East Eur. J. Phys. Vol.4 No.2 (2017) 29-36 DOI:10.26565/2312-4334-2017-2-04

**PACS:** 63.20.-e, 63.20.Ry, 05.30.Jp

# DYNAMICS OF BOSE-EINSTEIN CONDENSATE WITH ACCOUNT OF PAIR CORRELATIONS

**Yu.M. Poluektov[1,2], A.M. Arslanaliev[2]**
[1]*National Science Center "Kharkov Institute of Physics and Technology"*
*1, Akademicheskaya Str., 61108 Kharkov, Ukraine*
[2]*Kharkov V.N. Karazin National University*
*Sq. Svobody 4, Kharkov, 61022, Ukraine*
*e-mail:yuripoluektov@kipt.kharkov.ua*
Received March 27, 2017

It is shown that for the system of Bose particles it can be obtained the chain of equations for the quasiaverages of the products of field operators, being similar to the Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon chain in the theory of classical gases. For the case when it is sufficient to confine ourselves to taking account of the quasiaverages of only one field operator and the products of two field operators, the closed system of dynamic equations for Bose-Einstein condensate at zero temperature is obtained which accounts for the one-particle condensate and pair correlations. A spatially homogeneous state in the absence of the external field is considered and the spectrum of small oscillations of the condensate in this case with account of pair correlations is explored. It is shown that the spectrum of collective excitations has two branches: the sound wave branch and the branch with an energy gap at zero momentum. The first of the branches approaches the Bogolyubov spectrum at low momenta, and the second branch – at large momenta. It is discussed the possibility of existence of the quasiparticle excitations with an energy gap in the superfluid helium in connection with the experiment on the absorption of microwave radiation.
**KEY WORDS:** Bose-Einstein condensate, anomalous and normal averages, pair correlations, sound branch of elementary excitations, elementary excitations with energy gap

## ДИНАМІКА БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНІВСЬКОГО КОНДЕНСАТУ З УРАХУВАННЯМ ПАРНИХ КОРЕЛЯЦІЙ

**Ю.М. Полуектов[1,2], А.М. Арсланалієв[2]**
[1]*Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут"*
*61108, вул. Академічна, 1, Харків, Україна*
[2]*Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна*
*пл. Свободи, 4, м. Харків, 61022, Україна*
Показано, що в системі бозе-частинок для квазісередніх від добутків польових операторів може бути отримано ланцюжок рівнянь, аналогічний ланцюжку Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона в теорії класичних газів. Для випадку, коли досить обмежитися урахуванням тільки квазісередніх від одного польового оператора і добутків двох операторів, отримано замкнуту систему динамічних рівнянь для бозе-ейнштейнівського конденсату при нульовій температурі, яка враховує одночастинковий конденсат і парні кореляції. Розглянуто просторово-однорідний стан при відсутності зовнішнього поля і досліджений спектр малих коливань конденсату в цьому випадку при урахуванні парних кореляцій. Показано, що спектр колективних збуджень має дві гілки, звукову і гілку з енергетичної щілиною при нульовому імпульсі. Перша з гілок наближається до боголюбовського спектру при малих імпульсах, а друга - при великих. Обговорюється можливість існування квазічастинкових збуджень з енергетичної щілиною у надплинному гелії у зв'язку з експериментом по поглинанню НВЧ випромінювання.
**КЛЮЧОВІ СЛОВА**: бозе-ейнштейнівський конденсат, аномальні і нормальні середні, парні кореляції, звукова гілка елементарних збуджень, елементарні збудження з енергетичною щілиною

## ДИНАМИКА БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА С УЧЕТОМ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

**Ю.М. Полуэктов[1,2] , А.М. Арсланалиев[2]**
[1]*Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"*
*61108, Академическая, 1, Харьков, Украина*
[2]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
*пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*
Показано, что в системе бозе-частиц для квазисредних от произведений полевых операторов может быть получена цепочка уравнений, аналогичная цепочке Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона в теории классических газов. Для случая, когда достаточно ограничиться учетом только квазисредних от одного полевого оператора и произведений двух операторов, получена замкнутая система динамических уравнений для бозе-эйнштейновского конденсата при нулевой температуре, учитывающая одночастичный конденсат и парные корреляции. Рассмотрено пространственно-однородное состояние в отсутствие внешнего поля и исследован спектр малых колебаний конденсата в этом случае при учете парных корреляций. Показано, что спектр коллективных возбуждений имеет две ветви, звуковую и ветвь с энергетической щелью при нулевом импульсе. Первая из ветвей приближается к боголюбовскому спектру при малых импульсах, а вторая – при больших. Обсуждается возможность существования квазичастичных возбуждений с энергетической щелью в сверхтекучем гелии в связи с экспериментом по поглощению СВЧ излучения.
**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** бозе-эйнштейновский конденсат, аномальные и нормальные средние, парные корреляции, звуковая ветвь элементарных возбуждений, элементарные возбуждения с энергетической щелью

Бозе-эйнштейновский конденсат системы малой плотности слабовзаимодействующих бозе-частиц при нулевой температуре обычно описывается уравнением Гросса-Питаевского [1,2], которое широко используется для исследования конденсатов, создаваемых в магнитных и лазерных ловушках [3,4]. Уравнение Гросса-Питаевского получено в приближении самосогласованного поля, которое не учитывает короткодействующие корреляции частиц. В этом приближении система описывается когерентным вектором состояния [5]. Между тем, учет парных корреляций, существенных на малых расстояниях, оказывается важным даже в системах с малой плотностью, поскольку приводит к качественно новым результатам. Так в разреженном газе классических частиц учет парных корреляций позволяет получить интеграл столкновений в кинетическом уравнении и, следовательно, все эффекты, описываемые уравнением Больцмана [6]. Роль парных корреляций в равновесной бозе - системе с конденсатом исследовалась в работе [7].

