



























The constants in (36), (40) can be determined by combining theoretical dependences with experimental data.

Graphs of temperature versus time of a rotating cylindrical volume of water heated from below, obtained experimentally and calculated by formulas (36), (40) are presented in Fig. 7. The experimental temperature dependence on time was taken from [4, 9], digitized, and graphically transformed to the Cartesian coordinate system. The beginning of the experimental curve thus obtained was brought into coincidence with the beginning of the Cartesian coordinate system.

As a result of approximation of the experimental data using formulas (36), (40) the following values of the constants were obtained:  $A_s = 36.4, B_s = 0.055, A'_e = 15.45, B'_e = 27.245, C'_e = 0.557, D'_e = 0.197, t'_e = 8.3411, t_{tr} = 15.57$ .

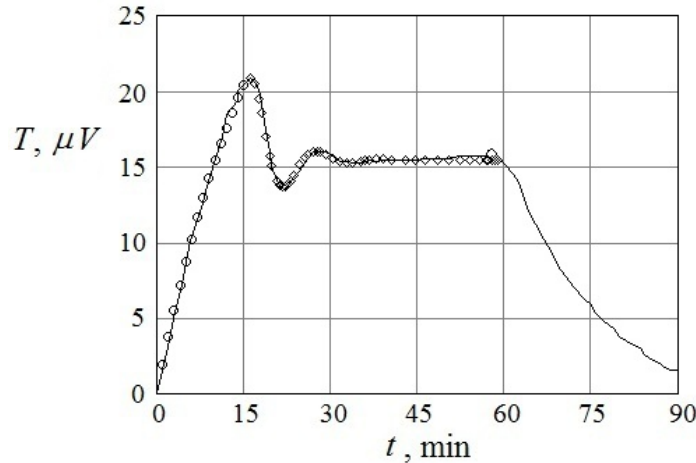


Fig. 7. Temperature versus time of a rotating cylindrical volume of water heated from below with a high heating rate: solid line - experiment [4, 9];  $\circ$  - formula (36),  $\diamond$  - formula (40).

In Fig. 7 the water heating rate at the initial time is determined by the value:  $\left. \frac{dB_h}{dt} \right|_{t=0} = 2.0$ . It can be seen that in

the case under consideration the water heating rate at the initial time is higher than the heating rate in the experiment described above.

From Fig. 7 it follows, that at the first stage within the time interval  $0 \leq t < t_{\max}$  the temperature increases according to the exponential law (36) to a certain level. Then, at  $t \approx t_{\max}$  the first stage goes into the second, where the perturbed temperature variation is described by the expression (40). At that, the perturbed temperature experiences oscillations damped in time with respect to temperature  $T \approx 15.45$ .

It should be noted, that in Fig. 6, 7 and below, the part of the experimental curve, not marked with markers, describes the water temperature variation after the heater is turned off.

Let us consider another experiment in which the water heating rate was higher than the heating rate used in the experiment in Fig. 7.

Fig. 8 shows experimentally obtained and calculated by formulas (36), (40) graphs of dependence of the disturbed temperature upon the time of a cylindrical volume of water heated from below at rate exceeding the heating rate in the experiment in Fig. 7.

As before, the experimental dependence of temperature difference on time [4, 9] is digitized, and graphically transformed to the Cartesian coordinate system. The beginning of the experimental curve thus obtained was brought into coincidence with the beginning of the Cartesian coordinate system.

As a result of approximation of the experimental data using formulas (36), (40) the following values of the constants were obtained:  $A_s = 52.5, B_s = 0.055, A'_e = 14.817, B'_e = 3.592, C'_e = 0.772, D'_e = 0.2, t'_e = 11.451, t_{tr} = 8.44$ .

In Fig. 8 the water heating rate at the initial time is higher than the heating rate in two previous experiments

$$\left. \frac{dB_h}{dt} \right|_{t=0} = 2.9.$$

From Fig. 8 it follows that increasing the water heating rate compared with the data in Fig. 7 changes the temporal dynamics of the perturbed temperature: the first stage of heating exists for a shorter period of time, and the damped vibrations at the second stage have a shorter period and larger amplitude of oscillations. As to the rest, the amplitude dynamics of the perturbed temperature in Fig. 8 corresponds to the dynamics in Fig. 7: the amplitude of the first maximum and the saturation level are almost the same.

