Let us write the external force $\vec{F}_0$ in the complex form

$$\vec{F}_0 = \vec{i}\,\frac{f_0}{2}e^{i\varphi_2} + \vec{j}\,\frac{f_0}{2}e^{i\varphi_1} + c.c. \tag{85}$$

Then all operators in formulae (81)-(84) act from the left on their eigenfunction:

$$\widehat{D}_{W,T,\varphi}e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_1}\widehat{D}_{W,T,\varphi}(\vec{k}_0,-\omega_0) = e^{i\varphi_1}\widehat{D}^{*}_{W_1,T_1,\varphi_1},\ \widehat{D}_{W,T,\varphi}e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_2}\widehat{D}_{W,T,\varphi}(\vec{k}_0,-\omega_0) = e^{i\varphi_2}\widehat{D}^{*}_{W_2,T_2,\varphi_2},$$

$$\Delta e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_1}\Delta(\vec{k}_0,-\omega_0) = e^{i\varphi_1}\Delta_1^*,\quad \Delta e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_2}\Delta(\vec{k}_0,-\omega_0) = e^{i\varphi_2}\Delta_2^*, \tag{86}$$

where the new notation is introduced

$$\widehat{D}^{*}_{W_1} = k_0^2 - i\,\mathrm{Pr}^{-1}(\omega_0 - k_0W_1),\quad \widehat{D}^{*}_{W_2} = k_0^2 - i\,\mathrm{Pr}^{-1}(\omega_0 - k_0W_2),\quad W_1 = W_{-1}^x,\quad W_2 = W_{-1}^y,$$

$$\widehat{D}^{*}_{T_1} = k_0^2 - i(\omega_0 - k_0W_1),\quad \widehat{D}^{*}_{T_2} = k_0^2 - i(\omega_0 - k_0W_2),$$

$$\widehat{D}^{*}_{\varphi_1} = L_e^{-1}k_0^2 - i(\omega_0 - k_0W_1),\quad \widehat{D}^{*}_{\varphi_2} = L_e^{-1}k_0^2 - i(\omega_0 - k_0W_2).$$

$$\Delta_1^* = \widehat{D}^{*}_{W_1}\left(\widehat{D}^{*}_{W_1}\widehat{A}_1^* + D_1^2\right),\quad \Delta_2^* = \widehat{D}^{*}_{W_2}\left(\widehat{D}^{*}_{W_2}\widehat{A}_2^* + D_2^2\right),$$

$$\widehat{A}^*_{1,2} = \widehat{D}^{*}_{W_{1,2}} - \widetilde{R}_n\cdot\frac{\widehat{D}^{*}_{T_{1,2}} + \dfrac{N_A}{L_e}k_0^2}{\widehat{L}_{1,2}} - \frac{\widetilde{Ra}}{\widehat{D}^{*}_{T_{1,2}}}$$

Here and below, we denote the complex-conjugate quantities by an asterisk. When performing the subsequent calculations, some of the components in the tensors $\widehat{d}_{ij}$ become zero. Taking this fact into account, velocity fields of the zero approximation has the following form:

$$u_0 = \frac{f_0}{2}\frac{\widehat{A}_2^*}{\widehat{A}_2^*\widehat{D}^{*}_{W_2} + D_2^2}e^{i\varphi_2} + c.c. = u_{03} + u_{04} \tag{87}$$

$$v_0 = \frac{f_0}{2}\frac{\widehat{D}_1^*}{\widehat{A}_1^*\widehat{D}^{*}_{W_1} + D_1^2}e^{i\varphi_1} + c.c. = v_{01} + v_{02} \tag{88}$$

$$w_0 = -\frac{f_0}{2}\frac{D_1}{\widehat{A}_1^*\widehat{D}^{*}_{W_1} + D_1^2}e^{i\varphi_1} + \frac{f_0}{2}\frac{D_2}{\widehat{A}_2^*\widehat{D}^{*}_{W_2} + D_2^2}e^{i\varphi_2} + c.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04} \tag{89}$$

It is easy to see that the component of the rotation parameter $D_3$ also drops out.