Целью данной работы было получение системы динамических уравнений для бозе-эйнштейновского конденсата, с учетом, как одночастичных аномальных средних, так и парных корреляций. Показано, что в системе бозе-частиц для квазисредних от произведений полевых операторов может быть получена цепочка уравнений, аналогичная цепочке Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона в теории классических газов. В случае, когда достаточно ограничиться учетом только квазисредних от одного полевого оператора и произведений двух операторов, получена замкнутая система динамических уравнений для бозе-эйнштейновского конденсата при нулевой температуре, учитывающая одночастичный конденсат и парные корреляции. В работе исследованы малые возмущения на фоне пространственно-однородного равновесного состояния. Показано, что при учете парных корреляций в бозе-эйнштейновском конденсате возникают две ветви элементарных возбуждений. Одна из них имеет звуковой закон дисперсии, а у другой ветви в длинноволновом пределе имеется энергетическую щель. Первая из ветвей становится близкой к боголюбовскому спектру при малых импульсах, а вторая – при больших. Обсуждается возможность существования квазичастичных возбуждений с энергетической щелью в сверхтекучем гелии, в связи с экспериментом по поглощению СВЧ излучения.

## УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ ОТ ПОЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Произвольный оператор в гейзенберговском представлении $A(t)=e^{i\frac{H}{\hbar}t}A(0)\exp e^{-i\frac{H}{\hbar}t}$ подчиняется динамическому уравнению

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}=\left[A,H\right], \tag{1}$$

где в представлении вторичного квантования гамильтониан может быть записан в виде суммы операторов кинетической энергии и энергии парного взаимодействия $H=H_1+H_2$, причем

$$\begin{gathered}H_1=\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 H\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\right)\Psi^+\left(\mathbf{r}_1,t\right)\Psi\left(\mathbf{r}_2,t\right),\\ H_2=\frac{1}{2}\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 U\left(\left|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right|\right)\Psi^+\left(\mathbf{r}_1,t\right)\Psi^+\left(\mathbf{r}_2,t\right)\Psi\left(\mathbf{r}_2,t\right)\Psi\left(\mathbf{r}_1,t\right).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь

$$H(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+\left[U_0(\mathbf{r}_1)-\mu\right]\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2), \tag{3}$$

а $m$ - масса бозе-частицы, $U_0(\mathbf{r})$ - энергия во внешнем поле, $U\left(\left|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right|\right)$ - потенциал взаимодействия частиц, $\mu$ - химический потенциал. Полевые операторы подчиняются стандартным коммутационным соотношениям для бозе-частиц. Пусть $\left\langle\Psi\right\rangle$ - это среднее значение полевого оператора. Тогда полевой оператор можем записать, выделив в нем $c$ - числовую и операторную части:

$$\Psi=\left\langle\Psi\right\rangle+\xi, \qquad \Psi^+=\left\langle\Psi\right\rangle^*+\xi^+. \tag{4}$$

Формула (4) является определением операторов $\xi,\xi^+$, которые будем называть надконденсатными. Операторная часть определена так, что для нее выполнены очевидные условия:

$$\left\langle\xi\right\rangle=\left\langle\xi^+\right\rangle=0. \tag{5}$$

Здесь усреднение понимается в смысле квазисредних [8,9] для систем с нарушенной фазовой симметрией. Будем предполагать отличными от нуля как нормальные средние, инвариантные относительно фазового преобразования полевых операторов $\Psi\to\Psi'=e^{i\alpha}\Psi$, так и аномальные средние, где эта инвариантность нарушена. Отметим, что именно с существованием аномальных средних и связано свойство сверхтекучести. Введем следующее обозначение для аномального среднего от полевого оператора:

$$\eta\left(\mathbf{r},t\right)\equiv\left\langle\Psi\left(\mathbf{r},t\right)\right\rangle, \qquad \eta^*\left(\mathbf{r},t\right)\equiv\left\langle\Psi^+\left(\mathbf{r},t\right)\right\rangle. \tag{6}$$

Средние от произведений нескольких полевых операторов могут быть выражены через средние от произведений операторов $\xi, \xi^+$. Например, произведения двух полевых операторов, с учетом (5), имеют вид

$$\begin{gathered}\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle = \eta^*(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}') + \left\langle \xi^+(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')\right\rangle,\\ \left\langle \Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle = \eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}') + \left\langle \xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')\right\rangle,\\ \left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}')\right\rangle = \eta^*(\mathbf{r})\eta^*(\mathbf{r}') + \left\langle \xi^+(\mathbf{r})\xi^+(\mathbf{r}')\right\rangle.\end{gathered} \quad (7)$$

