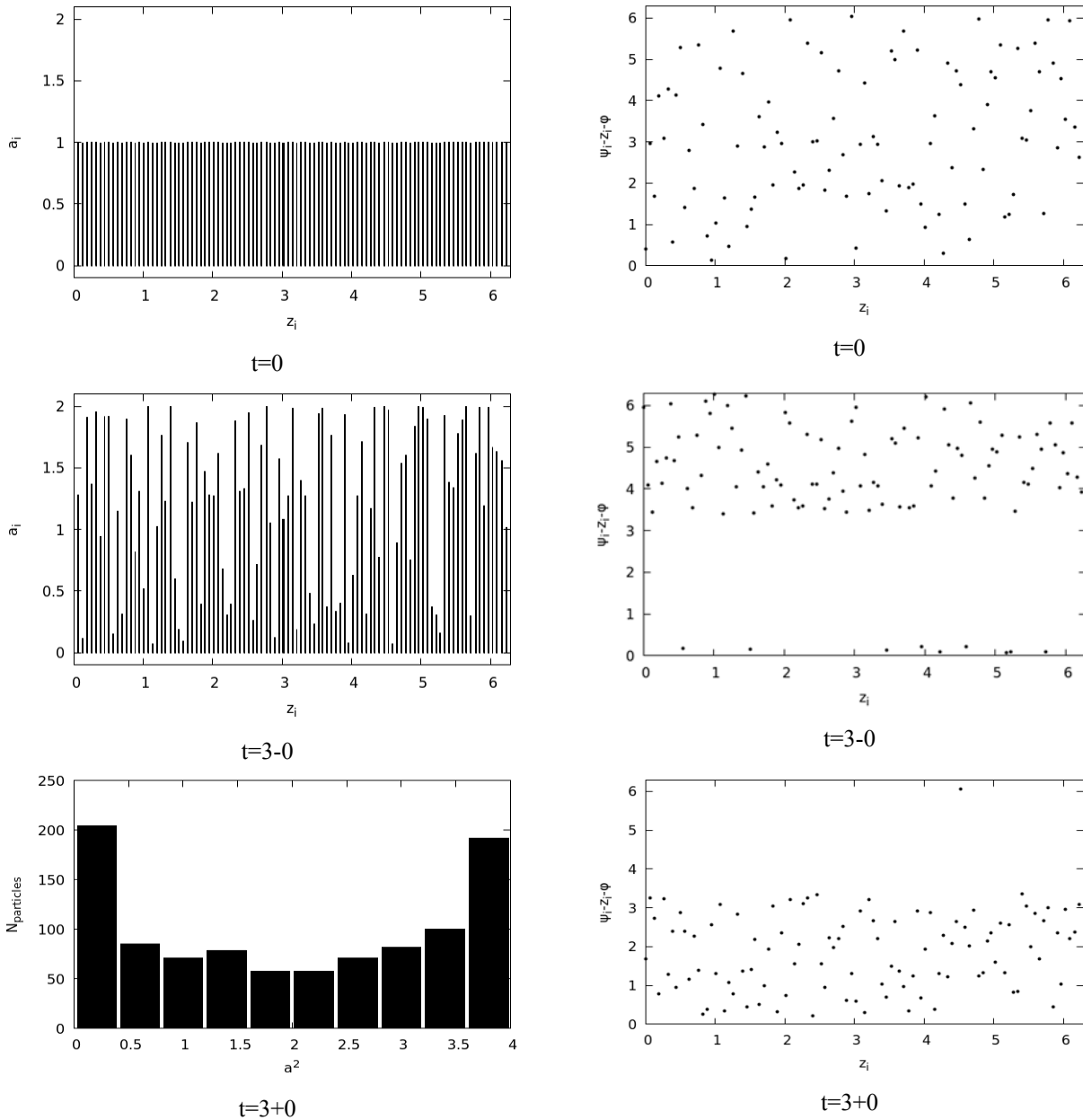


Fig. 2. The number of radiating (solid curves) and absorbing particles (dotted curves)

The distribution of amplitudes of particle oscillations and their phases for several time moments is shown in Fig. 3.



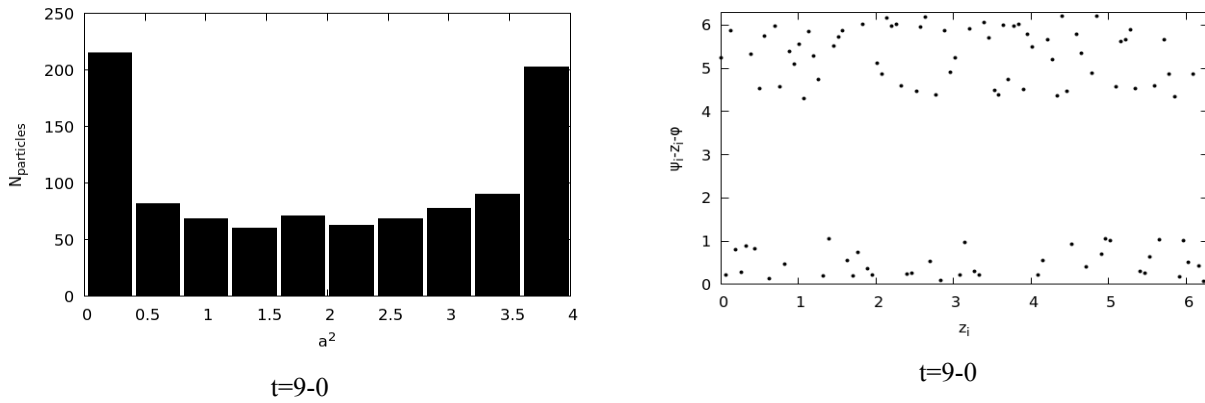


Fig. 3. Amplitude (left) and phase (right) oscillators at different moments of time

