

УДК 539.216:519.876.5

АНОМАЛЬНЫЙ РОСТ ДИФФУЗИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

И.Г. Марченко^{1,2}, И.И. Марченко³

¹Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»

ул. Академическая 1, г. Харьков 61108, Украина

E-mail: march@kipt.kharkov.ua

²Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

пл. Свободы 4, г. Харьков, 61077, Украина

³НТУ «Харьковский политехнический институт»

ул. Фрунзе 21, г. Харьков 61145, Украина

Received 6 July 2012, accepted 11 November 2012

В работе методами компьютерного моделирования исследована диффузия частиц в периодическом пространственном потенциале под воздействием внешней постоянной силы. Показано, что в отличие от передемпфированного случая, в системах с малой диссипацией энергии возникает новое значение критической силы связанное с появлением точки бифуркации типа “вилка”. В окрестности этой точки наблюдается экспоненциальный рост коэффициента диффузии с уменьшением температуры. При этом время установления стационарного распределения стремится к бесконечности при стремлении температуры к нулю.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: диффузия, компьютерное моделирование, кристаллы, уравнение Ланжевена

АНОМАЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ДИФУЗІЇ У ПРОСТОРОВО-ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМАХ З МАЛОЮ ДИССИПАЦІЄЮ ЕНЕРГІЇ

І.Г. Марченко^{1,2}, І.І. Марченко³

¹Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут»

вул. Академічна 1, м. Харків 61108, Україна

²Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

пл. Свободи 4, м. Харків, 61077, Україна

³НТУ «Харківський політехнічний інститут»

вул. Фрунзе 21, м. Харків 61145, Україна

У роботі методами комп'ютерного моделювання вивчена дифузія частинок у періодичному просторовому потенціалі під впливом зовнішньої незмінної сили. Показано, що на відміну від передемпфированного випадку, у системах з малою диссипацією енергії виникає нове значення критичної сили, яке пов'язане з появою точки бифуркації типу “виделка”. Поблизу від цієї точки спостерігається експоненціальне зростання коефіцієнта дифузії із зменшенням температури. При цьому час встановлення стаціонарного розподілу спрямована до безкінечності при зменшенні температури до нуля.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дифузія, комп'ютерне моделювання, кристали, рівняння Ланжевена

ANOMALOUS GROWTH OF THE DIFFUSION IN SPACE-PERIODIC SYSTEMS WITH A LOW ENERGY DISSIPATION

I.G. Marchenko^{1,2} and I.I. Marchenko³

¹National Scientific Center “Kharkiv Institute of Physics and Technology”

1, Akademicheskaya St., Kharkov, 61108, Ukraine

E-mail: march@kipt.kharkov.ua

²V.N. Karazin Kharkov National University

4 Svobody Sq., Kharkov, 61077, Ukraine

³NTU „Kharkov Polytechnic Institute”

21 Frunze St., Kharkov, 61145, Ukraine

Computer simulation methods were used to investigate the particle diffusion in the periodic spatial potential under constant force exposure. The paper shows that, unlike a superdamped case, in the systems with weak energy dissipation a new critical force value arises due to the appearance of a fork-like bifurcation point. About this point an exponential growth of the diffusion coefficient with temperature decreasing is observed. It is noted that the time of transition to the steady-state distribution tends to infinity while the temperature tends to zero.

KEY WORDS: diffusion, computer simulation, crystals, Langevin equation

Диффузія частиц в періодических просторових полях інтенсивно досліджується в останнє время [1]. Эти исследования имеют не только общетеоретический, но и практический интерес. Изучение особенностей транспорта атомов и кластеров, различных дефектов кристаллической решетки, таких как междоузельные атомы, вакансии, дислокации и пр. во внешних полях представляются чрезвычайно важными для развития новых технологий. Кроме того, эта задача тесно связана с физическими процессами протекающими в контактах Джофсона, в системах фазовой автоподстройки частоты, в суперионных проводниках и пр. [2]. Особый интерес вызывает исследование направленного транспорта частиц под

воздействием внешних полей (так называемых Броуновских моторов) [3].