Аналогично могут быть записаны и средние от произведения большего числа полевых операторов. Они будут содержать также средние от большего числа надконденсатных операторов вида $\left\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\right\rangle$, $\left\langle \xi^+(\mathbf{r}_2)\xi^+(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4)\right\rangle$, $\left\langle \xi^+(\mathbf{r}_1)\xi^+(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4)\right\rangle$ и т.д. Полагая последовательно в гейзенберговском уравнении (1) оператор $A$ равным $\Psi$, $\Psi^+\Psi$, $\Psi\Psi$, $\Psi^+\Psi^+, \cdots$ и проводя усреднение, получим связанную бесконечную цепочку уравнений для средних $\langle\Psi\rangle, \langle\Psi^+\Psi\rangle, \langle\Psi\Psi\rangle, \langle\Psi^+\Psi^+\rangle \ldots$. Так уравнение для среднего от полевого оператора (6) имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\eta(\mathbf{r})}{\partial t} = \int H(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\eta(\mathbf{r}'')d\mathbf{r}'' + \int U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)\left\langle \Psi^+(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r})\right\rangle d\mathbf{r}''. \quad (8)$$

а уравнения для нормальных и аномальных парных корреляций записываются в виде

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle}{\partial t} = \int\left[H(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}'')\right\rangle - H^*(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\langle \Psi^+(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle\right]d\mathbf{r}'' - \\ -\int\left[U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|) - U(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\right]\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle d\mathbf{r}'', \end{gathered} \quad (9)$$

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial\left\langle \Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle}{\partial t} = \int\left[H(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\left\langle \Psi(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'')\right\rangle + H(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\left\langle \Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}'')\right\rangle\right]d\mathbf{r}'' + \\ +U(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left\langle \Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle - \int\left[U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|) + U(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\right]\left\langle \Psi^+(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\right\rangle d\mathbf{r}''. \end{gathered} \quad (10)$$

Подобные уравнения могут быть получены и для квазисредних $\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'')\right\rangle$, $\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}''')\right\rangle$, $\left\langle \Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r}'')\Psi(\mathbf{r}''')\right\rangle$, а также квазисредних от произведения большего числа операторов. Таким образом, получим цепочку уравнений, аналогичную известной цепочке Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона в кинетической теории классических газов [6].

В дальнейшем конденсат будем описывать с помощью одночастичных средних (6) и ограничимся учетом только парных корреляций надконденсатных операторов, введенных соотношениями (4), определив следующие корреляционные функции:

$$\begin{gathered} g(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) \equiv \left\langle \xi^+(\mathbf{r},t)\xi(\mathbf{r}',t)\right\rangle, \\ \tau(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) \equiv \left\langle \xi(\mathbf{r},t)\xi(\mathbf{r}',t)\right\rangle, \quad \tau^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \left\langle \xi^+(\mathbf{r},t)\xi^+(\mathbf{r}',t)\right\rangle. \end{gathered} \quad (11)$$

Средними от произведений большего количества надконденсатных операторов будем пренебрегать, что, по-видимому, допустимо в достаточно разреженной системе. Функции (11) обладают очевидными свойствами симметрии:

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = g^*(\mathbf{r}',\mathbf{r},t), \quad \tau(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \tau(\mathbf{r}',\mathbf{r},t), \quad \tau^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \tau^*(\mathbf{r}',\mathbf{r},t). \quad (12)$$

При учете только парных корреляций из (8) - (10) следует замкнутая система уравнений для функций $\eta(\mathbf{r},t)$, $g(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ и $\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$:

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial\eta(\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\eta(\mathbf{r}) + \left[U_0(\mathbf{r}) - \mu\right]\eta(\mathbf{r}) + \\ +\int d\mathbf{r}''U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)\left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2\eta(\mathbf{r}) + \eta^*(\mathbf{r})\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}'')g^*(\mathbf{r},\mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r})g(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'')\right], \end{gathered} \quad (13)$$

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial t} = U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}') + U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \\ -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta+\Delta')\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \left[U_0(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}') - 2\mu\right]\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \\ +\int d\mathbf{r}''U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)\left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \eta(\mathbf{r})\eta^*(\mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\right] + \\ +\int d\mathbf{r}''U(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \eta(\mathbf{r}')\eta^*(\mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}'') + \eta(\mathbf{r}')\eta(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\right], \end{gathered} \quad (14)$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial g(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m}(\Delta-\Delta')g(\mathbf{r},\mathbf{r}')-\left[U_0(\mathbf{r})-U_0(\mathbf{r}')\right]g(\mathbf{r},\mathbf{r}')- \\
&-\int d\mathbf{r}''U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)\left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 g(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\eta^*(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')+\eta^*(\mathbf{r})\eta^*(\mathbf{r}'')\tau(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\right]+ \\
&+\int d\mathbf{r}''U(|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|)\left[|\eta(\mathbf{r}'')|^2 g(\mathbf{r},\mathbf{r}')+\eta(\mathbf{r}')\eta^*(\mathbf{r}'')g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')+\eta(\mathbf{r}')\eta(\mathbf{r}'')\tau^*(\mathbf{r}'',\mathbf{r})\right].
\end{aligned} \tag{15}
$$

Отметим, что для данной системы уравнений выполняется условие инвариантности относительно операции обращения времени, поскольку наряду с решениями $\eta(\mathbf{r},t)$, $\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$, $g(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ она также имеет решения $\eta^*(\mathbf{r},-t)$, $\tau^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',-t)$, $g^*(\mathbf{r},\mathbf{r}',-t)$. В пренебрежении парными корреляциями $\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$ и $g(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$ уравнение (13) принимает вид уравнения Гросса-Питаевского [1,2]. В дальнейшем, где это не вызовет недоразумения, как и в уравнениях (13) – (15), для краткости не будем явно указывать зависимость средних от времени.

