УДК 532.5

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДРЕЙФОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

А.А. Водяницкий
ИТФ им. Ахиезера ННЦ Харьковский физико-технический институт
Академическая 1, Харьков, 61108, Украина
E-mail: vodyanitskii@mail.ru, vodyanitskii@kipt.kharkov.ua
Received 19 April 2012, accepted 18 May 2012

Исследованы нелинейные колебания замагниченной неоднородной плазмы со столкновениями. Получено основное нелинейное уравнение для волн и рассмотрена регуляризация теории возмущений. Она состоит во включении диссипативных членов в нормальные функции и в учете их производных по неоднородной координате. Эта процедура снабжает решающими нелинейностями, определяющими нелинейную стабилизацию дрейфово-диссипативной неустойчивости и аномальный перенос плазмы.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелинейная теория, замагниченная плазма, дрейфово-диссипативная неустойчивость.

РЕГУЛЯРІЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ДРЕЙФОВИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНІЙ ЗАМАГНІЧЕНІЙ ПЛАЗМІ ІЗ ЗІТКНЕННЯМИ

О.А. Водяницький
ІТФ им. Ахієзера ННЦ Харківський фізико-техничний інститут
Академічна 1, Харків, 61108, Україна

Досліджено нелінійні коливання неоднорідної замагніченої плазми при наявності зіткнень. Одержано основне нелінійне рівняння для хвиль і розглянуто регуляризацію теорії збурень. Вона полягає у включенні дисипативних членів в нормальні функції і в урахуванні їх похідних по неоднорідній координаті. Ця процедура забезпечує вирішальними нелінійностями, які визначають нелінійну стабілізацію дрейфово-дисипативної нестійкості та аномальне перенесення плазми.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна теорія, замагнічена плазма, дрейфово-дисипативна нестійкість.

REGULARIZATION OF THE NONLINEAR THEORY OF DRIFT WAVES IN THE INHOMOGENEOUS MAGNETIZED COLLISIONAL PLASMA

A.A. Vodyanitskii
Akhiezer Institute for Theoretical Physics NSC KIPT
1 Akademicheskaya, Kharkov, 61108, Ukraine

Nonlinear oscillations of the magnetized non-uniform collisional plasma are studied. Basic nonlinear equation is got for waves and regularization of the theory of perturbation is considered. It consists in the inclusion of dissipative terms into normal functions and in an account of their derivatives with respect to the the non-unifrm coordinate This procedure supplies with the crucial non-linearities which determine the nonlinear stabilization of drift-dissipative instability and anomalous transfer of plasma.
KEYWORDS: nonlinear theory, magnetized plasma, drift-dissipative instability.

Целью работы является разработка теории возмущений, обеспечивающей стабилизацию нелинейной дрейфово-диссипативной структуры с аномальным переносом неравновесной замагниченной плазмы. Дрейфово-диссипативная неустойчивость в линейной теории полностью ионизованной неоднородной плазмы, помещенной в магнитное поле, предсказана в работе [1]. Эта неустойчивость была призвана объяснить повышенную утечку плазмы поперек магнитного поля, описываемую коэффициентом диффузии Бома [2]. В работе Розенблюта с соавторами [3] указывалось на важную роль эффектов конечного ларморовского радиуса ионов, что способствовало исследованию устойчивости желобковых и дрейфовых мод.

Отмеченные работы привели к быстрому прогрессу в исследовании линейной теории устойчивости дрейфовых волн [4-7]. Были рассмотрены новые факторы, влияющие на неустойчивость. В работах [5], [6] и [8] исследовались механизмы локализации колебаний и их стабилизация магнитным широм (см. также ссылки в книге [9]). Однако, как показано в работе [10], дрейфово-диссипативная неустойчивость по-прежнему имеет место, и инкременты неустойчивых собственных мод растут вместе с ростом частоты электронно-ионных соударений.

Дрейфово-диссипативная неустойчивость была идентифицирована с её линейной пороговой теорией в экспериментах на спокойной плазме Q –машин [11-13]. Была измерена повышенная утечка плазмы, связанная с возбуждением дрейфово-диссипативной неустойчивости. Азимутальные волновые числа наблюдаемых дрейфовых столкновительных волн при изменении внешнего магнитного поля изменялись от $m=1$ до $m=5;\ 6$ [11], [14]. Уровни их относительных амплитуд находились в интервале 10 % – 20 %.

Результаты экспериментальных исследований вызвали многочисленные публикации по нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости [15-22]. В работе Стикса ставилась задача найти уровень стационарной амплитуды дрейфовых волн и оценить величину повышенного ухода плазмы поперёк магнитного поля. Полученный в работе [15] уровень амплитуды был завышен приблизительно в 10 раз по сравнению с экспериментом. Отметим, что в этой работе не выполнялось необходимое условие устойчивости. Расчет утечки плазмы давал нулевой или заниженный результат и не был согласован с построением нелинейной теории дрейфово-диссипативной неустойчивости.

В последующих работах вынесен за рамки исследования вопрос о повышенных потерях плазмы, и авторы не заботились об обосновании выбора механизма стабилизации. Монтичелло и Саймон [17], не проверив устойчивость нелинейного стационарного режима, исключили из анализа стабилизацию неустойчивости дрейфовой волны второй затухающей гармоникой и учли стабилизацию затухающей нуль-частотной модой (с равным нулю "азимутальным" волновым числом). Впрочем вопрос о выборе нелинейного механизма стабилизации может решиться и в пользу нуль-частотных мод [21] при надлежащих граничных условиях и иных постановках задачи. (Нелинейное решение может перестроиться за счёт возбуждения волн с большими волновыми векторами, суперпозиция которых вместе с крупно масштабными волнами удовлетворяет граничным условиям.) Авторы нелинейных работ этот вопрос не исследуют.

В работе [23] содержится интересная постановка задачи о краевых колебаниях плазмы, как дрейфовых волнах, исходящих из плазменного "кора" (core) токамака наружу и "укручающихся" подобно "укручению" бегущих только к берегу морских волн [24].

За линейными и нелинейными исследованиями дрейфовых неустойчивостей развернулся широкий поиск решений в виде нелинейных дрейфовых вихрей. Вначале эти исследования были вполне аналогичны работе по двумерным градиентным вихрям Ларичева-Резника в идеальной гидродинамике со скалярной нелинейностью [25]. Значительная часть обзора [26] посвящена нелинейным градиентным вихрям в плазме, их взаимодействию и новым свойствам. Нелинейные градиентные вихри являются дополнительными возбуждениями по отношению к дрейфовым волнам.

Затем пошли по пути объединения возбуждений двух типов (объемных дрейфовых волн и нелинейных градиентных вихрей [27]). Связано это с тем, что нелинейная структура вихря не может обеспечить перенос плазмы вдоль неоднородной координаты. После этого стали изучать газ вихрей, их столкновения с порождением дрейфовых волн, которые по-прежнему ответственны за аномальный волновой перенос плазмы [27]. При этом среди иных исследований "... the main attention of this review (i.e. the review [28]. – A.V.) is devoted to the investigation of nonlinear drift structures, whose existence may result directly in the anomalous transfers."

Интерес к нелинейным дрейфовым волнам не ослабевает, о чем можно судить по монографическому обзору [26]. В работе [29] исследована нелинейная эволюция дрейфово-диссипативной неустойчивости плазмы в рамках уравнения Хазегавы-Мимы с отбрасыванием нелинейностей, чуждых методу получения вихревых образований. В линейном же приближении оставлены диссипативные члены, описывающие пороговую дрейфово-диссипативную неустойчивость вместе со стабилизацией высоких гармоник. Результаты численных исследований приведены для двух типов начальных условий. Когда были заданы отличными от нуля амплитуды двух волн, то на первой стадии временная эволюция системы привела к возбуждению и росту большого числа волн, которые на второй стадии затухали, и оставался ансамбль из небольшого числа волн (двух – четырёх). Если задавалось большое число волн с начальными амплитудами, отличными от нуля, то система эволюционировала к такому же ансамблю небольшого числа волн.

Этот результат свидетельствует о том, что эволюция системы приводит к самоорганизации когерентной дрейфово-диссипативной структуры с небольшим числом нелинейных дрейфовых волн.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Время обмена энергией между электронами и ионами τ_{ie} найдено в работе [30] и является большим по сравнению с временем между соударениями электронов $\tau_{ee}=\tau_{ei}$ и ионов τ_{ii} порознь, а также временем передачи импульса к ионам [31]:

$$\tau_{ei}=3\sqrt{m_e}T_e^{3/2}\Big/\left(2\sqrt{2\pi}\Lambda e^4Z^2n_i\right);\,\tau_{ii}=3\sqrt{m_i/\pi}T_i^{3/2}\Big/\left(4\Lambda e^4Z^2n_i\right);\ \tau_{ie}=\tau_{ei}\,m_i/(3m_e)\,, \tag{1}$$

где m_α, T_α, n_α — масса, температура и плотность частиц сорта α ($\alpha=\mathrm{e}$ – электроны, $\alpha=\mathrm{i}$ – ионы), Ze и $\mathrm{e_e}=-\mathrm{e}<0$ – заряды иона и электрона, $\Lambda=\ln(T_\mathrm{e}^3\big/\mathrm{e}^6n_\mathrm{e})$ – кулоновский логарифм [30]. Время установления термодинамического равновесия отдельно в электронной и ионной подсистемах меньше, соответственно, в $m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$ и $(m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i})^{1/2}$ раз времени обмена энергией и импульсом между электронами и ионами τ_{ei}. Поэтому характерной особенностью плазм является неизотермичность электронной и ионной подсистем.

Система уравнений двухкомпонентной гидродинамики для плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, получена в работе [31]. Условия применения этих уравнений требуют выполнения обычных ограничений на частоту и пространственные масштабы рассматриваемых процессов в гидродинамическом приближении. Уравнения же, описывающие неустойчивости термоядерной плазмы с неоднородной температурой, подлежат выводу из кинетической теории [32], используя разную малую величину различных пространственных и временных масштабов. Однако необходимо иметь уравнения, в которых, в частности, вклад поперечных вязкостных членов может сравниться с совместным действием инерционного дрейфа и продольной силы трения. Поэтому в исследованиях используется система уравнений работы [31]. В ней уравнения поперечного движения решаются методом итераций. Первым приближением для поперечных скоростей является электрический и ларморовский дрейф. Второе приближение учитывается только для ионов и включает вклад поперечной инерции ионов и их столкновительную вязкость.