At the initial moment, the amplitudes of all oscillators are almost the same, and the phases are randomly distributed. When reaching field minimum ( $t=3-0$ ) we get so-called "soft lock" of the oscillators' phases (phase differences  $\Phi_i = \psi_i - Z_i - \phi$  of the oscillators are different, but nevertheless, their variation is limited,  $\pi < \Phi_i < 2\pi$ ). Until reaching the minimum of the field, all oscillators are in the phase of absorption. Later (at  $t=9$ ) a small part of the oscillators leaves the zone of phase lock. Because of the small value of field amplitude at  $t=3$  и  $t=9$ , the derivatives  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$  grow rapidly, and the phase of the field changes by  $\pi$ . After phase jump, oscillators move into the radiation area  $0 < \Phi_i < \pi$ . The distribution of the amplitudes of the oscillators is presented for times  $t=3+0$  and  $t=9-0$ . As can be seen, the amplitude of the oscillations varies greatly. The phase plane (in polar coordinates) with the oscillators looks like the following (Fig.4).

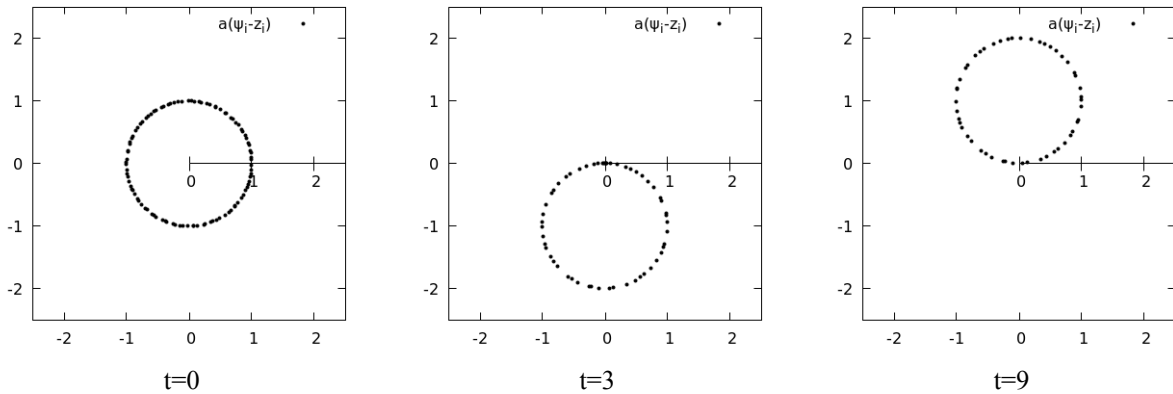


Fig. 4. The behavior of the oscillators in the phase plane at different points in time

From this figure, we can observe that the particles do not move relative to each other as the system evolves. Instead, they synchronously move (sometimes with rotation) on the plane  $(A_i \cos(\psi_i - Z_i - \phi); A_i \sin(\psi_i - Z_i - \phi))$ . To prove this, express the Cartesian coordinates of particles on that plane through their polar coordinates in the phase space:

$$x_i = A_i \cos(\psi_i - Z_i - \phi),$$

$$y_i = A_i \sin(\psi_i - Z_i - \phi).$$

After taking derivatives and simple algebraic transformations we get:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = y_i \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{E}{2} x_i \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

From these equations, it is seen that the particle motion is a combination of two components: translation along the y-axis at a speed proportional to the amplitude of the field E, and rotation around the origin by the angle proportional to the field phase  $\phi$ . With respect to each other the particles do not move, which follows from equality to zero of the derivative of the distance between a pair of arbitrary particles 1 and 2:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \frac{\partial \phi}{\partial t} + (y_1 - y_2)(-x_1 + x_2) \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Changing the initial conditions, the system behavior may differ significantly.

**Generation mode**

Let the mass of the oscillators in the laboratory frame of reference still does not depend on their speed or their energy ( $\Delta_i = 0$ ). Consider the case  $E(0) = 0.1; A_i(0) = 1$ . In this case, the wave of small amplitude is unable to synchronize the oscillators, as seen in Fig. 5 and Fig. 6.