Среднее оператора полного числа частиц $N$ дается формулой

$$
\langle N\rangle = \int\left[\eta^*(\mathbf{r},t)\eta(\mathbf{r},t)+g(\mathbf{r},\mathbf{r},t)\right]d\mathbf{r}, \tag{16}
$$

а плотность числа частиц есть, очевидно $n(\mathbf{r},t)=\eta^*(\mathbf{r},t)\eta(\mathbf{r},t)+g(\mathbf{r},\mathbf{r},t)$.

## ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Уравнения (13) – (15) являются интегро-дифференциальными. При изучении состояний, медленно изменяющихся на масштабах, сравнимых с характерным радиусом действия потенциала межчастичного взаимодействия $U(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$, можем перейти к дифференциальным уравнениям. Парные корреляционные функции (11) зависят от двух координат $\mathbf{r},\mathbf{r}'$. Удобно перейти к новым координатам $\vec{\rho}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ и $\mathbf{R}=(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$, тогда

$$
\tau(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\tau\left(\mathbf{R}+\frac{\vec{\rho}}{2},\mathbf{R}-\frac{\vec{\rho}}{2}\right)\equiv\tau(\mathbf{R},\vec{\rho}) \text{ и } g(\mathbf{r},\mathbf{r}')=g\left(\mathbf{R}+\frac{\vec{\rho}}{2},\mathbf{R}-\frac{\vec{\rho}}{2}\right)\equiv g(\mathbf{R},\vec{\rho}). \tag{17}
$$

От координаты центра масс пары $\mathbf{R}$ эти функции изменяются слабо на расстоянии действия межчастичного потенциала $r_0$. Корреляционные функции можно представить в виде

$$
\tau(\mathbf{R},\vec{\rho})=\sum_{\mathbf{k}}\tau_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})e^{i\mathbf{k}\vec{\rho}}, \qquad g(\mathbf{R},\vec{\rho})=\sum_{\mathbf{k}}g_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})e^{i\mathbf{k}\vec{\rho}}. \tag{18}
$$

В дальнейшем в этих суммах будем учитывать только слагаемое с $\mathbf{k}=0$. Это означает, что вместо точных функций $\tau(\mathbf{R},\vec{\rho}), g(\mathbf{R},\vec{\rho})$ будем пользоваться функциями, усредненными по макроскопическому объему $V_0\sim L^3$, где $L>>r_0$:

$$
\tau_0(\mathbf{R})\approx V_0^{-1}\int\tau(\mathbf{R},\vec{\rho})d\vec{\rho}, \quad g_0(\mathbf{R})\approx V_0^{-1}\int g(\mathbf{R},\vec{\rho})d\vec{\rho}. \tag{19}
$$

Такое приближение допустимо, если рассматриваются возмущения на пространственных масштабах, существенно превосходящих радиус действия межчастичного потенциала.

Следует отметить, что в полученных уравнениях существенную роль играет поведение потенциала межчастичного взаимодействия на малых расстояниях. Вид потенциала здесь известен плохо. Более того, во многих модельных потенциалах таких как, например, потенциал Леннард-Джонса, предполагается, что на малых расстояниях он стремится к бесконечности. Отметим, что использование модельных потенциалов, которые стремятся к бесконечности на малых расстояниях, приводит к значительным трудностям, поскольку у таких потенциалов отсутствует их Фурье-образ. Между тем, требование «непроницаемости» атомов при как угодно высоких давлениях, которое выполняется в этом случае, является излишне жестким, поскольку должно существовать давление, при котором атом будет «раздавлен» и перестанет существовать как отдельная структурная единица. Поэтому, на наш взгляд, физически обоснованным и естественным является использование потенциалов, принимающих конечное значение на малых расстояниях. Заметим также, что и квантово-химические расчеты дают потенциалы с конечным, хотя и большим, значением в нуле [10,11].

В этом локальном приближении система уравнений (13) - (15) принимает вид

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\eta(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\eta(\mathbf{r})+\left[U_0(\mathbf{r})-\mu\right]\eta(\mathbf{r})+ \\
&+U_0\left[|\eta(\mathbf{r})|^2\eta(\mathbf{r})+\eta^*(\mathbf{r})\tau(\mathbf{r})+2\eta(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\right],
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\tau(\mathbf{r})}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{4m}\Delta\tau(\mathbf{r})+U(0)\eta^2(\mathbf{r})+\left[U(0)+2U_0(\mathbf{r})-2\mu\right]\tau(\mathbf{r})- \\
&+U_0\left[4|\eta(\mathbf{r})|^2\tau(\mathbf{r})+2\eta^2(\mathbf{r})g(\mathbf{r})\right],
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$i\hbar\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial t}=-U_0\left[\eta^{*2}(\mathbf{r})\tau(\mathbf{r})-\eta^2(\mathbf{r})\tau^*(\mathbf{r})\right]. \tag{22}$$