Возможность такой итерации обсуждается в книге Михайловского [32] и согласно предложенной рекомендации вычисления проведены в работе [33]. Полученная в результате итерации система уравнений и системы уравнений Михайловского [32] и Немова [34] имеют общие основные члены. В качестве главного отличия укажем на то, что различные члены системы уравнений, приводимой в работе [33], могут иметь порядки малости, не совпадающие с порядками малости системы уравнений работ [32] и [34]. Система уравнений [33] справедлива для помещенной в однородное магнитное поле плазмы малого давления, неоднородностью ионной температуры которой пренебрегается.

Перечислим безразмерные параметры и переменные, в терминах которых решаются нелинейные задачи, и приведём, вместе с разъяснениями, модельную систему уравнений, описывающую эволюцию нелинейной дрейфово-диссипативной структуры. Безразмерные время, поперечные и продольные координаты и скорости введены по формулам:

$$t' = t\omega_*\,,\ \vec{r}' = 2\pi\vec{r}\big/L_\perp\,,\ \ z' = 2\pi z/L_{II}\,,\ \ \vec{\mathrm{v}}_\perp^{\,\alpha} = 2\pi\vec{V}_\perp^{\,\alpha}\Big/\!\left(\omega_* L_\perp\right),\ \ \mathrm{v}_{II}^{\alpha} = 2\pi\,\mathrm{V}_{II}^{\alpha}\Big/\!\left(\omega_* L_{II}\right). \qquad (2)$$

Здесь штрихи относятся к безразмерным переменным (ниже их будем опускать), L_{II} и $L_\perp$ – характерные продольный и поперечный размеры плазмы, $\omega_* = 4\pi^2\, cT_{e0}\big/(L_\perp^2\,\mathrm{e}H)$ – характерная градиентная частота. Нижеследующие величины вводятся при помощи замены переменных. При этом штрихи у некоторых величин также относятся к безразмерным величинам и далее будут опущены. Безразмерные плотности $\tilde{n} = n_\alpha/n_{00}$, где $n_\alpha = n_e = n_i$, и температуры берутся по отношению к некоторым характерным плотности n_{00} и температуре T_{e00} (например, равным максимальным значениям этих величин в плазменном слое). Из них и характерных пространственных и временных масштабов строятся безразмерные давление, тензор вязкости частиц сорта α и скалярный потенциал:

$$\pi_\alpha = \frac{p_\alpha}{p_{\mathrm{e}\,0}}\,,\ \ \left(p_{\mathrm{e}\,0} = n_{00}T_{e0}\right),\ \ \pi'^{\alpha}_{ik} = \pi^{\alpha}_{ik}\,\frac{\omega_{H\alpha}}{p_{\mathrm{e}0}\,\omega^*}\ ,\ \ \eta'^{\alpha}_{j} = \eta^{\alpha}_{j}\,\frac{\omega_{H\alpha}}{p_{\mathrm{e}0}}\,,\ \ \ \psi = \frac{\mathrm{e_e}\varphi}{T_{\mathrm{e}0}}\,. \qquad (3)$$

Формулы (3) вводят безразмерные коэффициенты вязкости ионов η^i_j, где $j = 1,2,3,4$ (см. [31]). Один из них определяет параметр поперечной столкновительной ионной вязкости η_0, см. формулу ниже в строке (4).

Приведём значения пяти параметров, описывающих дрейфово-диссипативную неустойчивость (отмеченные выше характерные плотности и температуры входят в состав определяемых параметров):

$$y_{\mathrm{e}0} = \frac{L_{II}^2\omega_* m_{\mathrm{e}}}{4\pi^2 T_{\mathrm{e}0}\tau_{ei0}}\,,\ \ \ \eta_0 = \eta_1^i\Big|_{T_i = T_{i0}} = \frac{0{,}3\,t_i}{\omega_{Hi}\,\tau_{ii\,0}}\,,\ \ \ b = \frac{\omega_*}{\omega_{Hi}} = \frac{4\pi^2\rho_{\mathrm{ie}}^2}{L_\perp^2}\,,\ \ \ t_i = \frac{T_{i0}}{T_{\mathrm{e}0}}\,,\ \ \sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_i}}\,. \qquad (4)$$

Здесь $\rho_{ie}^2 = T_{e0}\Big/\!\left(m_i\omega_{Hi}^2\right)$ — квадрат ларморовского радиуса ионов, рассчитанный по электронной температуре. Остальные величины, например, параметр, входящий составной частью в слагаемое поперечного электронного трения, $\zeta^e = 1/\left(\omega_{He}\tau_{ei}\right)$, или формулы для гирочастот частиц сорта α , $\omega_{H\alpha} = eH/m_\alpha c$, выражаются через вышеприведенные величины, либо обозначения для них являются стандартными.

В условиях дрейфово-диссипативной неустойчивости возмущения электронной температуры малы, но их вклад в диссипативную часть дисперсионного уравнения сравним с вкладом продольного трения [7], а в значение пороговой частоты (на нейтральной кривой устойчивости) является превалирующим. По сложившейся традиции [1] проведём вначале рассмотрение без температурных и электромагнитных возмущений, важных для плазм с конечным газокинетическим давлением [35]. (В модельной задаче исключены из рассмотрения и из списка формул (3) возмущения электронной температуры и продольной компоненты электромагнитного потенциала). Отметим, что расхождения между нелинейными теориями и между теориями и экспериментом не объясняются учетом возмущений электронной температуры (см. анализ в [17]).

В уравнении, являющемся следствием уравнения непрерывности тока и продольного движения электронов, произведём вбирающую в себя сильную нелинейность замену безразмерной плотности на её логарифм $\tilde{\nu} = \ln\tilde{n}$,. Добавив к этому уравнению уравнение непрерывности ионов, получим модельную систему двух уравнений для неизвестных функций $\tilde{\nu}(\vec{r},t)$ и $\xi(\vec{r},t)$ либо для $\tilde{\nu}(\vec{r},t)$ и $\psi(\vec{r},t)$:

$$\partial\tilde{\nu}/\partial t + \xi_x\tilde{\nu}_y - \xi_y\tilde{\nu}_x + \mathrm{e}^{-\tilde{\nu}}\nabla_\perp\tilde{n}\left(\vec{\mathrm{v}}_2^{\,i} + \vec{\mathrm{v}}_D\right) = 0, \qquad \partial^2\left(\psi + \tilde{\nu}\right)\big/\partial z^2 + \alpha_{\mathrm{e}}\,y_{\mathrm{e}0}\nabla_\perp\tilde{n}\,\vec{\mathrm{v}}_2^{\,i} = 0, \qquad (5)$$

где $\xi = -\psi + t_i\tilde{\nu}$, $\tilde{n} = \exp(\tilde{\nu})$ и $\alpha_{\mathrm{e}} = 0{,}51$ [31]. Поперечная скорость ионов подставлена в уравнение непрерывности. Важно отметить, что безразмерный электростатический потенциал служит токовой функцией для поперечной скорости электрического дрейфа, для всей скорости $\vec{v}_1^i$ токовой функцией является $\xi(\vec{r},t)$:

$$\mathrm{v}_{1x}^i = -\xi'_y, \quad \mathrm{v}_{1y}^i = \xi'_x, \qquad \mathrm{v}_{Ex} = \psi'_y, \qquad \mathrm{v}_{Ey} = -\psi'_x. \tag{6}$$

В дивергенции от потока поперечной скорости второго приближения, содержащейся в уравнении непрерывности ионов, вклад ларморовского инерционного дрейфа сокращается с вкладом поперечной магнитной вязкости, представленной слагаемыми с коэффициентом $\eta_3^i = \pi_i/2$ в безразмерных переменных. С учетом этого и иных сокращений имеем выражения для слагаемых системы уравнений (5)

$$\nabla_\perp \tilde{n}\vec{v}_2^i = -b\{\nabla_\perp(\tilde{n}d_\perp(\nabla_\perp\xi)/dt) - \eta_0[\Delta_1(\tilde{n}^2\Delta_1\xi) + 4(\tilde{n}^2\xi''_{xy})''_{xy}]\}, \quad \Delta_{\perp,1} = \partial^2/\partial x^2 \pm \partial^2/\partial y^2 \tag{7}$$

$$d_\perp/dt = \partial_t + \psi_y\partial_x - \psi_x\partial_y, \quad \nabla_\perp\tilde{n}\mathrm{v}_D = -\nabla_\perp\left(\zeta^e\nabla_\perp\pi\right), \ \pi = \pi_e + \pi_i. \tag{8}$$

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящем разделе получено основное нелинейное уравнение для волн дрейфово-диссипативной неустойчивости. Будучи формальной математической процедурой, метод построения этого уравнения из системы нелинейных диссипативных уравнений с частными производными включает регуляризацию теории возмущений. Проблема регуляризации вывода уравнений для нормальных амплитуд, в рамках метода конечных элементов, в системе уравнений вязкой несжимаемой жидкости поставлена Ладыженской [37] и привела к необходимости обобщения метода Боголюбова для одночастотных решений системы со многими степенями свободы [38]. (Иная формальная процедура обобщения одночастотного метода на нелинейные колебания однородных распределённых систем со многими степенями свободы применена в работе [39].)

Использование формализма двух времен и двух координат позволяет объединить разложения нелинейной механики и метода ВКБ. Основанием для применения этого формализма служат обобщение метода последовательных замен переменных в процедуре Боголюбова [38] и опыт его практического применения с обобщением на системы с распределёнными параметрами и многими нормальными колебаниями. Полученное ниже по рецепту формального математического приёма, который наряду со строгим методом содержится в [38], первое приближение асимптотического разложения является обобщением метода Боголюбова и Митропольского по пунктам, кратко изложенным в выводах.