Был достигнут значительный прогресс в аналитических исследованиях диффузии и транспорта частиц в передеформированном случае [4]. В то же время для систем с малой диссипацией энергии разработанные методы мало приемлемы. В связи с этим, наряду с аналитическими методами [5], интенсивно использовались методы компьютерного моделирования [6]. Было показано, что под воздействием постоянной силы могут возникать особые промежуточные во времени фазы диффузии: так называемые гипер- и субдиффузия [7].

Наличие таких особых режимов диффузии может приводить к аномальным температурным зависимостям коэффициента диффузии [8]. Вместе с тем, несмотря на достигнутый прогресс в компьютерном моделировании движения частиц в пространственно периодических потенциалах, недостаточное внимание было уделено изучению влияния температуры на интенсивность их диффузии.

Целью данной работы являлось исследование температурной зависимости диффузии частиц движущихся в периодическом потенциале под воздействием внешней силы в системах с малой диссипацией энергии.

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Движение частиц описывалось уравнениями Ланжевена. Для упрощения рассмотрен только случай одномерной диффузии в пространственно периодическом потенциале $U(x)$:

$$m \ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) - \gamma \dot{x} + F + \xi(t), \quad (1)$$

где x – координата частицы на плоскости, m – ее масса, F – постоянная сила, действующая на частицу, $U(x)$ – потенциальная энергия частицы, γ – коэффициент трения. Член $\xi(t)$ описывает термические флуктуации. Точка сверху означает дифференцирование по времени. Предполагается, что шум является белым и соответственно для термических флуктуаций выполняется соотношение

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\gamma k T \delta(t - t'), \quad (2)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура.

Потенциальная энергия частицы задавалась следующим выражением:

$$U(x) = -\frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right), \quad (3)$$

где a – постоянная одномерной решетки.

На движущуюся частицу действует периодическая в пространстве сила со стороны кристаллической решетки

$$F_{lat} = F_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a} r\right), \quad (4)$$

где $F_0 = \frac{\pi}{a} U_0$. В качестве мигрирующей частицы был выбран атом водорода. Величина активационного барьера составляла 80 МэВ – величину характерную для диффузии по плотноупакованным поверхностям металлов. Постоянная решетки a была равна 2Å. Стохастические уравнения (1)-(2) численно решались алгоритмом первого порядка по времени типа Верле [9], с шагом по времени $\Delta t \approx 0,1$ фс, что составляло менее 0,01 периода собственных колебаний. Известно, что явные одношаговые методы решения стохастических уравнений обладают хорошей сходимостью [10]. Как показали расчеты, численное решение является устойчивым при данном выборе шага.

Статистическое усреднение проводилось по ансамблю частиц с количеством $N = 4 \cdot 10^4$. Для верификации результатов моделирования отдельные расчеты проводились с $N = 4 \cdot 10^6$. Начальные условия задавались следующим образом. Частица помещалась в начале координат с минимальной потенциальной энергией. Ей случайным образом сообщалась скорость, имеющая Максвелловское распределение по температуре. После чего проводилась термализация системы в течение 10^4 шагов. Затем частицу с установившейся на данный момент скоростью перемещали в первую элементарную ячейку одномерной решетки.

При анализе результатов моделирования удобно перейти к безразмерным величинам времени t' , расстояния x' и температуры T' [2,6]:

$$t' = t \frac{1}{a} \sqrt{\frac{U_0}{m}}; \quad x' = \frac{x}{a}; \quad T' = \frac{Tk}{U_0}. \quad (5)$$

Тогда безразмерный коэффициент трения будет равен

$$\gamma' = \frac{\gamma a}{(mU_0)^{1/2}}. \quad (6)$$

Коэффициент диффузии представляет собой дисперсию в распределении ансамбля движущихся частиц при стремлении времени к бесконечности [4]:

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{ef}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2t}. \quad (7)$$

Поскольку любой компьютерный расчет ограничен во времени, определению (7) требуется придать количественное определение. В противном случае можно иметь дело с артефактами связанными с тем, что не достигнут режим “нормальной” диффузии. На рис. 1 приведены характерные графики зависимости дисперсии σ^2 частиц от времени для различных температур.