### C. CALCULATION OF THE REYNOLDS STRESSES

To close the system of equations (31)-(32) that describe the evolution of the large-scale velocity fields $\vec{W}_{-1}$, it is necessary to calculate the following correlators:

$$T^{31} = \overline{w_0u_0} = \overline{w_{01}(u_{01})^*} + \overline{(w_{01})^*u_{01}} + \overline{w_{03}(u_{03})^*} + \overline{(w_{03})^*u_{03}} \tag{90}$$

$$T^{32} = \overline{w_0v_0} = \overline{w_{01}(v_{01})^*} + \overline{(w_{01})^*v_{01}} + \overline{w_{03}(v_{03})^*} + \overline{(w_{03})^*v_{03}} \tag{91}$$

Substituting the solutions for the small-scale velocity fields (87)-(89) obtained in **Appendix B**, into the equations (90)-(91), we can find the following expression for the correlators:

$$T^{31}=\frac{f_0^2}{4}\frac{D_2(\widehat{A}_2+\widehat{A}_2^*)}{\left|\widehat{A}_2\widehat{D}_{W_2}+D_2^2\right|^2} \tag{92}$$

$$T^{32}=-\frac{f_0^2}{4}\frac{D_1(\widehat{A}_1+\widehat{A}_1^*)}{\left|\widehat{A}_1\widehat{D}_{W_1}+D_1^2\right|^2} \tag{93}$$

Then with the definition of the operators $\widehat{D}_{W_{1,2}}$ and $\widehat{A}_{1,2}$, we can write down the series of useful relations for the calculation of $T^{31}$ and $T^{32}$:

$$\left|\widehat{D}_{W_{1,2}}\right|^2=\widehat{D}_{W_{1,2}}\widehat{D}^*_{W_{1,2}}=k_0^4+\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2,\quad \left|\widehat{D}_{T_{1,2}}\right|^2=\widehat{D}_{T_{1,2}}\widehat{D}^*_{T_{1,2}}=k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2,$$

$$\left|\widehat{D}_{\varphi_{1,2}}\right|^2=\widehat{D}_{\varphi_{1,2}}\widehat{D}^*_{\varphi_{1,2}}=L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2,\quad \widetilde{\omega}_{1,2}=\omega_0-k_0W_{1,2}$$

$$\left|\widehat{A}_{1,2}\right|^2=\widehat{A}_{1,2}\widehat{A}_{1,2}^*=k_0^4+\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2-2\widetilde{Ra}\cdot\frac{k_0^4-\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}+\frac{\widetilde{Ra}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}+r_{n_{1,2}},$$

$$r_{n_{1,2}}=-2\widetilde{R}_n\cdot\frac{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-1}k_0^4-\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2)+\dfrac{N_A}{L_e}k_0^2(L_e^{-1}k_0^2-\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2k_0^2-\widetilde{\omega}_{1,2}^2k_0^2(1+\mathrm{Pr}^{-1}L_e^{-1}))}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)}+$$

$$+\widetilde{R}_n^2\cdot\frac{k_0^4\left(1+\dfrac{2N_A}{L_e}+\dfrac{N_A^2}{L_e^2}\right)+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)}+2\widetilde{R}_n\widetilde{Ra}\cdot\frac{\widetilde{\omega}_{1,2}^2+k_0^2L_e^{-1}\left(1+\dfrac{N_A}{L_e}\right)}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)},$$

$$\widehat{D}_{W_{1,2}}\widehat{A}_{1,2}+\widehat{D}^*_{W_{1,2}}\widehat{A}^*_{1,2}=2(k_0^4-\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2)-2\widetilde{Ra}\cdot\frac{k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}-$$

$$-2\widetilde{R}_n\cdot\frac{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-1}k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2)+\dfrac{N_A}{L_e}k_0^4(L_e^{-1}k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2+\widetilde{\omega}_{1,2}^2(\mathrm{Pr}^{-1}L_e^{-1}-1))}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)}.$$