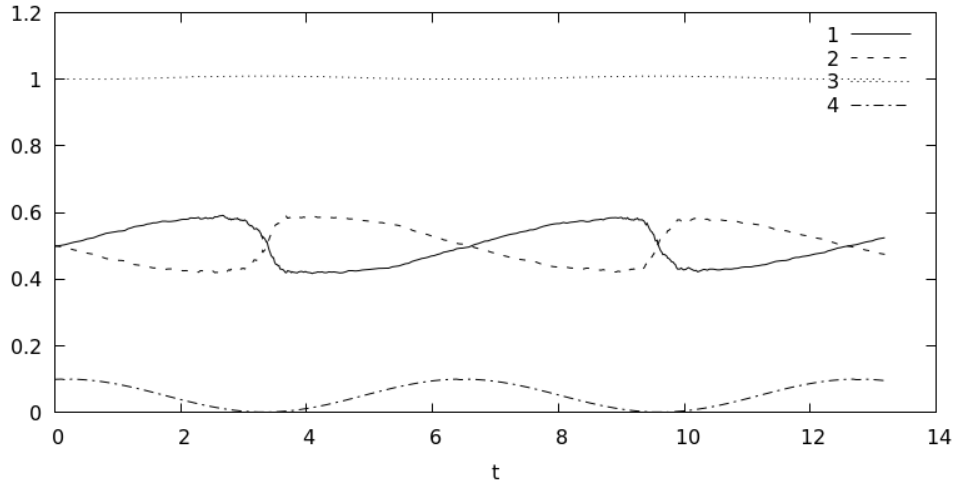


Fig. 5. Generation mode. 1 – energy of emitting particles, 2 – energy of absorbing particles, 3 – energy of all particles, 4 - field energy

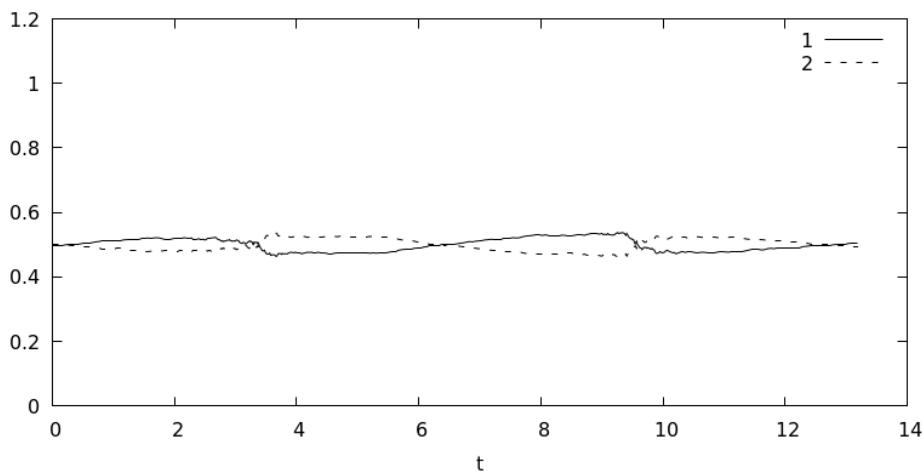


Fig. 6. Generation mode. The number of emitting (solid curves) and absorbing (dotted curves) particles

The "ring" of particles which at the initial moment is the same as in Fig. 4, at  $t=0$  slightly deviates from its initial position.

**Strong synchronization mode**

When  $E(0) = 1; A_i(0) = 0.1$ , on the contrary, the field synchronizes oscillators much better. For these initial values, we have the following system dynamics (Figs. 7,8).

At the initial time moment, all the amplitudes are small and almost the same, and the phases are distributed randomly (Fig.9).

When reaching the minimum of the field ( $t=3-0$ ) a tough lock of the phases of the oscillators occurs (phase difference  $\Phi_i = \psi_i - Z_i - \phi$  of the oscillators varies, but the variation is minimal, and all of  $\Phi_i \approx 5$ ). Until reaching of the minimum of the field, all oscillators are in the phase of effective absorption. Because of the smallness of the amplitude of the field around the time point  $t=3$  and  $t=9$  derivatives  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$  experience jumps, and the phase of the field



changes by  $\pi$ . After the jump, oscillators are moving into the radiation area where  $\Phi_i \approx 1.2$ . Note that in this case, the phase lock is effective and the oscillators were all the time within the area of the phase lock.

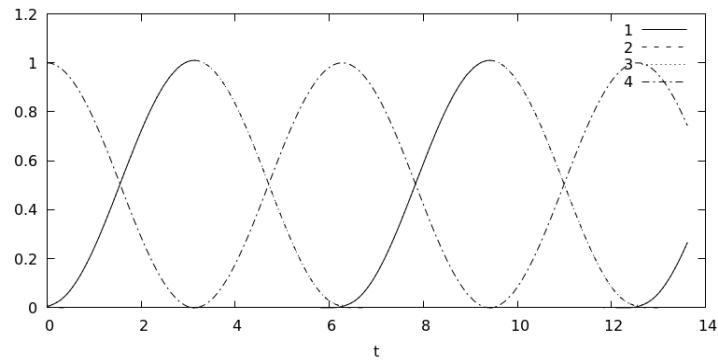


Fig. 7. Strong synchronization mode  
 1 – energy of emitting particles, 2 – energy of absorbing particles, 3 – energy of all particles 4 – field energy