Приближения нелинейной теории возмущений

В качестве неравновесных плотности и токовой функции возьмём такие, которые медленно зависят от времени и неоднородной координаты, $|\nu''_{0xx}| << |\nu'_{0x}| \le 1$ и $|\nu''_{0tt}| << |\nu'_{0t}| \le 1$, и аналогичные неравенства справедливы для ξ_0. Выполнение этих неравенств обеспечивает применимость разложений нелинейной теории и квазиклассического приближения и введения "медленного" времени и медленной зависимости амплитуд колебаний от неоднородной координаты. Плотность и токовую функцию считаем состоящими из двух слагаемых $\tilde{\nu} = \nu_0(x,t) + \nu(\vec{r},t)$ и $\tilde{\xi} = \xi_0(x,t) + \xi(\vec{r},t)$, где величины, помеченные индексом нуль, удовлетворяют, в отмеченном выше смысле, условиям медленной зависимости от аргументов, а возмущения считаем малыми. Последнее предположение считаем выполненным только из-за использования его при анализе нелинейных решений для волн. Для построения нелинейной теории его можно было не делать. Каждое нелинейное слагаемое системы уравнений (5) следует разложить по степеням возмущений, выделив линейные и нелинейные квадратные и кубические члены. При этом вклад поперечной ионной вязкости в формуле (7) выражается в виде, удобном для выделения нелинейных членов (с учетом замены $\tilde{n} = \exp(\tilde{\nu})$):

$$\Delta_1(\tilde{n}^2\Delta_1\xi) + 4(\tilde{n}^2\xi''_{xy})''_{xy} \equiv \exp(2\tilde{\nu})\left[\Delta_\perp^2\xi + 2(\Delta_1\tilde{\nu})\Delta_1\xi + 4(\nabla_\perp\tilde{\nu})\nabla_\perp\Delta_\perp\xi + 4((\tilde{\nu}'_x)^2 - (\tilde{\nu}'_y)^2)\Delta_1\xi\right]$$

Отметим, что безразмерные неравновесные плотности вводим в параметры уравнений $\eta = \eta_0\exp(\nu_0)$ и $y_e = \alpha_0 y_{e0}\exp(\nu_0)$.

Нелинейная задача решается в модели плоского неоднородного вдоль оси Ox слоя с периодическими граничными условиями по y и z. Вдоль оси Ox плазма считается свободной и граничное условие по неоднородной координате x получается из исходных уравнений, как условие сохранения y - компоненты импульса. Последовательный вывод основного уравнения для волн, позволяющий исключить секулярные члены, проводится в формализме двух времён и двух неоднородных координат с "быстрой" и "медленной" зависимостями от времени и неоднородной координаты. При этом полагают $\partial/\partial t = \partial/\partial t_0 + \varepsilon\,\partial/\partial t_1$, $\partial/\partial x = \partial/\partial x_0 + \varepsilon\,\partial/\partial x_1$ и в вычислениях учитывают только первую степень ε. Тогда по быстрому времени и быстрой координате можно пользоваться обычным преобразованием Фурье [40]. Представим искомые функции $\tilde{\nu}(\vec{r},t)$ и $\xi(\vec{r},t)$ в виде разложения по полной ортогональной системе функций $\{\exp i\vartheta_{\vec{k}}\}$, где $\vartheta_{\vec{k}} = my + nz + k_x(x_1)$ (m и n – целые числа и $k_x(x_1)$ – функция "медленной" координаты):

$$\{\nu;\xi\} = \sum_{mn}\int^{x_0} dk_x(x_1)\{a_{\vec{k}};\xi_{\vec{k}}\}\exp i\vartheta_{\vec{k}} \equiv \sum_{\vec{k}}\{a_{\vec{k}};\xi_{\vec{k}}\}\exp i\vartheta_{\vec{k}} \ . \tag{9}$$

Систему уравнений с частными производными (5) можно перевести в два набора уравнений в частных производных по двум временам и медленной неоднородной координате

$$-i\hat{\omega}_\xi a_{\vec{k}} + i\lambda_2(\hat{\kappa})\xi_{\vec{k}} = NL_1(\hat{\kappa}) , \qquad -n^2(1+t_i)\, a_{\vec{k}} - \lambda_1(\hat{\kappa})\,\xi_{\vec{k}} = NL_3(\hat{\kappa}) , \tag{10}$$

где $\hat{\kappa} = (\hat{\omega}, \hat{\vec{k}})$ и

$$NL_j(\hat{\kappa}) = \sum_{\vec{k}'}\xi_{\vec{k}'}\Big\{U_j(\hat{\kappa}',\hat{\kappa}'')\, a_{\vec{k}''}\Big|_{\vec{k}''=\vec{k}-\vec{k}'} + \sum_{\vec{k}''} R_j(\hat{\kappa}',\hat{\kappa}'',\hat{\kappa}''')\, a_{\vec{k}''}a_{\vec{k}'''}\Big|_{\vec{k}'''=\vec{k}-\vec{k}'-\vec{k}''}\Big\} . \tag{11}$$

Выпишем здесь только квадратный нелинейный коэффициент первого уравнения (10)

$$U_1(\hat{\kappa}',\hat{\kappa}'') = (\hat{k}'_x - i\partial \ln\xi_{\vec{k}'}/\partial x_0)m'' - \hat{k}''_x m' + b[i\hat{\omega}_m \hat{\vec{k}}'_\perp \hat{\vec{k}}''_\perp - \eta(\hat{k}'^4_\perp + 4\hat{\vec{k}}''_\perp \hat{\vec{k}}'^3_\perp + 2\hat{k}'^2_1 \hat{k}''^2_1)] + (1+t_i)\zeta^{e}\hat{\vec{k}}'_\perp \hat{\vec{k}}''_\perp a_{\vec{k}'}/\xi_{\vec{k}'} . \tag{12}$$

Здесь и в выражениях (10) обозначения аналогичны приводимым далее без операторных индексов и равны: $\lambda_2(\hat{\kappa}) = \omega_{ne} - b_\kappa(\hat{\omega}_m + i\eta_{\hat{\kappa}})$, $\hat{\omega}_m = \hat{\omega} + m\psi'_{0x}$, $\eta_{\hat{\kappa}} = \eta(\hat{k}_x^2 + m^2)$. Операторные индексы означают, что частота и компонента волнового вектора являются операторами дифференцирования: $\hat{\omega} = i(\partial/\partial t_0 + \varepsilon\,\partial/\partial t_1)$ и $\hat{k}_x = k_x(x_1) - i\varepsilon\,\partial/\partial x_1$. В формулах (10) и (11) знак суммирования по $\vec{k}'$ означает суммирование по m', n' и интегрирование по $k'_x(x_1)$ и аналогично – по $\vec{k}''$. При этом в (12) $\hat{\vec{k}}'_\perp = \hat{k}'_x\vec{e}_x + m'\vec{e}_y$, $\hat{k}_1^2 = \hat{k}_x^2 - m^2$, где $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ — орты вдоль осей Ox и Oy.

Основное нелинейное уравнение для волн

Перейдём к построению основного уравнения для волн в первом приближении теории возмущений. Зависимость от времени пространственной компоненты $a_{\vec{k}}$ в системе уравнений (10) отыскивается в виде

$$a_{\vec{k}}(x_1,t) = a_\kappa(x_1,t_1)\exp(-i\omega_{\vec{k}}t_0) , \quad \text{где } \kappa = \left(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}\right), \tag{13}$$

и аналогичное выражение записывается для $\xi_{\vec{k}}(x_1,t)$. Здесь амплитуда зависит от медленного времени и медленной неоднородной координаты, то есть $da_\kappa/dt = \varepsilon\,\partial a_\kappa/\partial t_1 << \omega_{\vec{k}}a_\kappa$. В качестве частоты принимается её значение в ближайшем линейном или стационарном нелинейном режиме. Таким образом, значение частоты является неизвестным и подлежит определению наряду с амплитудой в результате решения задачи (в частности, частота $\omega_{\vec{k}}$ может быть частотой биений волн с частотами $\omega_{\vec{k}'}$ и $\omega_{\vec{k}''}$, $\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''}$. Для тех возбуждений, частота которых в стационарном режиме мала или равна нулю, в (13) остаётся зависимость только от медленного времени. Подставим зависимости типа (13) в систему уравнений (10) и составим уравнение гармонического баланса [38]. В результате приходим к уравнению, в левой части которого содержатся амплитуды нормальных колебаний.

В правой части уравнения гармоническеого баланса необходимо выразить нормальную функцию $\xi_{\vec{k}}$ через амплитуду a_κ нормальных колебаний. В результате получим основное нелинейное уравнение для волн, то есть замкнутую систему эволюционных уравнений для амплитуд. Нормальные функции можно найти по теории возмущений из системы уравнений (10) только для невырожденных степеней свободы, то есть для тех степеней свободы (волновых или неволновых), для которых дисперсионная функция D_κ не обращается тождественно в нуль при вещественных значениях частоты. Если волновой вектор таков, что $D_\kappa \equiv 0$, то переход к амплитуде нормальных колебаний невозможен и необходимо пользоваться отдельными уравнениями для ξ_κ и a_κ в системе уравнений (10). Нормальные функции невырожденных степеней свободы могут быть исключены по приводимой ниже процедуре.

При нахождении нормальных функций используем принятое выше условие о том, что амплитуды всех возбуждений являются малыми величинами. Методом итерации решаем первое из уравнений системы (10) при равных нулю производных от амплитуды по медленным переменным. Сначала считаем малыми нелинейные члены и находим из линейного соотношения: $\xi_\kappa^{(1)} = a_\kappa\omega_\xi/\lambda_2(\kappa)$, где $\lambda_2(\kappa) = \omega_{ne} - b_\kappa(\omega_m + i\eta_\kappa)$. Затем подставим это выражение в нелинейное слагаемое первого уравнения (10) и найдём нормальную функцию во втором приближении с квадратными членами

$$\xi_\kappa^{(2)} = \left[a_\kappa\omega_\xi - i\sum_{\vec{k}'}\xi_{\kappa'}^{(1)}a_{\kappa-\kappa'}(U_1(\kappa',\kappa-\kappa') + (m-m')\nu'_{0x}\,b_{\kappa'}\eta_{\kappa'})\right]\Big/\lambda_2(\kappa) . \tag{14}$$

Как отмечено выше, здесь не учитываются производные по неоднородной координате от амплитуд в нелинейных слагаемых. Но производную от диссипативной части нормальной функции $\xi_\kappa^{(1)}$, получаемую в результате дифференцирования неоднородной плотности $n_0(x)$ в частоте соударений в параметре η, необходимо учитывать в первом приближении, и её необходимо учитывать во втором приближении, так как вводимые при этом новые нелинейные члены сравнимы с остальными нелинейными слагаемыми. После вычислений находим

$$d\,\xi_\kappa^{(2)}\big/dx = ib\eta\nu'_{0x}\,\lambda_2^{-1}(\kappa)\ \Big\{\ k_\perp^4 + \textstyle\sum_{\vec{k}'}\xi_{\kappa'}^{(1)} a_{\kappa''}\Big[\ \Big(\ k'^4_\perp + 4\vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'^3_\perp + 2k''^2_1 k'^2_1\Big) - \\ -\Big(k_\perp^4\lambda_2^{-1}(\kappa) + k'^4_\perp\,\lambda_2^{-1}(\kappa')\Big)\ U_1(\kappa',\kappa'')\Big]_{\kappa''=\kappa-\kappa'}\Big\} + O\Big(\nu'^2_{0x}, b_\kappa^2\eta_\kappa^2\Big). \tag{15}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках получено от дифференцирования явной зависимости параметра η в (12) от неоднородной плотности. Остальные слагаемые найдены при учете зависимости частоты соударений от логарифма неоднородной плотности $\nu_0(x)$ в диссипативной части нормальной функции первого приближения $\xi_\kappa^{(1)}$, в которой $\eta_\kappa = k_\perp^2\eta_0\exp\nu_0(x)$.