Using these relations, we can obtain the following expressions:

$$\widehat{A}_{1,2}+\widehat{A}_{1,2}^*=2\left(k_0^2-\frac{\widetilde{Ra}k_0^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}-\widetilde{R}_n\cdot\frac{L_e^{-1}k_0^2+\dfrac{N_A}{L_e}(L_e^{-1}k_0^4-\widetilde{\omega}_{1,2}^2)}{L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}\right),$$

$$\left|\widehat{D}_{W_{1,2}}\widehat{A}_{1,2}+D_{1,2}^2\right|^2= \tag{94}$$

$$=\left(k_0^4+\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2\right)\left(k_0^4+\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2+\frac{\widetilde{Ra}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}-2\widetilde{Ra}\cdot\frac{k_0^4-\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}+r_{n_{1,2}}\right)+$$

$$+2D_{1,2}^2\left(k_0^4-\mathrm{Pr}^{-2}\widetilde{\omega}_{1,2}^2-\widetilde{Ra}\cdot\frac{k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}+p_{n_{1,2}}\right)+D_{1,2}^4,$$

$$p_{n_{1,2}}=-\widetilde{R}_n\cdot\frac{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-1}k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2)+\dfrac{N_A}{L_e}k_0^4(L_e^{-1}k_0^4+\mathrm{Pr}^{-1}\widetilde{\omega}_{1,2}^2+\widetilde{\omega}_{1,2}^2(\mathrm{Pr}^{-1}L_e^{-1}-1))}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)(L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)}.$$

Substituting (94) in (92)-(93) we can find expressions for the Reynolds stresses in the general form:

$$T^{31}=\frac{f_0^2}{2}\frac{D_2k_0^2(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2-\widetilde{Ra}-l_{n_2})}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2)\Lambda_2},\tag{95}$$

$$T^{32}=-\frac{f_0^2}{2}\frac{D_1k_0^2(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2-\widetilde{Ra}-l_{n_1})}{(k_0^4+\widetilde{\omega}_1^2)\Lambda_1},$$

where $\Lambda_{1,2}=\left|\widehat{D}_{W_{1,2}}\widehat{A}_{1,2}+D_{1,2}^2\right|^2$. Expressions for $l_{n_{1,2}}$ are:

$$l_{n_{1,2}}=\widetilde{R}_n\cdot\frac{L_e^{-1}+\frac{N_A}{L_e}\left(k_0^2L_e^{-1}-\frac{\widetilde{\omega}_{1,2}^2}{k_0^2}\right)}{L_e^{-2}k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2}\cdot(k_0^4+\widetilde{\omega}_{1,2}^2)\,.$$

If the Prandtl number of the nanofluid is approximately equal to one $Pr=1$, then the expressions for the components of the Reynolds stresses are simplified:

$$T^{31}=\frac{f_0^2D_2k_0^2(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2-\widetilde{Ra}-l_{n_2})}{2(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2)((k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2)^2+2(D_2^2-\widetilde{Ra})(k_0^4-\widetilde{\omega}_2^2)+(D_2^2-\widetilde{Ra})^2+r_{n_2}(k_0^4+\widetilde{\omega}_2^2)+2p_{n_2}D_2^2)},\tag{96}$$

$$T^{32}=-\frac{f_0^2D_1k_0^2(k_0^4+\widetilde{\omega}_1^2-\widetilde{Ra}-l_{n_1})}{2(k_0^4+\widetilde{\omega}_1^2)((k_0^4+\widetilde{\omega}_1^2)^2+2(D_1^2-\widetilde{Ra})(k_0^4-\widetilde{\omega}_1^2)+(D_1^2-\widetilde{Ra})^2+r_{n_1}(k_0^4+\widetilde{\omega}_1^2)+2p_{n_1}D_1^2)}.\tag{97}$$

Here the values of the coefficients $r_{n_{1,2}}$ and $p_{n_{1,2}}$ are taken with $Pr=1$.