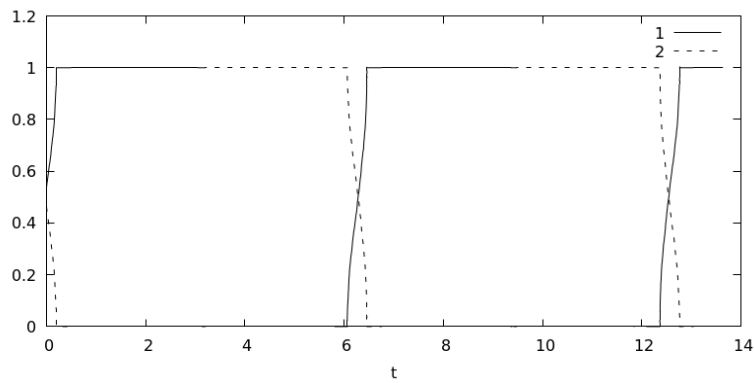
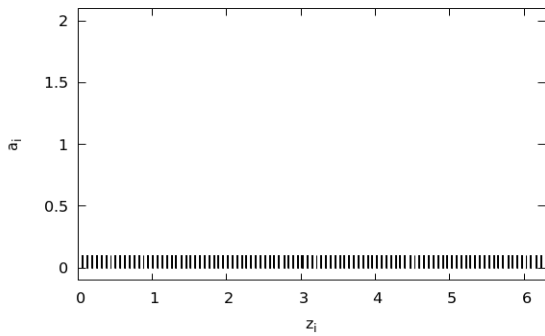
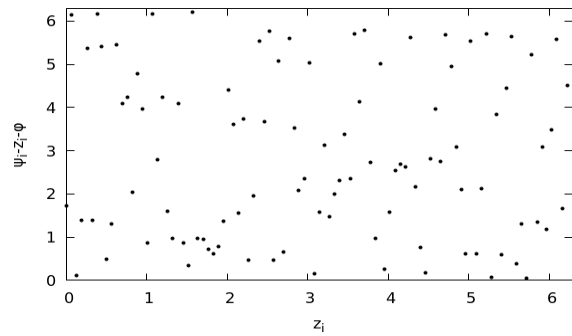


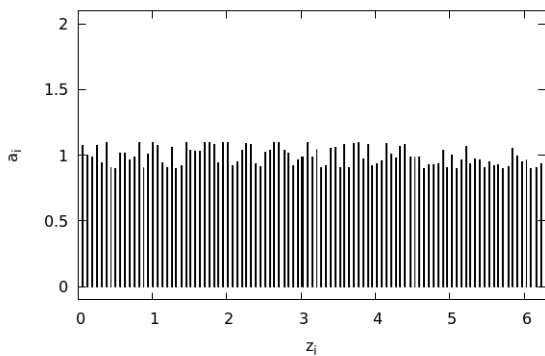
Fig. 8 Strong synchronization mode.  
 The number of emitting (solid curves) and absorbing (dotted curves) particles