Воспользуемся выражением для нормальной функции (14) и её производной во втором приближении (15) при составлении уравнение гармонического баланса [38]. Группируя слагаемые по степеням амплитуды, получаем в окончательной форме основное нелинейное уравнение для волн

$$\left(D_\kappa + i\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial D_\kappa}{\partial\omega_{\vec{k}}} - i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial D_\kappa}{\partial k_x}\right)a_\kappa = NL(\kappa)\,. \tag{16}$$

Здесь $D_\kappa = D'_\kappa + iD''_\kappa$ — дисперсионная функция, мнимая и вещественная части которой равны

$$D''_\kappa = n^2(\omega_m - \omega_{ne}) + b_\kappa[n^2(1+t_i)\omega_m + (\omega_m + t_i\omega_{ne})y_e\eta_\kappa]\,, \tag{17}$$

$$D'_\kappa = b_\kappa\Big[y_e\omega_m(\omega_m + t_i\omega_{ne}) - n^2(1+t_i)\Big(\eta_\kappa + \zeta_\kappa^e/b\Big)\Big]. \tag{18}$$

Нелинейные слагаемые и матричные элементы определяются формулами:

$$NL(\kappa) = \textstyle\sum_{\vec{k}'} a_{\kappa'}\Big\{a_{\kappa-\kappa'}V_\kappa\big(\kappa',\kappa-\kappa'\big) + \sum_{\vec{k}''} a_{\kappa''}a_{\kappa'''}R_\kappa(\kappa',\kappa'',\kappa''')\Big]_{\kappa'''=\kappa-\kappa'-\kappa''}\Big\},$$

$$V_\kappa(\kappa',\kappa'') = \frac{\omega_\xi}{\lambda_2(\kappa')}\sum_{j=1:3}\lambda_j(\kappa)\overline{U}(\kappa',\kappa''), \qquad R_\kappa(\kappa',\kappa'',\kappa''') = \frac{\omega_\xi}{\lambda_2(\kappa')}\sum_{j=1:3}\lambda_j(\kappa)\Big[\overline{R_j}(\kappa',\kappa'',\kappa''') + \tilde{\tilde{R}}_j(\kappa',\kappa'',\kappa''')\Big] \tag{19}$$

$$\overline{U}_1 = U_1 + U_{1\xi}\,; \qquad \overline{U}_1(\kappa',\kappa'') = k'_x m'' - m'k''_x + b\Big[i\omega'_m\,\vec{k}'_\perp\cdot\vec{k}''_\perp - \eta\Big(k'^4_\perp - \\ -k'^4_\perp m''\nu'_{0x}\lambda_2^{-1}(\kappa') + 4\vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'^3_\perp + 2k'^2_1 k''^2_1\Big)\Big] - \lambda_2(\kappa')\big(\omega_\xi\big)^{-1}(1+t_i)\zeta^e\vec{k}'_\perp\cdot\vec{k}''_\perp\,, \tag{20}$$

$$\overline{U}_3 = U_3(\kappa',\kappa'') = y_e b\Big[i\omega'_m\,\vec{k}_\perp\cdot\vec{k}'_\perp - 2\eta\Big(k'^4_\perp + 2\vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'^3_\perp + k'^2_1\,k''^2_1\Big)\Big]\,, \tag{21}$$

$$\overline{R_1}(\kappa',\kappa'',\kappa''') = R_{1\xi} = -b\eta\Big[1{,}5\vec{k}^4_\perp + 4\Big(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp\Big)\vec{k}^3_\perp + 2k'^2_1(k-k')^2_1\Big], \tag{22}$$

$$\overline{R}_3 = R_3(\kappa',\kappa'',\kappa''') = i0{,}5y_e b\omega'_m\vec{k}_\perp\cdot\vec{k}'_\perp - 2y_e b\eta\Big[\vec{k}'^4_\perp + 4\vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'^3_\perp + k'^2_1(k-k')^2_1\Big],\tag{23}$$

$$\tilde{\tilde{R}}_1 = \tilde{R}_1 + \tilde{R}_{1\xi}\,,\ \tilde{\tilde{R}}_3 = \tilde{R}_3\,;\ \tilde{R}_j = i(-1)^{(j-2)/2}\overline{U}_j(\kappa-\kappa'',\kappa'')\,\overline{U_1}(\kappa',\kappa'')\lambda_2^{-1}(\kappa-\kappa'')$$

$$\tilde{R}_{1\xi}(\kappa',\kappa'',\kappa''') = -ib\eta\Big[\Big(\vec{k}_\perp - \vec{k}'_\perp\Big)^4\Big/\lambda_2(\kappa-\kappa'') + \vec{k}^4_\perp\Big/\lambda_2(\kappa')\Big]U_1(\kappa',\kappa''), \tag{24}$$

В списке формул (19 – 24) $j=1$ и $j=3$. Обозначения безразмерных параметров определяются формулами

$$\omega_{ne} - m\,N\,,\ \ N \equiv \nu'_{0x} = d\nu_0/dx\,,\ \omega_m = \omega_{\vec{k}} + m\psi'_{0x}\,,\ \omega_\xi = \omega_m + t_i\omega_{ne} + i(1+t_i)\zeta_\kappa^e;\ \ \omega_\kappa = \omega_m + i\eta_\kappa\,,\ \eta_\kappa = k_\perp^2\eta\,, \\ k_\perp^2 = k_x^2 + m^2\,,\ b_\kappa = k_\perp^2 b\,;\ \ \lambda_1(\kappa) = -n^2 + iy_e b_\kappa\omega_\kappa\,;\ \lambda_3 = i\lambda_2(\kappa)\,;\ \lambda_2(\kappa) = \omega_{ne} - b_\kappa\omega_\kappa\,;\ k_1^2 = k_x^2 - m^2\,, \\ k'^2_1 = k'^2_x - m'^2\,;\ \ \vec{k}_\perp\cdot\vec{k}'_\perp = k_x k'_x + m\,m'\,;\ \ \vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'^3_\perp k = \vec{k}''_\perp\cdot\vec{k}'_\perp k'^2_\perp\,. \tag{25}$$

В найденных нелинейных матричных элементах наибольшие изменения претерпели матричные элементы первого уравнения (10), так как именно в это уравнение входит производная от нормальной функции (15). В формулах (19) – (24) знак прямой черты означает включение добавка к нелинейным матричным элементам, полученного в результате учета зависимости нормальной функции от неоднородной координаты. Знаки волнистой черты показывают на появление новых нелинейных матричных элементов, обусловленное учетом вторых степеней амплитуды в нормальной функции. Здесь приведены только те коэффициенты, которые важны в дальнейших нелинейных исследованиях (детальные оценки сделаны в работе [33]).

Если не предполагать малость амплитуд, но иметь в исходных уравнениях малые параметры перед нелинейными и линейными диссипативными слагаемыми, то получится уравнение для волновых амплитуд, аналогичное первому приближению метода Боголюбова [38]. Все члены этого уравнения содержатся в полученном основном уравнении для волн. Однако в этом основном уравнении содержатся, с точки зрения канонического метода Боголюбова, и при выполнении условия малости указанных для него параметров, лишние нелинейные слагаемые. Но так как все малые слагаемые представлены в явном виде, то лишними всегда можно пренебречь при анализе. Однако мы показали и используем эффективно далее то, что появляющиеся нелинейные члены будут одного порядка величины с учитываемыми слагаемыми от собственных нелинейных членов исходных уравнений.

В стационарном решении основного нелинейного уравнении (16) первые производные по времени равны нулю, а первыми производными по x пренебрегается в силу оценки $\gamma_\kappa a_\kappa >> (\partial\omega/\partial k_x)\partial a_\kappa/\partial x$ (это соответствует утверждению о том, что амплитуда определяется балансом локального инкремента и слагаемых, отражающих нелинейное взаимодействие волн, а не эффектами на границе плазмы [41]). Заметим еще, что после вывода основного уравнения для волн возвращаются к одному времени и одной неоднородной координате и полагают $t_1 = \varepsilon t$, $x_1 = \varepsilon$ x.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПОРОГОВОЙ ТЕОРИИ

Основное уравнение для волн описывает нелинейное взаимодействие волн, эволюционирующих к стационарному состоянию в результате развития неустойчивости и определяющих аномальный волновой перенос плазмы наряду с её классической диффузией. Для решения задачи о характере эволюции, прежде всего, необходимо найти нелинейное кубическое самовоздействие волны, чтобы узнать к какому эффекту на амплитуду оно приводит, — стабилизирующему или дестабилизирующему неустойчивость линейной теории.