The discrepancy between the experimental data and the theoretical curve in Fig. 8 at  $t > t_{\max}$  is, apparently, due to the fact that with a high heating rate it is necessary to take into account the contribution of nonlinear summands in the initial equations (9), (16) - (19).

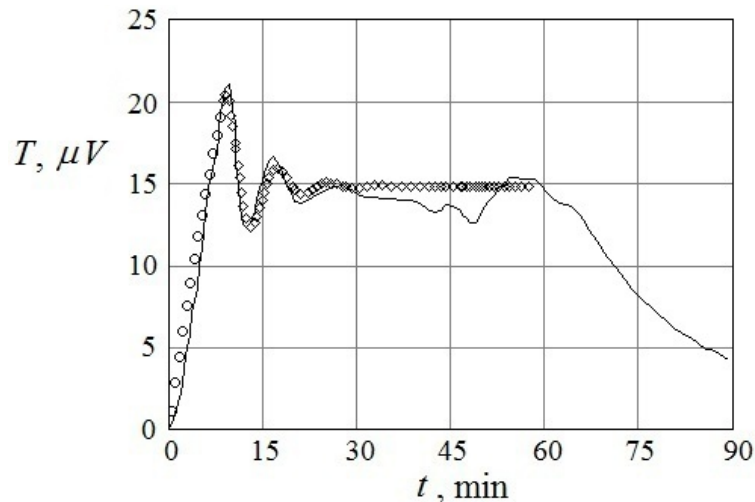


Fig. 8. Temperature versus time of a rotating cylindrical volume of water with a high heating rate: solid line - experiment [4, 9];  $\circ$  - curve (36),  $\diamond$  - curve (40).

### CONCLUSION

In this work, in neglect of the centrifugal convective force, the equations of heat and mass transfer in a rotating, viscous, incompressible liquid of a cylindrical form with free boundaries are analyzed. Solutions of the linearized original system of equations in cylindrical geometry are obtained that satisfy the boundary conditions of the problem. The spatial distributions of the projections of the perturbed velocity and the perturbed temperature of the liquid are determined with the accuracy to constants.

It is shown, that the spatial distribution of horizontal and vertical velocities and the temperature of a rotating, viscous, incompressible liquid of a cylindrical form with free boundaries are similar to those implemented for a layer of a viscous, incompressible liquid heated from below without rotation, which correspond to solutions of the Rayleigh problem in the cylindrical coordinate system.

The analysis of stability of a rotating, viscous, incompressible liquid of a cylindrical form heated from below was carried out. A stability condition for the rotating, viscous, incompressible liquid of a cylindrical form heated from below in the cylindrical coordinate system was obtained. For the case of its stable rotation the graphs of dependence of the logarithm of the critical Rayleigh number  $\ln(R_c)$  on the wave number  $k_r$  and the Taylor number  $Te$ , as well as the logarithm of the radial wave number  $\ln(k_r)$  on the Rayleigh number  $X = R_c/R_c^*$  and the Taylor number  $Y = Te/R_c^*$  were plotted. The obtained dependences, except for the minimum radial wave number  $(k_r)_{\min} \sim (\pi^2/2)^{1/3} Te^{1/3}$ , fully match the previous studies by other authors.

The stability analysis of a rotating cylindrical volume of a liquid without heating from below was carried out. It has been shown that at a fixed, zero temperature difference between the horizontal boundaries of the cylindrical tank of a liquid, an increase in its temperature is observed starting from zero. Then it reaches a maximum value of the order  $\kappa = 1.5, \dots, 2.0$ , and after, oscillating with exponentially decreasing amplitude of oscillations, again decreases to zero. In the final state at large times the liquid will rotate as a whole without perturbations of velocity, pressure and temperature.

If the temperature difference between the horizontal boundaries of the cylindrical volume of the liquid  $\Theta$  is set at a fluctuation level and is not supported from the outside, then the system can be considered as isolated. In this case, according to the law of entropy increasing in isolated systems, the liquid will successively go through only the stages of temperature rise with the rise coefficient at each stage of the order  $\kappa$  so, that its temperature eventually will increase in increasing geometric progression up to the value  $\sum_{i=1}^n \kappa^{i-1}$ , where  $n \gg 1$  - the number of stages of the temperature rise.