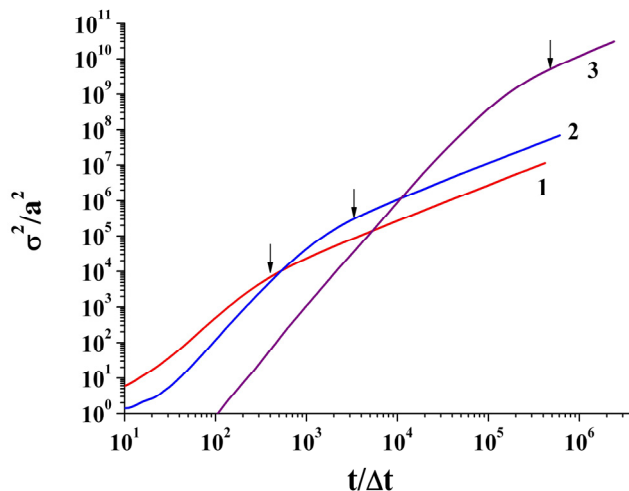


Рис. 1. Временная зависимость среднеквадратичных отклонений частиц от времени.

1- $T=720\text{K}$ ($T'=0,78$), 2 - $T=240\text{K}$ ($T'=0,26$), 3- $T=90\text{K}$ ($T'=0,097$).
 $\gamma' = 0,141$, $F = F_{D_{\max}} = 0,097F_0$.

диффузии D находился как коэффициент пропорциональности между дисперсией и временем на установившейся стадии диффузии. Он вычислялся путем подгонки данных компьютерного моделирования линейной зависимостью $\sigma^2 \sim t$ по методу наименьших квадратов. Ошибка подгонки во всех расчетах не превышала 0,02%.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 приведены графики зависимости коэффициентов диффузии от величины постоянно действующей силы F для различных значений температуры.

Как видно из рисунка графики ведут себя одинаковым образом во всем исследованном диапазоне температур. Все кривые имеют максимум при значении силы $F = 0,098F_0$. Уменьшение температуры приводит к возрастанию максимальной величины коэффициента диффузии D_{\max} при фиксированном значении силы. Такое поведение диффузии является крайне необычным. Впервые существование подобной аномальной зависимости было отмечено в работе [11]. Авторы экстраполировали температурную зависимость D_{\max} как: $D_{\max} \sim T^{-3,5}$. Эта зависимость на рис. 3 представлена пунктирной линией. Так же на этом рисунке маркерами приведено изменение величины D_{\max} с температурой для двух различных значений коэффициента трения γ' . Как следует из рис. 3, функциональное поведение $D_{\max}(T)$ существенно отличается от аппроксимации, предложенной в работе [11]. Данный факт, очевидно, связан с достаточно узким диапазоном температур, исследованных в этой работе. Полученные данные относятся к диапазону температур $T'=0,15-0,25$. Из рис. 3 видно, что в этом диапазоне температур такая аппроксимация действительно хорошо соответствует результатам моделирования. В то же время, она существенно расходится для значений температур выше и ниже этого интервала.

Величина внешней силы $F = F_{D_{\max}}$ соответствовала значению, при котором коэффициент диффузии достигал своего максимума. Стрелками на рисунке отмечены участки окончания переходных процессов и установления линейной зависимости дисперсии от времени. Как видно фаза обычной диффузии, характеризуемая зависимостью $\sigma^2 \sim t$, при температуре 720K ($T'=0,776$) устанавливается после момента времени $t_{ctn} \approx 10^3 \Delta t$, где Δt - шаг по времени. Уменьшение температуры приводит к существенному возрастанию значения t_{ctn} . Так при температуре 90K ($T'=0,094$) $t_{ctn} \approx 10^6 \Delta t$. Вследствие этого в каждом расчете коэффициент