Кубическое самовоздействие волны

Для волновых векторов неустойчивых в линейной теории волн и биений на них, нелинейное взаимодействие которых изучается, введём используемые далее краткие обозначения с помощью их азимутальных компонент и индексов при них:

$$\pm m = (\pm m, \pm n, \pm k_x)\,,\quad \overline{m} = (m, -n, k_x)\,,\quad m' = (m, n, -k_x)\,,\quad \overline{m}' = (m, -n, -k_x)\,;$$
$$2m = (2m, 2n, 2k_x)\,,\quad 2\overline{m}' = (2m, -2n, -2k_x)\,,\quad 0_{\text{II}} = (0, 2n, 2k_x)\,,$$
$$\overline{0}'_{\text{II}} = -0_{\text{II}}\,,\quad 0_\perp = (m, 0, k_x)\,. \qquad (26)$$

Коэффициент (нелинейный матричный элемент) нелинейного кубического самовоздействия, соответствующего распадному процессу по частоте и волновым векторам $(m)+(m)+(-m)=(m)$, состоит из трёх слагаемых $S_{mm} = R_\kappa(\kappa,\kappa,-\kappa) + R_\kappa(\kappa,-\kappa,\kappa) + R_\kappa(-\kappa,\kappa,\kappa)$. При вычислении вклада различных кубических нелинейных матричных элементов замечаем, что если они получаются при учете вторых степеней нормальной функции (содержат волнистую черту в обозначениях формул (19-23)), то дают вклад, пропорциональный b_κ^2 и $b_\kappa^2\eta_\kappa$, а такими слагаемыми пренебрегается. Учитываем только слагаемые порядка b_κ и $b_\kappa\eta_\kappa$. В этом приближении, с учетом приведенного ниже порогового соотношения (40), получаем

$$S_{mm} = (1+t_i)b\eta\left[n^2\left(-5k_\perp^4 + 8k_1^4\right) - (3/2\eta)y_e\omega_{ne}\omega_m k_\perp^2 - i2y_e\omega_{ne}\left(4k_1^4 - k_\perp^4\right)\right]. \qquad (27)$$

Фактически нами вычислен нелинейный добавок к инкременту волны с частотой и волновым вектором $\kappa = (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$, где $\vec{k} = (m, n, k_x)$, учитывающий самовоздействие волны кубическими членами. Из выражения для самовоздействия видно, что при значениях k_x^2, находящихся вне интервала, определяемого неравенством $-5k_\perp^4 + 8\left(k_x^2 - m^2\right) < 0$, кубическая нелинейность оказывает стабилизирующее воздействие. В остальных случаях, в частности при $k_x^2 \approx m^2$, кубическая нелинейность дестабилизирует колебания. Отметим, что без учета членов от $R_{1\xi}$, (24), в кубическом матричном элементе для самовоздействия получается выражение $\operatorname{Re} S_{\kappa\kappa}[R_1] = (1+t_i)b\eta\, n^2\left(-5k_\perp^4 + -k_1^4\right) < 0$, которое приводит к дестабилизации волн при любом соотношении между k_x^2 и m^2, что было получено в работе [33]. Можно показать, что эта кубическая нелинейность, получающаяся в результате зависимости ионной вязкости от квадрата плотности, является дестабилизирующей и при больших амплитудах колебаний. Такое её воздействие называют эффектом отрицательной ионной вязкости и при нелинейном дестабилизирующем воздействии волны накачки его используют для генерации иных волн [42]. Таким образом, изменение нелинейных матричных элементов благодаря учету зависимости нормальных функций от неоднородной координаты является существенным.

Из безразмерных параметров (4), невозмущенной плотности и компонент волнового вектора составим безразмерные параметры нелинейной теории. Для дальнейших ссылок введём для них названия, подчеркивающие характерную зависимость от размерных параметров плазмы:

$$p = y_e/\eta = 1{,}7(2t_i m_e / m_i)^{1/2}\left(L_{\text{II}}^2 / L_{\perp}^2\right) \text{ —} \tag{28}$$

параметр, пропорциональный отношению квадратов продольного и поперечного размеров плазмы;

$$q = y_e\eta = \lambda b, \qquad q_\kappa = y_e\eta\, k_{\perp}^2 / n^2 \equiv \lambda_{ei} b_\kappa \text{ —} \tag{29}$$

комбинированный параметр плотности, магнитного поля и температуры, который распадается на произведение параметра магнитного поля b_κ и параметра плотности, равного

$$\lambda_{ei} = \lambda / n^2\,, \quad \lambda = 0{,}15\, t_i^{3/2}\sqrt{m_e / m_i}\,\nu_{ei} L_{\text{II}}^2 \Big/ \left(4\pi^2 \mathrm{v}_{Te}\mathrm{v}_{Ti}\tau_{ii}\right) \tag{30}$$

и пропорционального отношению квадрата продольного размера к длинам свободного пробега электронов и ионов. Влияние поперечного электронно-ионного трения на колебания характеризует параметр поперечного трения, обратная величина которого равна

$$1/p\zeta = b\eta/\zeta^e = 0{,}3\sqrt{2m_i/(t_i m_e)}\,, \quad \text{где} \quad \zeta^e = 1/\omega_{He}\tau_{ei}\,. \tag{31}$$

Добавление индекса κ к параметрам означает переход к масштабам волновых возмущений в плазме

$$b_\kappa = bk_{\perp}^2, \quad p\zeta_\kappa = p\zeta \,/\, k_{\perp}^2\,. \tag{32}$$

Линейные пороговые соотношения. Локализация волн

Дисперсионное уравнение дрейфово-диссипативной неустойчивости содержит как мнимую, так и вещественную части, приведенные в формулах (17), (18). Входящая в них частота ω_m (25) включает в себя доплеровский сдвиг вследствие электрического дрейфа плазмы. На нейтральной кривой устойчивости дисперсионное уравнение удовлетворяется вещественным значением частоты. При этом мнимая и вещественная части дисперсионного уравнения приводят к выражениям для критических частоты и квадрата градиента логарифма плотности:

$$\omega_m^{cr} = \omega_{ne}\left(1 - t_i b_\kappa q_\kappa\right)/\left[1 + b_\kappa\left(1 + t_i + q_\kappa\right)\right], \qquad \omega_{ne} = -mN\,, \tag{33}$$

$$N^2 = N_{cr}^2(m) \equiv \frac{\tilde{\eta} n^2\left[1 + b_k\left(1 + t_i + q_\kappa\right)\right]^2}{m^2 y_e\left(1 - t_i b_\kappa q_\kappa\right)\left(1 + t_i q_\kappa\right)} \approx \frac{1 + p\zeta_\kappa}{pm^2} k_{\perp}^2 n^2\left[1 + \left(2 + t_i\right) b_\kappa\left(1 + q_\kappa\right)\right], \tag{34}$$

где $\tilde{\eta} = \eta\left(1 + p\zeta_\kappa\right)$. Соотношение (34) содержит две степени разложения по малому параметру задачи b_κ. Выход на порог осуществляется посредством стабилизации поперечными ионной вязкостью в линейной теории и поперечной силой электронно-ионного трения. Отношение стабилизирующего и дестабилизирующего факторов представлено посредством параметров, задаваемых формулами (28), (29) и (31).

Выражение для частоты в линейной теории понимают в некотором локальном смысле, то есть справедливым в точке локализации колебаний x_0, определяемой уравнением $\left(\partial F/\partial x\right)\big|_{x=x_0} = 0$, где функция F находится из уравнения (33), решаемого относительно k_x^2 с заменой $\omega_m^{cr} \Rightarrow \omega_m$: $k_x^2 = F\left(x, \omega, ...\right)$, $k_x(x) = \left[F_0 + \left(x - x_0\right)^2 F_0'' / 2 + ...\right]^{1/2}$. Из требования однозначности решения следует условие квантования между точками поворота $\int_{x_-}^{x_+} k_x dx' = \pi\, l$, где $k_x\left(x_\pm\right) = 0$ и l – целые числа [43], [4]. Отсюда, с учетом разложения в точке локализации, находим

$$k_x^2\left(x_0\right) \equiv F\left(x_0, \omega, ...\right) = l\sqrt{-2F_0''}\,. \tag{35}$$

Если в (35) пренебречь малыми градиентами невозмущённых величин, то получается локальное дисперсионное уравнение, справедливое в точке локализации, $\operatorname{Im} D\left(k_x = 0, x_0, \omega, ...\right) = 0$. Если же в правой части уравнения (35) удержать вторые производные от F_0, то получится квазилокальное дисперсионное уравнение с $k_x\left(x_0\right) \neq 0$, справедливое в указанной выше точке локализации. При некоторых нелинейных механизмах стабилизации, когда нелинейные соотношения квадратные по компоненте волнового вектора k_x, можно поступить аналогично изложенному квазилокальному методу для нахождения частоты. Тогда нелинейное дисперсионное соотношение можно считать выполненным в некоторой точке локализации. В общем случае это несправедливо, что можно усмотреть как из основного нелинейного уравнения для волн, среди нелинейных членов которого есть линейные по k_x так и из исходной системы нелинейных уравнений, не симметричной относительно замены $x \to -x$.

В линейной теории дисперсионная функция обращается в нуль при комплексных значениях частоты,

$\omega_m = \omega_m^L + i\gamma_\kappa$. Так как $|D'_\kappa| << |D''_\kappa|$ вблизи порога неустойчивости, то $|\gamma_\kappa| << \omega_m^L$. Следовательно, значение инкремента в линейной теории равно

$$\gamma_\kappa = D'_\kappa\left(\omega_m^L, \vec{k}\right) \Big/ \left(\partial D''/\partial\omega_m\right) = b_\kappa\left(1+t_i\right)\tilde{\eta}_\kappa d'_m\left(1+O\left(b_\kappa\right)\right), \text{ где } d'_m = N^2 \Big/ N_{cr}^2(m) - 1. \quad (36)$$

Последнее выражение в строке (36) определяет градиентный параметр надкритичности d'_m. Формула для частоты ω_m^L совпадает с формулой пороговой теории (33) и теперь в ней стоит вместо критического истинное значение градиента плотности в $\omega_{ne} = -mN$. Вблизи частоты линейной теории, $\left|\partial D''_\kappa/\partial\omega_m\right| << \left|\partial D''_\kappa/\partial\omega_m\right|$, имеем такое разложение для дисперсионной функции:

$$D_\kappa = \left(\partial D''_\kappa \Big/ \partial\omega_m^L\right)\left(\gamma_\kappa + i\beta_\kappa\right); \qquad \beta_\kappa = \omega_m - \omega_m^L. \quad (37)$$

Здесь величина β_κ представляет собой нелинейный сдвиг частоты.

Для вторых гармоник неустойчивых волн условие распада по частоте в линейной теории выполняется с малым "рассогласованием," которому пропорциональна реактивная (мнимая) часть дисперсионной функции. Пороговое значение дисперсионной функции второй гармоники при $\beta_{2m} = \omega_{2m} - 2\omega_m^L = 0$ равно

$$D_{2m} \equiv D_\kappa\left(2\omega_m^L, 2\vec{k}\right) = 24n^2 b_\kappa\left(1+t_i\right)\omega_m^L\, d_{2m}; \qquad d_{2m} = -2\eta_\kappa \Big/ \omega_m^L + i\left(1+q_\kappa\right). \quad (38)$$

При получении этого соотношения использованы пороговые соотношения (33), (34) и малость b_κ.