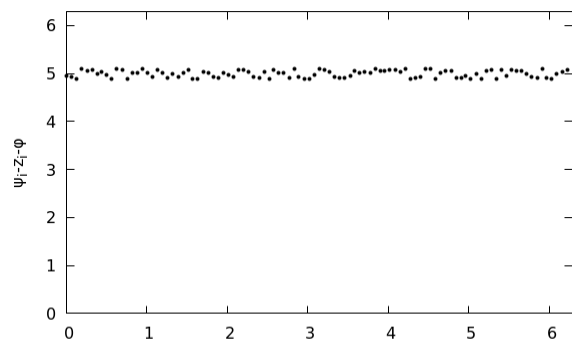
t=0



t=0



t=3-0



t=3-0

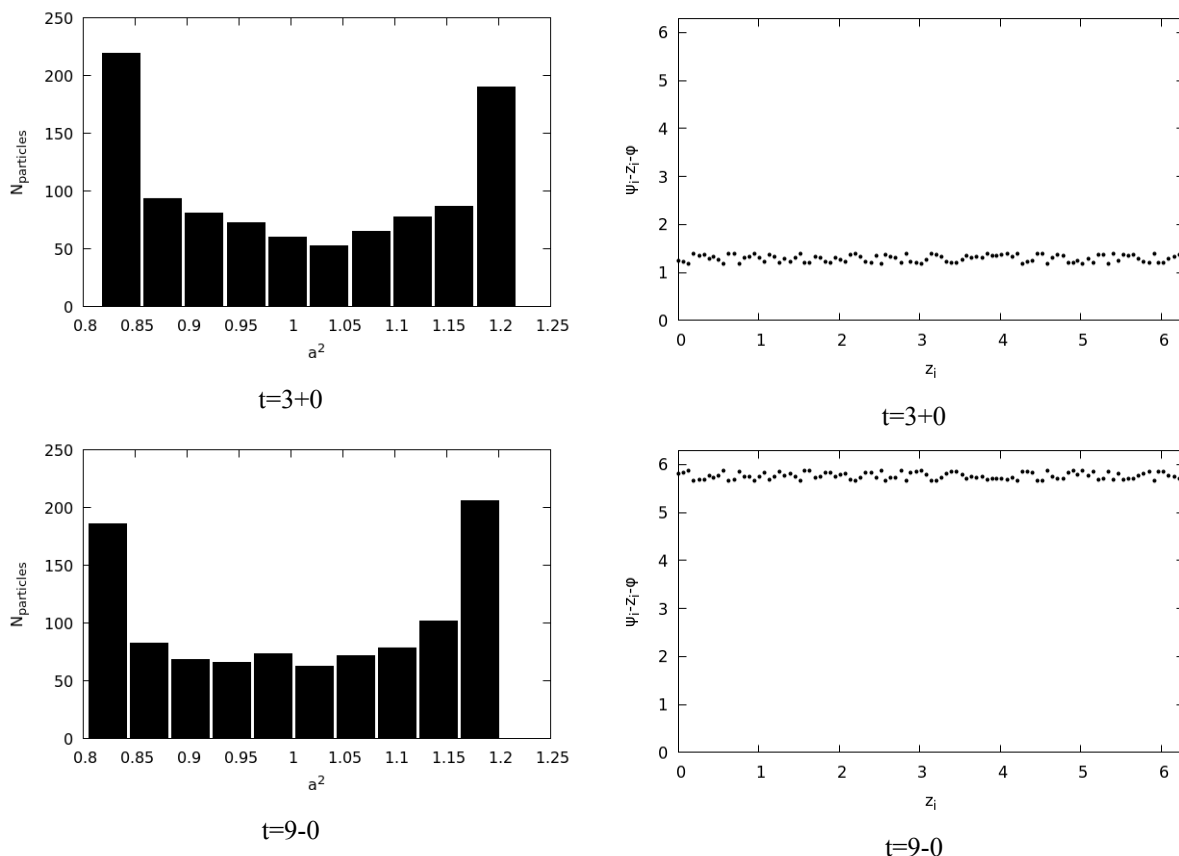


Fig. 9. The regime of strong synchronization. Amplitude (left) and phase (right) oscillators at different points in time

The distributions of the amplitudes of the oscillators are presented for times  $t=3+0$  and  $t=9-0$ . It can be seen that the interval of change of the oscillation amplitude, in this case, is significantly narrowed.

The placement of the oscillators on the phase plane looks like the following (Fig. 10).

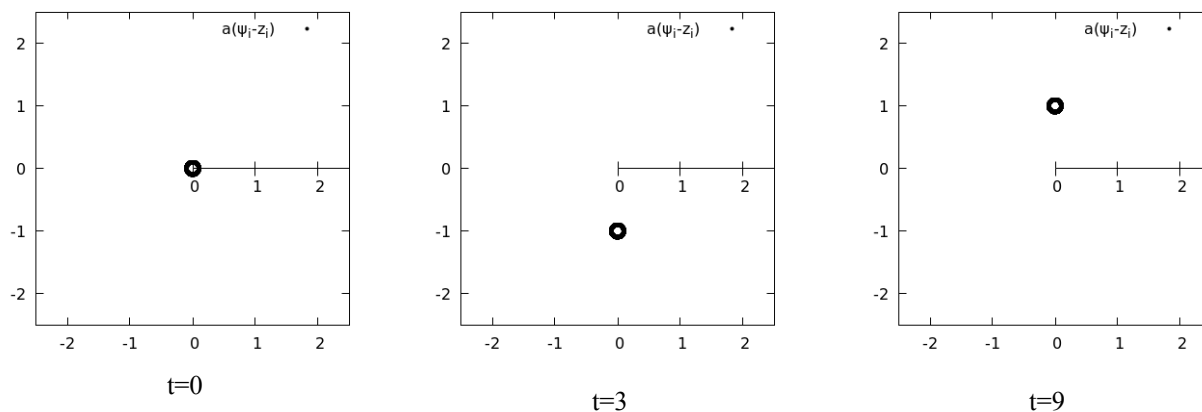


Fig. 10. The regime of strong synchronization. The behavior of the oscillators in the phase plane at different points in time

### THE NON-LINEARITY

The statement that in the regime of synchronization by a large field the nonlinearity of the oscillators significantly distorts the dynamics of the system is greatly exaggerated (Although, it should be noted, that in the field generation regime, the influence of nonlinearity is important [7]). To show this, we introduce the effect of the oscillator's mass change in the laboratory frame by assuming,  $\alpha$  (in equation 4). Consider the case when  $\alpha = 0.3$ . It can be shown that in the generating mode the results are slightly different from the linear case when  $\alpha = 0$ . Therefore, we focus on the case of strong synchronization. When  $E(0)=1; A_i(0)=0.1$ , the field still strongly synchronizes the oscillators (Figs. 11,12).

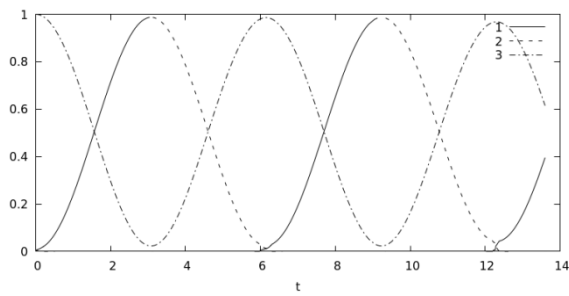


Fig. 11. The regime of strong synchronization of nonlinear oscillators. 1 – energy emitting particles, 2 – energy absorbing particles, 3 – energy of all particles, 4 – field energy.