Здесь мы воспользовались обозначениями: $\tau_0(\mathbf{R})\to\tau(\mathbf{r})$, $g_0(\mathbf{R})\to g(\mathbf{r})$, $U_0=\int U(\mathbf{r})d\mathbf{r}$. Поскольку потенциальная энергия взаимодействия атомов на малых расстояниях $U(0)$ известна плохо, то она будет рассматриваться как феноменологический подгоночный параметр. Для конкретных расчетов будем использовать простой модельный потенциал «полупрозрачной сферы»:

$$U(\mathbf{r})=\begin{cases} u, & r<r_0, \\ 0, & r>r_0. \end{cases}. \tag{23}$$

Параметр $u$ предполагается положительным. В этом случае $U(0)=u$, $U_0=u\upsilon$, где $\upsilon\equiv 4\pi r_0^3/3$ - «объем атома». Потенциал (23) использовался и ранее при анализе бозе-систем (см., например, [12]). В дальнейшем будем анализировать систему уравнений (20) - (22) и для оценок пользоваться потенциалом (23).

## РАВНОВЕСНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим равновесное состояние пространственно-однородной системы в отсутствие внешнего поля. В этом случае величины $\eta(\mathbf{r})\equiv\eta$, $\tau(\mathbf{r})\equiv\tau$, $g(\mathbf{r})\equiv g$ не зависят от координат и времени. При достаточно слабом взаимодействии при нулевой температуре большинство частиц находится в одночастичном конденсате [13,14], поэтому будем полагать равновесную нормальную корреляционную функцию $g=0$, так что равновесная плотность числа частиц $n=|\eta|^2$. Тогда, в отсутствие внешнего поля, из (20) - (22) следуют уравнения, определяющие равновесное состояние:

$$-\mu\eta+U_0\left[|\eta|^2\eta+\eta^*\tau\right]=0. \tag{24}$$

$$U(0)\eta^2+\left[U(0)-2\mu+4U_0|\eta|^2\right]\tau=0 \tag{25}$$

$$\eta^{*2}\tau-\eta^2\tau^*=0 \tag{26}$$

Запишем комплексные величины, выделив в них модуль и фазу: $\eta=\eta_0 e^{i\alpha}$, $\tau=\tau_0 e^{i\beta}$. Из (26) следует, что $\sin(2\alpha-\beta)=0$. Таким образом, имеется две возможности $2\alpha-\beta=0$ или $2\alpha-\beta=\pi$. Следует выбрать вторую возможность, поскольку только в этом случае уравнения (24), (25) имеют физически корректные решения:

$$\eta_0\left[\mu-U_0\left(\eta_0^2-\tau_0\right)\right]=0, \tag{27}$$

$$U(0)\eta_0^2-\left[U(0)+4U_0\eta_0^2-2\mu\right]\tau_0=0. \tag{28}$$

При таком выборе фазы $\tau=-\tau_0 e^{2i\alpha}$. Исключив из этих уравнений химический потенциал, получаем

$$\left[U(0)-2U_0\tau_0\right]\eta_0^2-\left[U(0)+2U_0\tau_0\right]\tau_0=0. \tag{29}$$

Заметим, что не существует решения системы уравнений (27), (28), когда существовал бы только одночастичный конденсат $\eta_0^2\neq 0$, а парный конденсат отсутствовал $\tau_0=0$. На эту особенность бозе-систем ранее уже обращалось внимание [15]. Следует также иметь ввиду, что в системах с бозе-эйнштейновским конденсатом зависимость макроскопических величин от потенциала взаимодействия является, вообще говоря, неаналитической и предельный переход по постоянной взаимодействия $U_0\to 0$ в таких системах, как, например, и в сверхпроводниках, является некорректным. Более детально этот вопрос обсуждается в работе одного из авторов [16]. Из (29) следует связь между плотностью и парной корреляцией

$$n\equiv\eta_0^2=\frac{1+2\upsilon\tau_0}{1-2\upsilon\tau_0}\tau_0. \tag{30}$$

Здесь использовано введенное выше для потенциала (23) соотношение $U_0=u\upsilon$, где $\upsilon\equiv 4\pi r_0^3/3$ - «объем атома». Отсюда следует ограничение $\upsilon\tau_0<1/2$. Химический потенциал

$$\mu=4u\upsilon\frac{\upsilon\tau_0^2}{1-2\upsilon\tau_0} \tag{31}$$

оказывается положительным. Зависимость величины парной корреляции от плотности определяется соотношением

$$\tau_0\upsilon=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(n\upsilon+\frac{1}{2}\right)^2+2n\upsilon}-\left(n\upsilon+\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{32}$$

Здесь $n\upsilon = \upsilon/\Omega$, где $\Omega$ - объем, приходящийся на одну частицу. В разреженной системе $\Omega >> \upsilon$ и $n\upsilon << 1$. В этом случае $n \approx \tau_0$.