Градиентный параметр надкритичности d'_m (36) следует выразить через параметр надкритичности магнитного поля, так как эксперименты обработаны по отношению к критическому магнитному полю возбуждения неустойчивости.

Из уравнения для нейтральной кривой устойчивости (34) находим критическое значение параметра магнитного поля как функцию параметра неравновесности: $b_{cr}(\kappa) = \left[-1 + \left(1 + 4\lambda_{ei}\Delta p_N\right)^{1/2}\right] \Big/ \left(2\lambda_\kappa\right)$, где $\lambda_\kappa = \lambda_{ei}k_\perp^2$,

$$\Delta p_N = \left(p_N - 1\right)/\left(2 + t_i\right) \text{ и } p_N = pN^2 \Big/ \left[n^2\left(1 + p\zeta_\kappa\right)\right]. \quad (39)$$

Из условия близости N^2 к пороговому значению вытекает связь между градиентным и магнитным параметрами надкритичности $d'_m = \left(2+t_i\right)\left(1+2q_\kappa\right)m^2\left(b_{cr}(m) - b\right)$. Магнитный параметр надкритичности выражается, в свою очередь, через параметр надкритичности магнитного поля Δ_H, а именно: $b_{cr}(m) - b = 2b_{cr}(m)\Delta_H$, где $\Delta_H = \left[H - H_{cr}(m)\right]/H_{cr}(m)$. Здесь Δ_H зависит от внешнего магнитного поля и критического поля возбуждения волны, $H_{cr}^2 = 4\pi^2 m_i c^2 T_{e0} \Big/ \left[e^2 b_{cr}(m) L_\perp^2\right]$. При заданных значениях параметра неравновесности Δp_N, отношения k_x/m и аксиального числа n критические значения магнитного поля эквидистантны.

Нелинейные матричные элементы

Вычисление коэффициентов нелинейного взаимодействия волн (нелинейных матричных элементов) заключает в себе некоторые особенности. Матричный элемент, описывающий возбуждение второй гармоники волны её первой гармоникой, совпадает со своим парциальным значением $V(m,m) = V_{2m}(m,m)$. Остальные матричные элементы, описывающие трёхволновое взаимодействие, состоят из суммы двух парциальных, $V(m,j) = V_{m+j}(m,j) + V_{m+j}(j,m)$. Для упрощения вычислений используются соотношения между параметрами волн, находящихся вблизи порога неустойчивости. Соотношение для градиентного параметра неравновесности $p_N = pN^2 \big/ n^2 \approx 1$, (39), с точностью до малых членов порядка b_κ, следует из формулы (34). В ином виде приведём его вместе с соотношением, отражающим ту же близость параметра неравновесности (39) к порогу неустойчивости,

$$y_e\omega_{ne}^2 \big/ n^2 = \tilde{\eta}_\kappa\left(1 + O\left(b_\kappa\right)\right) \text{ и } \left(\eta_\kappa/\omega_m\right)^2 \approx y_{en}\tilde{\eta}_\kappa\omega_m^{-1} \approx q_\kappa \big/ \left(1 + p\zeta_\kappa\right), \quad (40)$$

где $\tilde{\eta}_\kappa = \eta_\kappa \big/ \left(1 + p\zeta_\kappa\right)$ и $y_{en} \equiv y_e\omega_{ne} \big/ n^2$. Для близких к порогу неустойчивости волн нормальные функции первого приближения, содержащие малые слагаемые в нелинейных матричных элементах, также упрощаются: $\xi_\kappa^{(1)} \approx \left(1+t_i\right)a_\kappa$. Для больших нелинейных слагаемых вычисляем разность $\xi_m^{(1)} - \xi_{\bar{m}}^{(1)}$ с точностью до членов порядка $b_\kappa\eta_\kappa$ включительно. Выпишем коэффициенты, определяющие нелинейное взаимодействие дрейфовой волны и её второй гармоники:

$$V(m,m) = -4in^2\left(1+t_i\right)b_\kappa\omega_m\left[1 + q_\kappa\left(3 + Z^2\right) + i\frac{\eta_\kappa}{\omega_m}\left(5 + Z^2\right)\right], \text{ где } Z = \left(k_x^2 - m^2\right) \Big/ k_\perp^2, \quad (41)$$

$$V(2m,-m) = i2n^2(1+t_i)b_\kappa \omega_m \left[1 = q_\kappa\left(-3+8Z^2\right) + i\frac{\eta_\kappa}{\omega_m}\left(19-8Z^2+\frac{9}{2}p\zeta_\kappa\right)\right]. \qquad (42)$$

Нелинейные коэффициенты $U_{11}(\kappa',\kappa'') = k'_x m'' - k''_x m'$, получаемые из уравнения непрерывности от электрического дрейфа ионов, не дают большой вклад в приведенные выше матричные элементы, которые вычислены в линейном приближении по малому параметру b_κ. (Параметр $q_\kappa = b_\kappa \lambda_{ei}$ может быть произвольным из-за возможных больших значений λ_{ei}.)

В нелинейный матричный элемент $V(0,\overline{m}')$ основной вклад даёт электрический дрейф в уравнении непрерывности ионов. Приведём его значение в пренебрежении малыми членами порядка b_κ : $V(0,\overline{m}') = n^2(1+t_i)2mk_x(1+p\zeta_\kappa)$. Нелинейный коэффициент U_{11} приводит к малому реактивному слагаемому в матричном элементе $V(m,-\overline{m}')[U_{11}] = i16n^2(1+t_i)(b_\kappa \eta_\kappa/\omega_{ne})(1+p\zeta_\kappa)$, описывающем возбуждение нуль-частотных мод:. Это слагаемое отлично от нуля вследствие включения в нормальную функцию диссипативной части. В отличие от работы [17], учет производной нормальной функции по неоднородной координате вместе с квадратными членами от ионной вязкости даёт диссипативный вклад. Полный нелинейный матричный элемент равен $V(m,-\overline{m}') = 16n^2(1+t_i)b\eta\left[imk_x k_\perp^2(1+p\zeta_\kappa)/\omega_{ne} + k_1^2\left(k_1^2+2k_\perp^2+p\zeta\right)\right]$. Отметим особую важность реальной части этого соотношения. Она приводит к устойчивости доминирующей дрейфовой волны в стационарной нелинейной структуре по отношению к возбуждению продольных нуль-частотных мод $(m=0)$ и в предыдущих работах не учитывалась. Другие матричные элементы можно получить с помощью замены знаков компонентов волновых чисел, например: $V(\overline{m}',\overline{m}') = V(m,m)\{k_x \to -k_x, n \to -n\}$; $V(-j,-l) =$ $V(-j,-l) = V^*(j,l)\{\vec{k} \to -\vec{k}\}$; $V(-0,m) = V(0,\overline{m}')\{k_x \to -k_x, n \to -n\}$.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНАЯ СТРУКТУРА

О редукции системы уравнений

Основное нелинейное уравнение для волн представляет собой систему уравнений для комплексных амплитуд со многими состояниями равновесия (наборами стационарных значений амплитуд). В частности, основное уравнение для волн удовлетворится, если в стационарном режиме выбрать среди волн, неустойчивых в линейной теории, только одну основную, доминирующую (как окажется в результате исследования устойчивости нелинейного стационарного режима) волну с амплитудой, отличной от нуля. Амплитуды остальных волн как устойчивых в линейной теории, так и неустойчивых, с волновыми векторами, не кратными волновому вектору доминирующей волны, равны нулю.

Доминирующая волна и её гармоники удовлетворяют бесконечной системе уравнений. При изучении стационарной дрейфово-диссипативной структуры возникает вопрос о выделении конечного числа уравнений для этой волны. Важно то, что высшими гармониками можно пренебречь. Физической причиной отбрасывания высших гармоник является их стабилизация вязкостью. Если в качестве малого параметра принять такое значение параметра надкритичности (см. (36)), $d'_m \sim b_{cr}(m) \sim \varepsilon \ll 1$, когда он имеет порядок величины критического значения малого параметра магнитного поля b_κ, то дисперсионные функции доминирующей волны и её гармоник, а также нелинейные матричные элементы имеют следующие порядки малости:

$$|D_m| \sim \varepsilon^2, \qquad |D_{j.m}| \sim |V(\kappa',\kappa'')| \sim |S_{mm}| \sim \varepsilon; \quad j = 2,3,... \qquad (43)$$

Из системы зацепляющихся уравнений для гармоник следует, что порядок малости амплитуд высших гармоник по сравнению с амплитудой доминирующей волны увеличивается с номером гармоники. Поэтому в старшем порядке теории возмущений достаточно ограничиться системой уравнений для амплитуды доминирующей волны и её второй гармоники:

$$\hat{D}_m a_m = V(2m,-m)a_{2m}\, a_{-m} + S_{m\,m} a_m |a_m|^2, \; \hat{D}_{2m}\, a_{2m} = V(m,m)\, a_m^2; \; \hat{D}_j = i\frac{\partial D_j}{\partial \omega_j}\frac{\partial}{\partial t} + D_j. \qquad (44)$$

Такая же система уравнений получается, если все величины в оценочных формулах (43) имеют нулевой порядок малости, кроме $|D_m| \ll 1$. Наряду с этим, для устойчивости стационарного решения для амплитуды в рамках системы уравнений (44) необходимо, чтобы вторая и более высокие гармоники затухали в линейной теории [44]. В противном случае нужно привлекать к рассмотрению третью и более высокие затухающие гармоники.

Вычисление амплитуды доминирующей волны

Нелинейная частота и стационарный уровень амплитуды доминирующей волны определяются получаемым из системы (44) комплексным уравнением, которое выпишем в одной строке с суммой коэффициентов нелинейного взаимодействия и самовоздействия волны

$$D_m\, a_m^0 = W_{mm}\left|a_m^0\right|^2 a_m^0, \qquad W_{mm} = V(m,m)V(2m,-m)/D_{2m} + S_{mm}. \tag{45}$$

Частота в нелинейной теории мало отличается от частоты линейной теории. Нелинейный сдвиг частоты пропорционален b_κ^2, и им надо пренебречь. Таким образом, можно пользоваться формулой линейной теории для частоты (33). Из оценки порядков величины в уравнении (45) следует, что для нахождения амплитуды необходимо использовать вещественную часть этого уравнения. В нелинейный коэффициент уравнения (45) следует подставить значение частоты $\omega_m = \omega_{ne}$.