**ORCID IDs**

**Michael I. Kopp**, https://orcid.org/0000-0001-7457-3272; **Anatoly V. Tur**, https://orcid.org/0000-0002-3889-8130, **Volodymyr V. Yanovsky**, https://orcid.org/0000-0003-0461-749X

**REFERENCES**

[1] S.K. Das, S. U.S Choi, W.Yu, and T. Pradeep, *Nanofluids: science and technology,* (Hoboken, New Jersey, Wiley-Interscience, 2008), pp. 397.
[2] Dhananjay Yadav, G.S. Agrawal, and R. Bhargava, International Journal of Engineering Science, 49, 1171-1184 (2011), https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.07.002
[3] Shilpi Agarwal, and B.S. Bhadauria, Continuum Mech. Thermodyn., 26, 437-445 (2014), https://doi.org/10.1007/s00161-013-0309-6
[4] R. Chand, G.C. Rana, and S. K. Kango, FME Transactions, 43, 62-69 (2015), https://scindeks.ceon.rs/article.aspx?artid=1451-20921501062C
[5] B.L. Smorodin, S.M. Ishutov, and B.I. Myznikova, Microgravity Science and Technology, 30, 95-102 (2018), https://doi.org/10.1007/s12217-017-9582-5
[6] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V. Yanovsky, https://arxiv.org/abs/1706.00223v1
[7] U. Frisch, Z.S. She, and P.L. Sulem, Physica D, **28**, 382-392 (1987), https://doi.org/10.1016/0167-2789(87)90026-1
[8] M.I. Kopp, A.V. Tur, and V.V Yanovsky, Open Journal of Fluid Dynamics, **05**(04), 311-321 (2015), https://doi.org/10.4236/ojfd.2015.54032
[9] G. Rüdiger, Astron. Nachr. **299**(4), 217-222 (1978), https://doi.org/10.1002/asna.19782990408.

**ВИХРОВЕ ДИНАМО В СТРАТИФІКОВАНІЙ НАНОРІДИНІ, ЩО ПОХИЛО ОБЕРТАЄТЬСЯ З ДРІБНОМАСШТАБНОЮ НЕСПІРАЛЬНОЮ СИЛОЮ**

**Михайло Й. Копп[a], Анатолій В. Тур[c], Володимир В. Яновський[a,b]**
*[a]Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України*
*пр. Науки 60, 61001 Харків, Україна*
*[b]Харківський національний університет імені В.Н. Каразина*
*майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна*
*[c]Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology*
*9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

В роботі отримана великомасштабна нестійкість гідродинамічного $\alpha$-ефекту в стратифікованій нанорідині, що похило обертається, з урахуванням ефектів броунівської дифузії і потоку частинок під дією градієнта температури (термофорезу). Нестійкість викликається дією зовнішньої дрібномасштабної неспіральної сили, яка збуджує дрібномасштабні коливання швидкості з нульовою спіральністю і малим числом Рейнольдса. Нелінійні рівняння для великомасштабних рухів отримані з використанням методу багатомасштабних асимптотичних розкладів за малим параметром (числом Рейнольдса). Досліджена лінійна великомасштабна нестійкість типу гідродинамічного $\alpha$-ефекту в залежності від параметрів обертання $D$, температурної стратифікації $\widetilde{Ra}$ і концентрації наночастинок $\widetilde{R}_n$. Отриманий новий ефект генерації великомасштабних вихрових структур в нанорідині при $\widetilde{Ra}=0$, пов'язаний зі збільшенням концентрації наночастинок. Максимальний інкремент нестійкості досягається при кутах нахилу $\theta \approx \pi/5$ для чисел Прандтля $\Pr = 5$, а для чисел Прандтля $\Pr = 1$ при кутах нахилу $\theta \approx \pi/2$. Встановлено, що зміна частоти параметричного впливу дозволить контролювати і відслідковувати процес генерації великомасштабних вихрових структур. Показано, що циркулярно поляризовані вихори Бельтрамі виникають в нанорідині в результаті розвитку нової великомасштабної нестійкості. В роботі досліджується режим насичення великомасштабної нестійкості в стратифікованій нанорідині, що похило обертається з зовнішньою дрібномасштабною неспіральною силою. У стаціонарному режимі була отримана динамічна система рівнянь для великомасштабних збурень поля швидкості. Отримані чисельні рішення цієї системи рівнянь, які показують існування локалізованих вихрових структур у вигляді нелінійних хвиль Бельтрамі і кінків. Профіль швидкості кінка має тенденцію бути постійним при великих значеннях Z.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** стратифікована нанорідина, великомасштабна нестійкість, сила Коріоліса, багатомасштабні асимптотичні розкладання, $\alpha$-эфект, локалізовані вихрові структури