However, at a certain number of rise stages  $n = N$ , the Rayleigh number  $R = R_{fl} \sum_{i=1}^N \kappa^{i-1}$  may increase to a value  $R = R_c$ . In this case, the characteristic equation will have another eigen values and, consequently, another expression for increasing the liquid temperature. The water temperature will increase, but its final value should not exceed the phase transition temperature, since in this case the original system of equations is not applicable.

Based on performed calculations an example of heating a rotating cylindrical volume of water without heating from below is considered. This example shows that the problem of the occurrence of a temperature gradient in the volume of water, as well as its heating in Ranque-Hilsch tubes, should be considered as an inverse Rayleigh problem. In

the Rayleigh inverse problem it is required to find the temperature difference between the horizontal boundaries of a viscous, incompressible liquid of a cylindrical form according to a given distribution of its horizontal and vertical velocities.

The stability analysis of a rotating cylindrical volume of a liquid at heating from below has shown, that over time the temperature difference of the liquid increases from zero at  $t = 0$ , reaches the first maximum value of the order  $\mathcal{K}$  and tends to unity oscillating with exponentially decreasing oscillation amplitude. In experiments with heating the rotating cylindrical volume of a liquid, the value of the temperature difference set from outside determines the final heating temperature of the liquid, as well as the initial rate of its variation. It is shown that the rate of temperature variation of a heated liquid is greater than that of a similar one without heating.

Stationary temperature perturbations are considered for different rates of water heating.


In all cases it was proposed to consider two stages of the development of stationary perturbations.

At the first stage the water, as a result of a multistage heating at a rate set from outside, acquires a temperature at which the Rayleigh number is small, but increases from the value  $R \ll R_c$  to  $R \approx R_c$ .

At the second stage of heating, when  $R = R_c$ , the eigen values of the characteristic equation and the type of particular solutions, of which the general solution for a temperature consists, change. The temperature of the system is described either by a superposition of general solutions for the first and second stages of the temperature rise (at a low heating rate), or only by a general solution for the case  $R = R_c$  (at a high heating rate).

Comparison of theory and experimental data for heating water shows a qualitative and quantitative agreement.

#### ORCID IDs

 Oksana L. Andreeva <https://orcid.org/0000-0001-9757-8519>,  Leonid A. Bulavin <https://orcid.org/0000-0002-8063-6441>  
 Viktor I. Tkachenko <https://orcid.org/0000-0002-1108-5842>

#### REFERENCES

- [1] H. Bernard, *Revue generale des Sciences, pures et appliquees*, **11**, 1261-1271 and 1309-1328 (1900), retrieved from: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k17075r?rk=21459;2>.
- [2] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), *Phil. Mag.* **32**, 529-546 (1916), <https://doi.org/10.1080/14786441608635602>.
- [3] L.S. Bozbei, B.V. Borts, A.O. Kostikov and V.I. Tkachenko, *East Eur. J. Phys.* **1**(4), 49-56 2014, retrieved from: <https://periodicals.karazin.ua/ejpp/article/view/1442>.
- [4] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, (University Press, Oxford, 1970), pp. 657.
- [5] G.Z. Gershuni and E.M. Zhukhovitskiy, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости [Convective stability of an incompressible fluid]*, (Nauka, Moscow, 1972), pp. 393. (in Russian)
- [6] Kh.P. Grinspen, *Теория вращающихся жидкостей [Theory of Rotating Fluids]*, (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1975), pp. 321. (in Russian)
- [7] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Теоретическая физика, Т.6, Гидродинамика [Theoretical Physics, Vol.6, Hydrodynamics]*, (Nauka, Moscow, 1986), pp. 736. (in Russian)
- [8] E.L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices: monograph on mechanics*, (University Press, Cambridge, 1993), pp. 350.
- [9] Y. Nakagawa and P. Frenzen, *Tellus*, **7**, 1-21 (1955), <https://doi.org/10.1111/j.2153-3490.1955.tb01137.x>.
- [10] N.A. Smirnova, *Методы статистической термодинамики в физической химии [Methods of statistical thermodynamics in physical chemistry]*, (Vysshaya shkola, Moscow, 1982), pp. 455. (in Russian)
- [11] L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Теоретическая физика, Т.5, Статистическая физика [Theoretical Physics Vol.5, Statistical Physics]*, (Nauka, Moscow, 1976), pp. 584. (in Russian)
- [12] A.P. Merkulov, *Вихревой эффект и его применение в технике [Vortex effect and its application in technology]*, (Mashinostroeniye, Moscow, 1969), pp. 183. (in Russian)
- [13] A.D. Suslov, S.V. Ivanov., A.V. Murashkin and Yu.V. Chizhikov, *Вихревые аппараты [Vortex devices]*, (Mashinostroeniye, Moscow, 1985), pp. 256. (in Russian)

#### СТІЙКІСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШАРУ В'ЯЗКОЇ, НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ ТА ПІДГРІВАЄТЬСЯ ЗНИЗУ

О.Л. Андрєєва<sup>1,2</sup>, Л.А. Булавін<sup>3</sup>, В.І. Ткаченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

вул. Академічна, 1, 61108, Харків, Україна

<sup>2</sup>Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна

<sup>3</sup>Київський національний університет імені Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 60, 01033, Київ, Україна

Теоретично досліджено стійкість циліндричного горизонтального шару в'язкої, нестисливої рідини з вільними межами, що обертається і підігрівається знизу. У нехтуванні відцентровими силами записані рівняння руху, теплопровідності і нестисливості рідини, з яких в лінійному наближенні отримано відоме дисперсійне рівняння. Розглянуто стійкість обертового циліндричного об'єму рідини у відсутність підігріву знизу за умови, що різниця температур горизонтальних границь рідини фіксована, і дорівнює нулю. Показано, що у відсутність підігріву знизу і якщо різниця температур горизонтальних кордонів рідини, що обертається, не фіксована, і не підтримується ззовні, то збурена температура рідини буде збільшуватися, але її кінцеве значення не перевищуватиме температуру фазового переходу. Отриманий результат використаний для пояснення нагріву води у вихрових трубках Ранка-Хілша. Зроблено висновок про те, що нагрів води в

трубках типу Ранка-Хілша слід розглядати як зворотну задачу Релея, в якій за відомим розподілом швидкостей всередині об'єму рідини можна визначити градієнт температури, що виникає. Наведено аналіз стійкості обертового циліндричного об'єму рідини при підігріві знизу. Показано, що в експериментах величина різниці температур на кордонах циліндра, задається, а також початкова швидкість її зміни визначає кінцеву температуру нагрівання рідини. Порівняння запропонованої теорії та експериментальних даних для нагріву води покаже їх гарну якісну і кількісну відповідність.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** теорія, стійкість, в'язкий, нестисливий, рідина, горизонтальний циліндричний шар, обертається, нагрівається, вільні границі

### УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ И ПОДОГРЕВАЕМОГО СНИЗУ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

О.Л. Андреева<sup>1,2</sup>, Л.А. Булавин<sup>3</sup>, В.И. Ткаченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая, 1, 61108, Харьков, Украина

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина

<sup>3</sup>Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

ул. Владимирская, 60, 01033, Киев, Украина

Теоретически исследована устойчивость вращающегося и подогреваемого снизу горизонтального цилиндрического слоя вязкой, несжимаемой жидкости со свободными границами. В пренебрежении центробежными силами записаны уравнения движения, теплопроводности и несжимаемости жидкости, из которых в линейном приближении получено известное дисперсионное уравнение. Рассмотрена устойчивость вращающегося цилиндрического объема жидкости в отсутствие подогрева снизу при условии, что разность температур горизонтальных границ жидкости фиксирована, и равна нулю. Показано, что в отсутствие подогрева снизу и, если разность температур горизонтальных границ вращающейся жидкости не фиксирована, и не поддерживается извне, то возмущенная температура жидкости будет увеличиваться, но ее конечное значение не превышает температуру фазового перехода. Полученный результат использован для объяснения нагрева воды в вихревых трубках Ранка-Хилша. Сделан вывод о том, что нагрев воды в трубках типа Ранка-Хилша следует рассматривать как обратную задачу Рэлея, в которой по известному распределению скоростей внутри объема можно определить возникающий градиент температуры. Приведен анализ устойчивости вращающегося цилиндрического объема жидкости при подогреве снизу. Показано, что в экспериментах величина задаваемой разности температур на границах цилиндра, а также начальная скорость ее изменения определяет конечную температуру нагрева жидкости. Сравнение предложенной теории и экспериментальных данных для нагрева воды показывает их хорошее качественное и количественное соответствие.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** теория, устойчивость, вязкий, несжимаемый, жидкость, горизонтальный цилиндрический слой, вращается, нагревается, свободные границы