Обе части уравнения (45) можно сократить на малый сомножитель и ввести новые матричные элементы w_V, коэффициенты самовоздействия s_{mm} и реальную часть дисперсионной функции:

$$V(m,m)V(2m,-m) = 8n^4(1+t_i)^2 b_\kappa^2 \omega_m^2 w_V; \tag{46}$$

$$S_{mm} = (1+t_i)b_\kappa^2\, \eta_\kappa n^2\, s_{mm}; \qquad \operatorname{Re} D_m = (1+t_i)b_\kappa\, \tilde{\eta}_\kappa\, n^2 d'_m. \tag{47}$$

При вычислении произведения квадратных матричных элементов (46) также используем соотношения (40). Вещественной и мнимой частью нового коэффициента, составленного из квадратных матричных элементов, являются значения

$$w'_V = 1 - q_\kappa(1+p\zeta_\kappa)^{-1}\left[89 + 5Z^2 - 16Z^4 + p\zeta_\kappa\left(\frac{33}{2} + 16Z^2\right)\right] - q_\kappa^2\left(8Z^2 - 3\right)\left(3 + Z^2\right), \tag{48}$$

$$w''_V = \frac{\eta_\kappa}{\omega_m}\left[6\left(4 - Z^2\right) + q_\kappa\left(72 - 39Z^2 - 24Z^4 + \frac{9}{2}p\zeta\left(3 + Z^2\right)\right)\right]. \tag{49}$$

Вводя новый коэффициент нелинейного воздействия, и выражая его через коэффициенты, представленные формулами (46) – (49) и (38), получаем выражения, в которых d_{2m}^* означает комплексное сопряжение величины d_{2m}:

$$W_{mm} = (1/3)n^2 b_\kappa(1+t_i)\,\omega_m\left|d_{2m}\right|^{-2} w_{mm}, \text{ где } w_{mm} = \omega_V d_{2m}^* + 3(\eta_\kappa/\omega_m)s_{mm}\left|d_{2m}\right|^2.. \tag{50}$$

Уравнение для квадрата модуля амплитуды приобретает вид $3d'_m\tilde{\eta}_\kappa/\omega_m = \left|a_m^0\right|^2 \operatorname{Re} w_{mm}\left|d_{2m}\right|^{-2}$. Вынося сомножитель $\tilde{\eta}_\kappa/\omega_m$ из слагаемых $\operatorname{Re} w_{mm}$, после сокращения на него обеих сторон этого уравнения и введения обозначения для полинома $Q\left(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa\right) = (\omega_m/\eta_\kappa)\operatorname{Re} w_{mm}$ находим выражение для квадрата модуля амплитуды

$$\left|a_m^0\right|^2 = 3\,d'_m\left|d_{2m}\right|^2 \Big/ Q\left(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa\right). \tag{51}$$

Формула для полинома получается после простых, но трудоёмких вычислений:

$$Q\left(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa\right) = 7 + 18Z^2 + q_\kappa\left(184 + 109Z^2 - 56Z^4\right) + q_\kappa^2\left(39 + 27Z^2 - 8Z^4\right) +$$
$$+ p\zeta_\kappa\left[2{,}5 + 18Z^2 + q_\kappa\left(188{,}5 + 37Z^2 - 56Z^4\right) + q_\kappa^2\left(48 + 31{,}5Z^2 - 8Z^4\right)\right] + O\left(p_{\zeta\kappa}^2\right). \tag{52}$$

Здесь использованы обозначения (29) – (32), (41) и (42), а также $\left|d_{2m}\right|^2 = (1+q_\kappa)^2 + 4q_\kappa/(1+p\zeta_\kappa)$.

Амплитуда второй гармоники, участвующей в стабилизации доминирующей волны, вычисляется аналогичным способом и пропорциональна b_κ. Однако влияние этой гармоники на явления аномального переноса мало в силу малости амплитуды, поэтому её вычисление не проводим.

Исследование уровня амплитуды доминирующей волны

Квадрат модуля стационарной амплитуды доминирующей волны (51) можно представить в виде произведения параметра надкритичности этой волны и некоторой амплитудной функции:

$$\left|a_m^0\right|^2 = \left(N^2/N_{\text{cr}}^2 - 1\right)f(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa), \qquad f(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa) = 3\left|d_{2m}\right|^2\left|d_{2m}\right|^2 \Big/ Q(q_\kappa, Z^2, p\zeta_\kappa). \tag{53}$$

Квадрат критического градиента логарифма плотности N_{cr}^2, (34), кроме компонент волнового вектора, является функцией четырёх безразмерных параметров: масштабного параметра (28), параметра магнитного поля b_κ, параметра плотности (30) и параметра поперечного трения (31), (32). В зависимости от значений внешних параметров плазмы наиболее сильные изменения в формуле (53) претерпевает градиентный параметр надкритичности. Значение градиента логарифма плотности N определяется балансом притока плазмы и её ухода вследствие классической диффузии и специфического переноса плазмы, а именно, её аномальной, волновой конвекции. Не останавливаясь здесь на связи явления перестройки волн и аномальной конвекции и их влияния на значение градиента логарифма плотности, считаем N заданной величиной.

В формуле для квадрата модуля амплитуды (53) амплитудная функция зависит только от комбинированного параметра плотности и магнитного поля (29), параметра поперечного трения, а также от параметра Z, (41), характеризуещего отличие длины волны вдоль неоднородности от азимутальной длины волны. Особенность зависимости Z от $h = k_x/m$ состоит в том, что при изменении h в довольно широких пределах от 0,7 до 1,7 величина Z^2 отличается от нуля не более чем на 0,03. По этой причине естественно исследовать значения амплитудной функции при $Z = 0$ отдельно. Наоборот, при больших и малых значениях h параметр Z медленно приближается к единице. Тем не менее, рассмотрим в качестве второго предельного случая $Z = 1$.

Приведём числовые результаты вычислений амплитудной функции f. Самым интересным свойством этой функции является её слабая зависимость от параметра плотности и магнитного поля в определённой области его значений. А именно, при уменьшении от очень больших значений до $q_\kappa = 0{,}5$ амплитудная функция медленно возрастает от 0,08 до 0,117, то есть менее чем в полтора раза. Поэтому можно принять $f(q_\kappa > 0{,}5; Z = p_{\zeta\kappa} = 0) \approx 0{,}1$ с относительной точностью большей чем 20%, что приводит к изменениям амплитуды, приблизительно равным 10%. Такие изменения находятся внутри пределов погрешности измерений на Q – машине [11]. Другие частные значения амплитудной функции таковы: $f(q_\kappa = 0{,}1;\ Z = p_{\zeta\kappa} = 0) \approx 0{,}19$, $f(q_\kappa > 0{,}05;\ Z = p_{\zeta\kappa} = 0) \approx 0{,}24$ и $f(q_\kappa << 0{,}1;\ Z = p_{\zeta\kappa} = 0) \approx 0{,}43$. Отметим, что слишком малые значения параметра плотности, $(q_\kappa/b_\kappa)(m_i/m_e)^{1/2} \le 1$, находятся вне пределов применимости гидродинамического описания продольного движения частиц плазмы. Со стороны больших значений параметр q_κ также ограничен, $q_\kappa << \lambda_{ei}$, вследствие использования этого условия при итерации уравнений поперечного движения.

Для значений $Z = 1$ амплитудная функция при уменьшении параметра q_κ от значений $q_\kappa >> 10$ до $q_\kappa = 0{,}5$ увеличивается от 0,05 до 0,08. Для малых значений, а именно, для $q_\kappa \le 0{,}1$ амплитудная функция уменьшается в два-три раза при $Z = 1$ по сравнению со своими значениями при $Z = 0$.

Поперечное трение служит добавочным стабилизирующим фактором, и для значений параметра поперечного трения, близких к единице, амплитудная функция уменьшается приблизительно в два раза. Однако произведения матричных элементов вычислены с точностью до линейных по $p_{\zeta\kappa}$ членов включительно, поэтому в полиноме (52) справедливо пользоваться малыми значениями этого параметра. Из числовых расчетов следует, что при $p_{\zeta\kappa}$=0,2 и значениях q_κ в интервале от 0,5 до очень больших значений амплитудная функция приблизительно равна 0,09. Такое же влияние оказывает учет поперечного трения и при $Z = 1$.

Универсальность значений квадрата амплитуды доминирующей волны объясняется следующим образом. Согласно формуле (53) квадрат модуля амплитуды составляется из произведения параметра надкритичности и амплитудной функции. (Область изменений параметра надкритичности требует учета температурных возмущений и будет рассмотрена в отдельной работе.) Амплитудная функция пропорциональна отношению квадратных трёхчленов, представленных формулами (52) и (53). Коэффициенты при степенях трёхчленов, содержащие зависимость от более мелкого масштаба пространственного размера возмущений на удвоенной гармонике, то есть от большей величины волнового вектора $\vec{k}_{2m} = 2\vec{k}_m$, меняются не очень сильно. Это отражено как в нелинейных матричных элементах (41) и (42), так и в выражениях (33) и (37). Отношение двух квадратных трёхчленов при изменении параметра q_κ изменяется как отношение коэффициентов этих трёхчленов при малых и больших q_κ, то есть также не очень сильно.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследованы когерентные нелинейные диссипативные структуры в плазме, включающие волны, неустойчивые в линейной теории. Проведен выбор модельной системы уравнений и выведено, в результате регуляризации теории возмущений, основное нелинейное уравнение для волн. Дисперсия волн, инкременты их неустойчивости (декременты затухания) определяются градиентом логарифма невозмущенной или неравновесной плотности плазмы. В разделе о линейных и нелинейных соотношениях пороговой теории изучено самовоздействие волн кубическими нелинейностями, которые являются дестабилизирующими без добавок, полученных от регуляризации теории возмущений. Исследованы пороговые соотношения линейной теории.

Регуляризация нелинейной теории возмущений для низкочастотных градиентных колебаний плазмы произведена по двум пунктам. Во-первых, в нормальные функции включены диссипативные линейные и нелинейные части. Во-вторых, учтена зависимость нормальных функций от неоднородной координаты. И нелинейные слагаемые основного уравнения для волн определяются как собственными нелинейными членами уравнений, так и новыми нелинейными членами, найденными от производных нормальной функции (15).