## СПЕКТР ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Рассмотрим распространение малых возмущений в пространственно-однородной системе. Полагая

$$\eta(\mathbf{r},t) = \eta_0 + \delta\eta(\mathbf{r},t), \quad \tau(\mathbf{r},t) = \tau_0 + \delta\tau(\mathbf{r},t), \quad g(\mathbf{r},t) = \delta g(\mathbf{r},t), \tag{33}$$

получаем из (20) – (22) систему линеаризованных уравнений

$$i\hbar\frac{\partial\delta\eta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\eta + U_0\left[\left(\eta_0^2+\tau_0\right)\delta\eta + \left(\eta_0^2-\tau_0\right)\delta\eta^* + \eta_0\delta\tau + 2\eta_0\delta g\right], \tag{34}$$

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial\delta\tau}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\tau + \left[U(0) + 2U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right)\right]\delta\tau + \\ +2\left[U(0) - 2U_0\tau_0\right]\eta_0\delta\eta - 4U_0\eta_0\tau_0\delta\eta^* + 2U_0\eta_0^2\delta g, \end{gathered} \tag{35}$$

$$i\hbar\frac{\partial\delta g}{\partial t} = -U_0\left[\eta_0^2\left(\delta\tau - \delta\tau^*\right) + 2\eta_0\tau_0\left(\delta\eta - \delta\eta^*\right)\right]. \tag{36}$$

Удобно перейти от комплексных величин $\delta\eta(\mathbf{r},t), \delta\tau(\mathbf{r},t)$ к вещественным переменным:

$$\begin{gathered} \delta\Psi(\mathbf{r},t) = \delta\eta(\mathbf{r},t) + \delta\eta^*(\mathbf{r},t), \qquad \delta\Phi(\mathbf{r},t) = i\left[\delta\eta(\mathbf{r},t) - \delta\eta^*(\mathbf{r},t)\right], \\ \delta\Theta(\mathbf{r},t) = \delta\tau(\mathbf{r},t) + \delta\tau^*(\mathbf{r},t), \qquad \delta\Lambda(\mathbf{r},t) = i\left[\delta\tau(\mathbf{r},t) - \delta\tau^*(\mathbf{r},t)\right]. \end{gathered} \tag{37}$$

В этих переменных система линеаризованных уравнений выглядит так:

$$\hbar\frac{\partial\delta\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\Phi - U_0\left[2\tau_0\delta\Phi + \eta_0\delta\Lambda\right], \tag{38}$$

$$\hbar\frac{\partial\delta\Phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\delta\Psi + U_0\left[2\eta_0^2\delta\Psi + \eta_0\delta\Theta + 4\eta_0\delta g\right], \tag{39}$$

$$\begin{gathered} \hbar\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\Theta + \left[U(0) + 2U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right)\right]\delta\Theta + \\ +2\left[U(0) - 4U_0\tau_0\right]\eta_0\delta\Psi + 4U_0\eta_0^2\delta g, \end{gathered} \tag{40}$$

$$\hbar\frac{\partial\delta\Theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{4m}\Delta\delta\Lambda - \left[U(0) + 2U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right)\right]\delta\Lambda - 2U(0)\eta_0\delta\Phi\,, \tag{41}$$

$$\hbar\frac{\partial\delta g}{\partial t} = U_0\eta_0\left[2\tau_0\delta\Phi + \eta_0\delta\Lambda\right]. \tag{42}$$

Полагая, что зависимость флуктуаций от координат и времени имеет вид $\sim\exp\left[i\left(\mathbf{kr}-\omega t\right)\right]$, из условия равенства нулю детерминанта полученной однородной системы линейных алгебраических уравнений, приходим к биквадратному уравнению, определяющему законы дисперсии возможных возбуждений:

$$\left(\hbar\omega\right)^4 - A\left(\hbar\omega\right)^2 + B = 0\,. \tag{43}$$

Здесь

$$\begin{gathered} A = \left(\hbar\omega_0\right)^2 + a_1\varepsilon_k + \frac{5}{4}\varepsilon_k^2, \\ B = b_1\varepsilon_k + b_2\varepsilon_k^2 + b_3\varepsilon_k^3 + \frac{\varepsilon_k^4}{4}, \end{gathered} \tag{44}$$

причем $\varepsilon_k = \hbar^2k^2/2m$ - энергия свободной частицы. Коэффициенты в (44) имеют вид

$$\begin{gathered} a_1 = U(0) + 4U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right), \\ b_1 = 4U_0^2\eta_0^2\left[U(0)\left(3\eta_0^2+2\tau_0\right) + 7U_0\tau_0^2\right], \\ b_2 = U^2(0) + 5U_0U(0)\left(\eta_0^2+\tau_0\right) + U_0^2\left(6\tau_0^2 + 4\eta_0^4 + 17\tau_0\eta_0^2\right), \\ b_3 = U(0) + \frac{5}{2}U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right). \end{gathered} \tag{45}$$

Система допускает пространственно-однородные колебания с частотой $\omega_0$, определяемой формулой

$$\left(\hbar\omega_0\right)^2 = U^2(0) + 6U_0U(0)\left(\eta_0^2+\tau_0\right) + 8U_0^2\tau_0^2\,. \tag{46}$$

Зависимость этой частоты от плотности, определенная с учетом соотношения (32) показана на рис. 1 (кривая 1).

Биквадратное уравнение (43) имеет два решения, определяющие две ветви возбуждений:

$$\left(\hbar\omega_{\pm}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[A \pm \sqrt{A^2 - 4B}\,\right]. \quad (47)$$

Решение $\omega_{-}$ при малых волновых числах дает звуковую ветвь $\omega_{-}^2 = c^2k^2$, где квадрат скорости звука определяется формулой:

$$c^2 = \frac{2U_0^2\eta_0^2\left[U(0)\left(3\eta_0^2+\tau_0\right)+7U_0\tau_0^2\right]}{m\left[U^2(0)+6U_0U(0)\left(\eta_0^2+\tau_0\right)+8U_0^2\tau_0^2\right]}. \quad (48)$$

Зависимость скорости звука от плотности показана на рис. 1 (кривая 2).