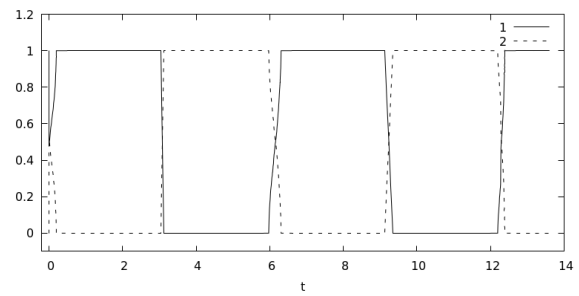
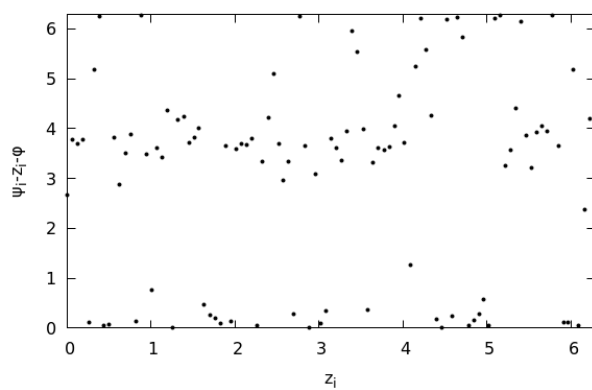
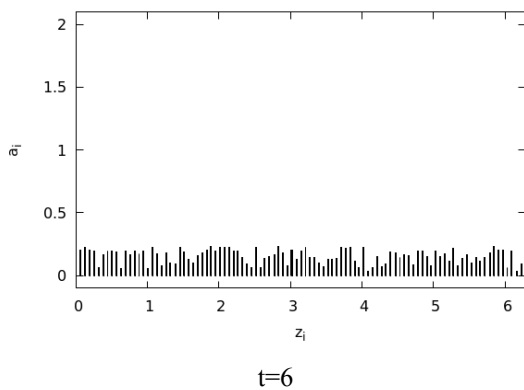
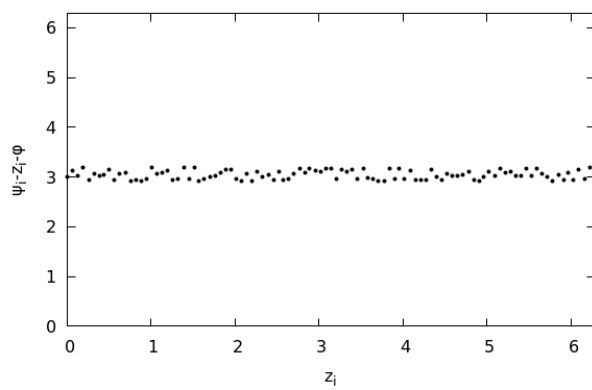
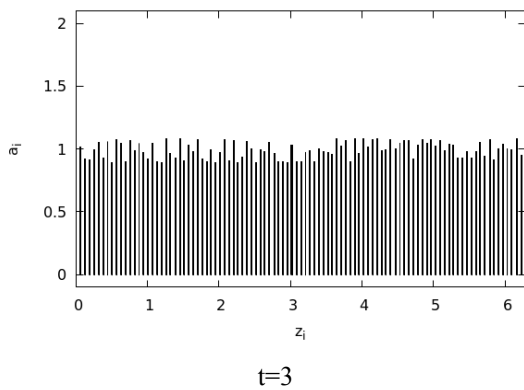


Fig. 12. The regime of strong synchronization of nonlinear oscillators. The number of radiating (solid curves) and absorbing particles (dotted curves)

The initial state is similar to the case of strong synchronization where  $\alpha = 0$ . Further dynamics is different from the linear case. First of all, the wave's phase jump due to the phase mismatch of the oscillators and not so significant decrease in the amplitude of the field in the minimum is not so sharp (Fig. 11). Therefore, the locked phases of the oscillators smoothly transit from the region of absorption to the region of the radiation. The average value of the phases at  $t=3$  was approximately  $\langle \Phi_i \rangle \approx \pi$ . At the maximum of the field, capture conditions are violated and we can see the differentiation of the oscillators in two groups. However, later we observe a strong enough phase lock (Fig 13). It is less effective than in the linear case, but still very significant.



t=6

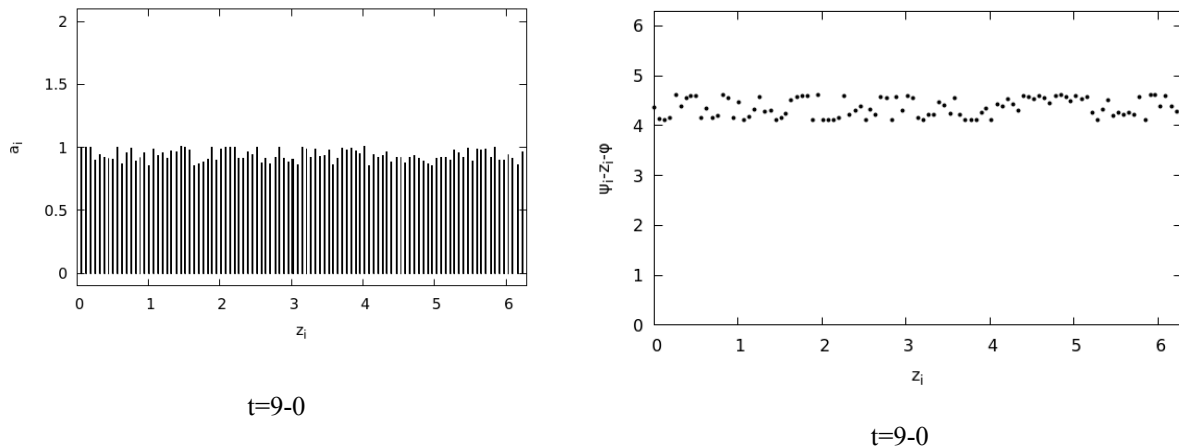


Fig. 13. The regime of strong synchronization of nonlinear oscillators. Amplitude (left) and phase (right) oscillators at different points in time

The placement of the oscillators on the phase plane can be represented in the form, presented on Fig. 14.