Такой способ получения нелинейных слагаемых в основном уравнении для волн представляет собой своего рода регуляризацию теории возмущений, учитывающую наличие в системе нелинейных и диссипативных членов разных порядков малости и их зависимостей от неоднородной координаты. Полученные нелинейные слагаемые основного уравнения ответственны за нелинейную стабилизацию неустойчивых в линейной теории волн. Кроме того, и это самое важное с физической точки зрения, такая перестройка теории возмущений позволяет развить последовательную нелинейную теорию, в которой одни и те же факторы позволяют найти аномальную волновую конвекцию вдоль неоднородной координаты и объяснить механизм стабилизации на конечном уровне амплитуды дрейфовых волн, неустойчивых в линейной теории.

К стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости приводит совместное действие всех трёх известных причин, а именно: 1) кубическое самовоздействие волны с регуляризацией посредством учета в нормальной функции диссипативной части; 2) линейное и нелинейное затухание второй гармоники с квадратными матричными элементами, регуляризованными в результате учета производной от нормальной функции по неоднородной координате; и, наконец, 3) отличие, в линейной теории, дисперсии дрейфовой волны от линейного закона, например, по азимутальной компоненте волнового числа, в результате чего $\mathrm{Im}\, D_{2m} \neq 0$.

Нелинейная дрейфово-диссипативная структура состоит из доминирующей дрейфовой волны и синхронной с ней её второй гармоники. В результате вычислений в рамках редуцированной системы уравнений для квадрата модуля стационарной амплитуды доминирующей волны получено аналитическое выражение, равное произведению параметра надкритичности и амплитудной функции. Уровень амплитуды волны характеризуется универсальными значениями в широком диапазоне значений комбинированного параметра плотности и магнитного поля (29) (такой уровень амплитуды и его универсальность соответствуют измеренным значениям в широком круге экспериментальных исследований [11-14]). Физической причиной универсальности значений амплитудной функции является нелинейный механизм стабилизации доминирующей волны посредством перекачки энергии её колебаний в затухающую в линейной теории вторую гармонику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moiseev S.S., Sagdeev R.Z. O koeffitsiente diffuzii Boma // ZhETF. – 1963. - T.44. - C.763.
2. Bohm D., Burhop E., Massy H.S.W., Williams R. The Characteristics of electrical discharge in magnetic fields // Eds. Gutrie and R.K. Wakerling. – 1949. – New York etc.: Mc Grow-Hill. – 376 p.
3. Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N. Finite Larmor Radius Stabillization of "Weaklly" Unstable Confined Plasmas // Nucl. Fusion, Suppl., pt.1 - 1962. - P.143.
4. Mikhaylovskiy A.B. Kolebaniya neodnorodnoy plazmy / Voprosy teorii plazmy, vyp.3. / Pod red. M.A. Leontovicha. – M.: Gosatomizdat. - 1963. - S. 141-202.
5. Moiseev S.S., Sagdeev R.Z. Vliyanie konechnoy provodimosti na ustoychivost' plazmy v magnitnom pole // ZhTF. – 1964. - T.34. - C.248-253.
6. Rukhadze A.A., Silin V.P. Kineticheskaya teoriya dreyfovo-dissipativnykh neustoychivostey plazmy // UFN. – 1968. - T.96. - C.87.
7. Zaslavskiy G.M., Moiseev S.S. Ob anomal'noy diffuzii plazmy v magnitnom pole // ZhTF. – 1964. - T.34. - C.410-418.
8. Pearlstein L.D., Berk H.L. Universal Eigenmode in a Strongly Sheared Magnetic Field // Phys. Rev. Lett. - 1969. - Vol.23. - P.220-222.
9. Kroll N. Dreyfovye volny / Fizika vysokotemperaturnoy plazmy / Pod redaktsiey M.S. Rabinovicha. - M.: Mir, 1972. - S. 112-171.
10. Chen L., Guzdar P.N., Hsu J.Y., Kaw P.K., Oberman C., White R. Theory of Dissipative Drift Instabilities in Sheared Magnetic Fields // Nucl. Fusion. – 1979. - Vol.19. - P. 373-387.
11. Hendel H.W., Chu T.K., Politzer P.A. Collisional drift waves - identification, stabilization and enhanced plasma transport // Phys. Fluids. – 1968. - Vol.11. - P.2426-2439.
12. Chu T.K., Hendel H.W., Politzer P.A. Measurement of enhanced plasma losses caused by collisional drift waves // Phys. Rev. Lett. – 1967. - Vol.19. - P.1110-1113.
13. Hendel H.W., Chu T.K., Politzer P.A. Methods of Experimental Physics. Vol.9, Part A / Ed. H.R. Griem, R.H. Lovberg. - N.-Y., London: Academic Press., 1970. – P .377.
14. Ellis R.F., Motley R.W. Current-driven Collisional Drift Instability // Phys. Fluids. – 1974. - Vol.17. - P. 582-594.
15. Stix T.H. Finite Amplitude Drift Waves // Phys. Fluids. – 1969. - Vol.12. - P.627; Phys. Rev. Lett. – 1968. - Vol. 20. - P.1422.
16. Hinton F.L., Horton C.W. Amplitude Limitation of a Collisional Drift Wave Instability // Phys. Fluids. – 1971. - Vol.14. - P.116-123.
17. Monticello D.A., Simon A. Nonlinear Theory of the Collisional Drift-Wave Instability // Phys. Fluids. – 1974. - Vol.17. - P. 791-802.
18. D'Andzhelo N. Issledovanie tsezievoy plazmy / Fizika vysokotemperaturnoy plazmy / Pod redaktsiey M.S. Rabinovicha. M.: Mir, 1972. - S. 214-261.
19. Naumovets V.G., Pasechnik L.L., Popovich S.A. Issledovanie dreyfovo-dissipativnoy neustoychivosti v ogranichennoy gazorazryadnoy plazme // ZhTF. – 1972. - T. 42. - C. 270.
20. Yoshihara H., Iwayanagi T., Taniuti T. Nonlinear Collisional Drift-Waves near the Neutral Stable Points // J. Phys. Soc. Japan. – 1981. - Vol.50. - № 11. - P. 3751-3758.
21. Bondarenko V.E., Chechkin A.V. Dreyfovo-dissipativnaya neustoychivost' v slaboionizovannoy plazme vblizi poroga voz-

buzhdeniya // Fizika plazmy. – 1988. - T. 14, vyp. 9. - C. 1084-1093.
22. Vasil'ev A.A., Zaslavskiy G.M., Sagdeev R.Z., Chernikov A.A. O nelineynoy stadii dreyfovo-dissipativnoy neustoy-chivosti // Fizika plazmy. – 1990. - T. 16. - C. 1176-1185.
23. Mattor N., Diamond P.H. Drift wave propagation as a source of plasma edge turbulence: Slab theory // Phys. Plasmas. – 1994. - Vol. 1 (12). - P. 4002-4013.
24. Stoker Dzh. Dzh. Volny na vode. Matematicheskaya teoriya i prilozheniya. - M.: IIL, 1959. – 617s.
25. Larichev V.D., Reznik G.M. // DAN SSSR. – 1976. - T. 231. - C. 1077-1079.
26. Horton W. Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma // Phys. Reports. – 1990. - Vol.192., № 1-3. – R.177.
27. Meiss J.D., Horton W. Solitary drift waves in presence of magnetic shear // Phys. Fluids. – 1983. - Vol.26(4). - P.990-997.
28. Petviashvili V.I., Pogutse I.O. Vortices and nonlinear instabilities in inhomogeneous plasma // Reviews of Plasma Physics. Vol.20 / Edited by B.B. Kadomtsev. – N.Y.-London: Consultants Bureau. New York-London. – 1997. - P. 1-60.
29. Kono M., Miyashita E. Modon formation in the nonlinear development of the collisional drift wave instability // Phys. Fluids. – 1988. - Vol. 31(2). - P. 326-331.
30. Landau L.D. Kineticheskoe uravnenie v sluchae kulonovskogo vzaimodeystviya // ZhETF. – 1937. - T. 7. - C.203 -209.
31. Braginskiy V.B. Yavleniya perenosa v plazme / Voprosy teorii plazmy, vyp.1. - M. Atomizdat, 1963. - S. 183-272.
32. Mikhaylovskiy A.B. Neustoychivosti neodnorodnoy plazmy. Teoriya plazmennykh neustoychivostey. T.2. – Neustoychivo-sti neodnorodnoy plazmy. – M.: Atomizdat, 1977. - S. 360.
33. Vodyanitskiy A.A. O nelineynoy teorii dreyfovo-dissipativnoy neustoychivosti plazmy. I. / Khar'kov: KhFTI AN USSR, 1978. – 34 c. (Preprint / AN USSR. KhFTI 78-40).
34. Nemov V.V. The hydrodynamics of collisional plasma in a strong inhomogeneous magnetic field // Nucl. Fusion. – 1970. - Vol. 10. - P. 19.
35. Mikhailovskii A.B., Tsipin V.S. Transport equation and gradient instabilities in a high pressure collisional plasma // Plasma Phys. – 1971. - Vol. 13. - P. 785.
36. Mikhailovskii A.B. Drift wave stability under linear theta-pinch conditions // Nucl. Fusion. – 1972. - Vol. 12. - P. 55
37. Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti. - M.: Nauka. Gl. red. FML, 1970. – 288 S.
38. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy. - M.: Nauka. Gl. red. FML, 1970. – 503 s.
39. Vodyanitskiy A.A., Repalov N.S. Nelineynoe vzaimodeystvie prodol'nykh voln v neizotermicheskoy plazme // ZhTF. – 1970. T. XL, № 1. – P. 32-40.
40. Uizem Dzh. Lineynye i nelineynye volny. - M.: Izd. Mir, 1977. - 622s.
41. Kadomtsev B.B. Turbulentnost' v plazme. / Voprosy teorii plazmy, vyp.4. / Pod red. M.A. Leontovicha. – M.: Atomiz-dat. - 1964. - S. 188-339.
42. Tur A.V., Chechkin A.V., Yanovsky V.V. Negative Viscosity and Generation of Dissipative Solitons And Zonal Dissipative Structures // Phys. Fluids B. – 1992. - Vol.4. - №.11. - P.3513-3521.
43. Silin V.P. Kolebaniya slaboneodnorodnoy plazmy // ZhETF. – 1963. - T.44. - C.1271.
44. Vodyanitskiy A.A. Mnogovolnovye nelineynye porogovye rezhimy i diffuziya v usloviyakh dreyfovo-dissipativnoy neustoy-chivosti plazmy // II Mezhdunarodnaya konf. po teorii plazmy, - Kiev, 28 oktyabrya – 1 noyabrya 1974 g. - S.79.