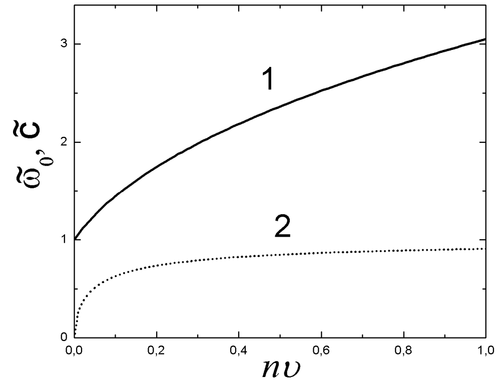


Рис. 1. Зависимости частоты однородных колебаний $\tilde{\omega}_0 = \hbar\omega_0/u$ (кривая 1)
и скорости звука $\tilde{c} \equiv c/c_B$ (кривая 2) от плотности, $c_B \equiv \sqrt{u\upsilon n/m}$.

Решение $\omega_{+}$ отвечает ветви возбуждений с энергетической щелью. При малых $k$ зависимость частоты от волнового числа имеет вид

$$\omega_{+}^2 = \omega_0^2 + \alpha\left(k^2/2m\right), \quad (49)$$

где

$$\alpha = \frac{\left[U^3(0)+10U^2(0)U_0\left(\eta_0^2+\tau_0\right)+4U(0)U_0^2\left(8\tau_0^2+3\eta_0^4+10\eta_0^2\tau_0\right)+4U_0^3\tau_0^2\left(\eta_0^2+8\tau_0\right)\right]}{U^2(0)+6U_0U(0)\left(\eta_0^2+\tau_0\right)+8U_0^2\tau_0^2}. \quad (50)$$

Хотя, строго говоря, рассматриваемые уравнения применимы для длинноволновых возбуждений, но решения (47) дают разумные значения и при больших $k$:

$$\hbar\omega_{+} = \varepsilon_k, \qquad \hbar\omega_{-} = \varepsilon_k/2. \quad (51)$$

Одна из ветвей в коротковолновом пределе переходит в закон дисперсии одной свободной частицы, а другая – в закон дисперсии пары связанных частиц. Ветви элементарных возбуждений в бозе-системе с учетом парных корреляций представлены на рис. 2. На этом же рисунке показан боголюбовский закон дисперсии $\hbar\omega_B = \varepsilon_k\left(\varepsilon_k + 2u\upsilon n\right)$. В длинноволновом пределе боголюбовский закон дисперсии стремится к звуковой ветви $\omega_{-} = ck$, а в пределе коротких волн – к ветви $\omega_{+}$, имеющей энергетическую щель при $k \to 0$.

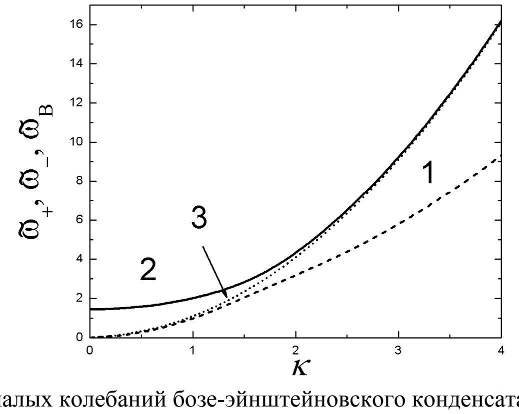


Рис. 2. Законы дисперсии малых колебаний бозе-эйнштейновского конденсата при учете парных корреляций:
1) звуковая ветвь $\tilde{\omega}_{-} = \hbar\omega_{-}/u$; 2) ветвь с энергетической щелью $\tilde{\omega}_{+} = \hbar\omega_{+}/u$; 3) боголюбовский закон дисперсии
$\tilde{\omega}_B = \hbar\omega_B/u$, $\kappa \equiv \hbar k/\sqrt{2mU(0)}$. Расчет выполнен при $n\upsilon = 0{,}1$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что в бозе- системе для квазисредних от произведений полевых операторов может быть найдена цепочка уравнений, аналогичная цепочке Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона в теории классических газов. При учете только квазисредних от одного полевого оператора и произведений двух операторов, получена замкнутая система динамических уравнений для бозе-эйнштейновского конденсата при нулевой температуре, учитывающая одночастичный конденсат и парные корреляции. Полученная система дифференциальных уравнений (20) - (22), описывает динамику бозе-эйнштейновского конденсата и обобщает уравнение Гросса-Питаевского с учетом короткодействующих парных корреляций. Исследован спектр малых колебаний в пространственно-однородной однородной системе. Показано, что имеется две ветви элементарных возбуждений: одна со звуковым законом дисперсии в пределе длинных волн, а вторая, имеет в этом пределе энергетическую щель.

Следует отметить, что вопрос о возможности существования в бозе-системах возбуждений с энергетической щелью имеет давнюю историю и обсуждался во многих работах (см., например, [17-22]). На возможность существования в дополнение к фононной ветви спектра другой ветви, имеющей энергетическую щель, на качественном уровне обращено внимание в книге [14, с. 322].