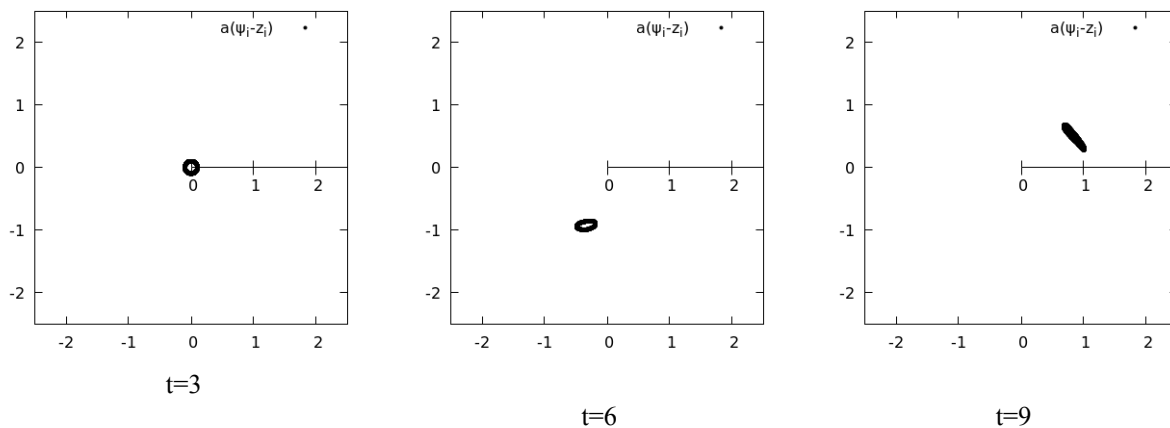


Fig. 14. The regime of strong synchronization of nonlinear oscillators. The behavior of the oscillators in the phase plane at different points in time

## CONCLUSIONS

Thus, we can distinguish two kinds of behavior of the system.

The system of excited oscillators with random phases ensures effective generation of waves, the initial amplitude of which was quite small. That is, the first, the "generation" mode is not effective.

So, consider the second, the "synchronization" mode of oscillators by a wave of finite amplitude. If the initial wave amplitude is large enough, it is able to effectively exchange energy with the system of oscillators with small amplitude. In this case, the phase lock of the oscillators (together with the phase of the wave) would be nonstrict, i.e., the phases differences of the oscillators will vary. However, their spread will remain limited, though noticeable. It is important that almost all of the oscillators move from the absorption mode to the radiation mode (at the frequency of the wave) due to a sharp jump of wave's phase. This jump occurs because of the significant reduction of the wave's amplitude.

A powerful wave can lead to a noticeable and efficient synchronization of phases (phase lock) of oscillators, which had small initial amplitudes and random phases. The exchange of energy between the system of linear oscillators and the field is significant, which is typical for the so-called pendulum oscillations. It is very effective, almost all wave energy converted to the energy of oscillatory motion, while the variation of the phases of oscillators is very small. The main wave's phase jump which occurs when the wave's amplitude significantly decreases sharply translates the system from the absorption to the radiation mode.

Introduction of the relativity effects leads to a nonlinear term in the equations for the phases of oscillators. This nonlinearity leads to a phase mismatch that reduces the efficiency of transmission of wave energy to the oscillators. The minimum wave amplitude, in this case, is not so small, which leads to a smoother "transfer" of the captured phases of

oscillators from the absorption zone to the zone of radiation at the wave's frequency. However, even a significant nonlinearity of this kind does not lead to strong changes in the nature of pendulum oscillations in the regime of synchronization by a large field.

#### REFERENCES

1. Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mehaniki* [Mathematical Methods of Classical Mechanics.]. - M.: Nauka, 1979. – 432p. (in Russian)
2. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurts Yu. *Sinhronizatsiya. Fundamentalnoe nelineinoe yavlenie* [Synchronization. A fundamental nonlinear phenomenon.]. – M.: Tehnosfera, 2003. – 508p. (in Russian)
3. Osipov G.V., Polovinkin A.V. *Sinhronizatsiya vneshnim periodicheskim vozdeistviem* [Synchronization with external periodic impact]. – N.Novgorod: NNGU, 2005. - 78p. (in Russian)
4. Anishenko B.S., Astahov V.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., *Sinhronizatsiya reguliarnykh, hartichezkiy i stohasticheskikh kolebaniy* [Synchronization of regular, chaotic and stochastic oscillations.]. – M.-Izhevsk: Institut komputernykh issledovaniy, 2008. – 144 p. (in Russian)
5. Kapitsa P.L. *Mayatnik s vibriruyushchim podvesom* [Pendulum with vibrating suspension] // *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* - 1951. - Vol.44. - P.7 – 20. (in Russian)
6. Chason R. *Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbations* // *Phys. Rev.* - 1995. - Vol. E51. - P.761-76.
7. Il'inskii Yu.A., Maslova N.S. *Classical analog of superradiance in a system of interacting nonlinear oscillators* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1988. – Vol.91. – No.1. – P.171-174.

blank line)

(blank line)