В экспериментальной работе [23] обнаружено поглощение СВЧ излучения в сверхтекучем гелии на частоте около 180 ГГц. В работе [24] было высказано предположение, что это поглощение обязано существованию в сверхтекучем гелии возбуждений с энергетической щелью. Полученный в данной работе результат, демонстрирующий существование двух ветвей элементарных возбуждений, одна из которых звуковая, а другая имеет энергетическую щель, можно рассматривать как подтверждение качественных аргументов в пользу модификации энергетического спектра в сверхтекучем гелии, которые были сформулированы в работе [24].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gross E.P. Structure of a quantized vortex in boson system // Nuovo Cimento. – 1961. – Vol. 20 – P. 454-477.
2. Pitaevskii L. Vortex lines in an imperfect Bose gas // Sov. Phys. JETP. – 1961 – Vol. 13. – P. 451-454.
3. Pitaevskii L., Stringari S. Bose-Einstein condensation. – Oxford University Press USA, 2003.
4. Pethick C.H., Smith H. Bose-Einstein condensation in dilute gases. – Cambridge University Press, 2001.
5. Poluektov Yu.M. The polarization properties of an atomic gas in a coherent state // Low Temp. Phys. – 2011 – Vol. 37. – No.12. – P. 986; [FNT. – 2011 – Vol. 37. – No.12. – P. 1239-1257].
6. Bogolyubov N.N. Problems of dynamic theory in statistical physics / Selected works in three volumes. – Kiev: Naukova Dumka. – 1970. – Vol. 2. – P. 522.
7. Peletminskii A.S., Peletminskii S.V., Poluektov Yu.M. Role of single-particle and pair condensates in Bose systems with arbitrary intensity of interaction // Condensed Matter Physics, 2013, vol. 16, No. 1, 13603. arXiv:1303.5539 [cond-mat.stat-mech].
8. Bogolyubov N.N. Quasiaverages in problems of statistical mechanic / Selected works in three volumes. – Kiev: Naukova Dumka. – 1971. – Vol. 3. – P. 488.
9. Poluektov Yu.M. On self-consistent determination of the quasi-average in statistical physics // Low Temp. Phys. – 1997 – Vol. 23. – No.9. – P. 685; [FNT. – 1997 – Vol. 23. – No.9. – P. 915-922].
10. Aziz R.A., Slaman. M.J. An examination of ab initio result for the helium potential energy curve // J. Chem. Phys. – 1991 – Vol. 94. – P. 8047.
11. Anderson J.B., Traynor C.A., Boghosian B.M. An exact quantum Monte Carlo calculation of the helium-helium intermolecular potential // J. Chem. Phys. – 1993 – Vol. 99 – P. 345.
12. Brueckner K. A. Theory of nuclear structure. The many body problem. – London: Methuen a.o., 1959.
13. Bogolyubov N.N. On the theory of superfluidity // J. Phys. USSR – 1946 – Vol. 11 – P. 23-32.; [Izv. AN SSSR, Ser. Fiz – 1947 – Vol. 11. – No. 1. – P. 77-90.]
14. Bogolyubov N.N., Bogolyubov N.N. (Jr). Introduction to quantum statistical mechanics. – Moscow: Nauka, 1984. – 384p.
15. Poluektov Yu.M. Pro kvantovopol'ovyi opys bagatochastynkovych Boze-system zi spontanno porushenymy symetriyamy [About quantum field description of many particle Bose - systems with spontaneously broken symmetry] // UFZh. – 2007. – Vol. 52. – No.6. – P. 578-594 [arXiv.org cond-mat arXiv: 1306.2103]. (in Ukrainian)
16. Poluektov Yu.M. A simple model of Bose–Einstein condensation of interacting particles // JLTP. – 2017 – Vol. 186. – No.5-6. – P. 347-362.
17. Bijl A. The lowest wave function of the symmetrical many particles system // Physica – 1940 – Vol. 7 – P.869-886.
18. Girardeau M., Arnowitt R. Theory of many-boson system: pair theory // Phys. Rev. – 1959. – Vol.113. – No.3. – P. 755-761.
19. Wentzel G. Thermodynamically equivalent Hamiltonian for some many-body problems // Phys. Rev. – 1960. – Vol.120. – No. 5. – P. 1572-1575.
20. Luban M. Statistical mechanics of a nonideal boson gas: pair Hamiltonian model // Phys. Rev. – 1962. – Vol.128 – No.2. – P. 965-987.
21. Tolmachev V.V. Temperature elementary excitations in a non-ideal Bose-Einstein system // DAN SSSR – 1960 – Vol.135 – No. 4. – P. 825-828. (in Russian)
22. Poluektov Yu.M. Self-consistent field model for spatially inhomogeneous Bose systems // Low Temperature Physics. – 2002. – Vol. 28. – No.6. – P. 429-441; [FNT – 2002. – Vol. 28. – No.6. – P. 604-620].
23. Rybalko A., Rubets S., Rudavskii E., Tikhiy V., Tarapov S., Golovashchenko R., Derkach V. Resonance absorption of microwaves in HeII: Evidence for roton emission // Phys. Rev. B. – 2007. – Vol.76. – P.140503.
24. Poluektov Yu.M. Absorption of electromagnetic field energy by the superfluid system of atoms with a dipole moment // Low Temperature Physics. – 2014. – Vol. 40. – No.5. – P. 389; [FNT – 2014. – Vol. 40. – No.5 – P. 503-512].