**PACS:** Here you must specify PACS codes

(blank line)

## INSTRUCTIONS FOR PREPARING MANUSCRIPT (TITLE)

(blank line)

**N.N. Author<sup>1</sup>, N.N. Co-author(s)<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Affiliation*

<sup>2</sup>*Affiliation (if different from Authors affiliation)*

*e-mail: [corresponding\\_authors@mail.com](mailto:corresponding_authors@mail.com)*

Received January 14, 2016

(blank line)

Each paper must begin with an abstract. The abstract should be typed in the same manner as the body text (see below). Please note that these Instructions are typed just like the manuscripts should be. The abstract must have at least 1000 phonetic symbols, supplying general information about the achievements, and objectives of the paper, experimental technique, methods applied, significant results and conclusions. Page layout: the text should be printed on the paper A4 format, at least 3 pages, with margins of: Top - 3, Bottom, Left and Right - 2 cm. The abstract should be presented in English (only for foreign authors), Ukraine and Russian.

**KEYWORDS:** there, must, be, at least, 5 keywords

(blank line)

This is introduction section. This paper contains instructions for preparing the manuscripts. The text should be prepared in .doc format (using MS Word).

(blank line)

### INSTRUCTIONS

The text should be typed as follows:

- title: Times New Roman, 12 pt, ALL CAPS, bold, 1 spacing, centered;
- authors: name, initials and family names; Times New Roman, 12 pt, bold, 1 spacing, centered;
- affiliation(s): Times New Roman, 9 pt, italic, 1 spacing, centered;
- abstract: Times New Roman, 9 pt, 1 spacing, justified;
- body text: Times New Roman, 10 pt, 1 spacing, justified; paragraphs in sections should be indented right (tabulated) for 0.75 cm;
- section titles: Times New Roman, 10 pt, bold, 1 spacing, centered, without numbering, one line should be left, blank above section title;
- subsection titles: Times New Roman, 10 pt, bold, 1 spacing, centered, without numbering in accordance to the section (see below), one line should be left blank above subsection title;
- figure captions: width of the figure should be 85 or 170 mm, figures should be numbered (Fig. 1) and titled below figures using sentence format, Times New Roman, 9 pt, 1 spacing, centered (if one line) or justified (if more than one line); one line should be left blank below figure captions;
- table captions: width of the table should be 85 or 170 mm, tables should be numbered (Table 1.) and titled above tables using sentence format, Times New Roman, 10 pt, 1 spacing, centered (if one line) or justified (if more than one line), tables should be formatted with a single-line box around the outside border and single ruling lines between rows and columns; one line should be left blank below tables;
- equations: place equations centered, numbered in Arabic (1), flush right, equations should be specially prepared in MathType; one line should be left blank below and above equation.

(blank line)

### Additional instructions

Numerated figures and tables should be embedded in your text and placed after they are cited. Only black and white drawings and sharp photographs are acceptable. Letters in the figures should be 3 mm high. The figures should be presented in one of the following graphic formats: jpg, gif, pcx, bmp, tif.

(blank line)

### REFERENCES

Titles of journals, articles and author names in references should be given in Roman script. References should be numbered in the order of referring in the text, e.g. [1], [2-5], etc. Do not superscript your reference numbers. Cite references as in journal format. The full references should be listed in numerical order of citation in the text at the end of the paper (justified), Times New Roman, 9 pt, 1 spacing. References should be given in the following form:

#### *Journals*

1. Holzwarth G., Eckart G. Fluid-dynamical approximation for finite Fermi systems // Nucl. Phys. - 1979. - Vol. A325. - P.1-30.

#### *Books*

2. Bertsch G.F., Broglia R.A. Oscillations in finite quantum systems. Ch. 6. - Cambridge: Cambridge University, 1994. - 150 p.

#### *Chapters*

3. Van der Woude A. The electric giant resonances // Electric and magnetic giant resonances in nuclei / Ed. by J. Speth. - Singapore: World Scientific P.C., 1991. - P. 99-232.

#### *Conference or symposium proceedings*

4. Smolanzuk R., Skalski J., Sobiczewski A. Masses and half-life of superheavy elements // Proc. of the International Workshop 24 on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations / Ed. by H. Feldmeier et al. - GSI, Darmstadt, 1996. - P.35-42.

### Special Notes

1. Use International System of Units (SI system).
2. It is undesirable to use acronyms in the titles. Please define the acronym on its first use in the paper.
3. Refer to isotopes as <sup>14</sup>C, <sup>3</sup>H, <sup>60</sup>Co, etc.

Наукове видання

**СХІДНО-ЄВРОПЕЙСЬКИЙ ФІЗИЧНИЙ ЖУРНАЛ**

**Том 4 Номер 1**

**EAST EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS**

**Volume 4 Number 1**

Збірник наукових праць  
англійською, українською, російською мовами

Коректор – Коваленко Т.О.  
Технічний редактор – Гірник С.А.  
Комп'ютерне верстання – Гірник С.А.

Підписано до друку 7.04.2017. Формат 60×84 /8. Папір офсетний.

Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. 13,5. Обл.-вид. арк. 10,8  
Тираж 300 пр. Зам. № Ціна договірна

61022, Харків, майдан Свободи, 4  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Видавництво

Надруковано Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
61022, Харків, майдан Свободи, 4, тел. +380-057-705-24-32  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09