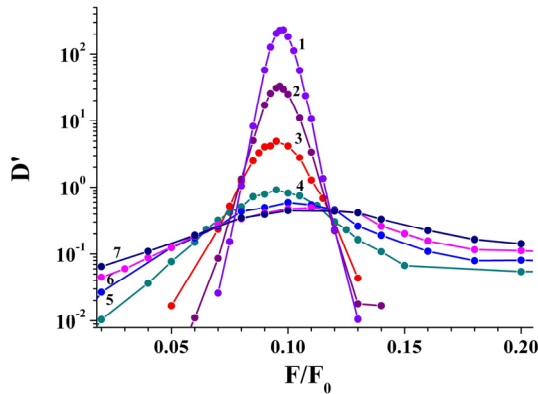


Рис. 2. Зависимости коэффициентов диффузии от величины постоянно действующей силы F для различных значений температуры. Коэффициент трения $\gamma' = 0,141$.

1- $T=90$ ($T'=0,097$), 2- $T=120$ ($T'=0,129$), 3- $T=180$ ($T'=0,194$), 4- $T=360$ ($T'=0,388$), 5- $T=540$ ($T'=0,582$), 6- $T=720$ ($T'=0,776$), 7- $T=900$ ($T'=0,969$).

В результате анализа более широкого массива данных компьютерного моделирования в данной работе была выбрана следующая аппроксимирующая функция:

$$D_{\max} = D_0 \exp(\varepsilon / kT) T^{2/3}. \quad (8)$$

На рис. 3 маркерами приведены результаты моделирования, а непрерывными линиями - аппроксимационные кривые для значений $\gamma' = 0,141$ и $\gamma' = 0,707$. Как следует из рисунка, данная функция хорошо описывает полученные в компьютерном эксперименте данные в исследованном диапазоне γ' . В таблице 1 приведены значения параметров аппроксимационной формулы. Из данных таблицы видно, что с уменьшением коэффициента трения возрастает как величина ε , так и D_0 .

Так же в таблице 1 приведены значения силы F_{mx} при которой наблюдается максимальное значение коэффициента диффузии при выбранном значении коэффициента трения. Как следует из полученных данных, уменьшение величины γ' приводит и к уменьшению F_{mx} .

γ'	F_{mx} / F_0	ε / U_0	D_0'
0,141	0,098	0,833 (0,0666 эВ)	$2,09 \cdot 10^{-3}$
0,707	0,395	0,519 (0,0415 эВ)	$4,38 \cdot 10^{-4}$

Поведение графиков на рис. 2 показывает, что в независимости от температуры, существует некоторое критическое значение силы, при котором достигается максимальное значение коэффициента диффузии. В работах [4,12] было исследовано поведение D вблизи особой точки $F = F_0$ для так называемого передемпфированного случая. Он, в отличие от рассматриваемого в данной работе случая малых значений коэффициента трения, реализуется для больших значений γ' , когда инерционным членом в левой части уравнения (1) можно пренебречь.

Для передемпфированной частицы, на которую действует внешняя сила, в рельефе потенциальной энергии решетки существуют две критические точки на координатной оси x [4,13]. Одна устойчивая – соответствует минимальной потенциальной энергии частицы в рельефе потенциальной энергии (так называемый узел). Вторая – неустойчивая, соответствующая максимуму потенциальной энергии (седловая точка). Из седловой точки частица может “скатиться” в одну из соседних элементарных ячеек. Положение этих точек на координатной оси зависит от внешнего параметра – постоянно действующей силы F . С увеличением значения F расстояние между этими точками уменьшается. А при критическом значении $F = F_0$ эти две точки сливаются (так называемая тангенциальная бифуркация или бифуркация седло–узел). При дальнейшем увеличении F устойчивое решение (по x) отсутствует.

В работе [4] было показано, что при фиксированной температуре для передемпфированного случая при приближении силы к значению F_0 происходит возрастание коэффициента диффузии. Для синусоидального периодического потенциала максимальный коэффициент диффузии (соответствующий силе $F_{mx} = F_0$) должен возрастать с температурой как $T^{1/3}$. Вместе с тем из полученных в данной работе данных (см. уравнение (8))

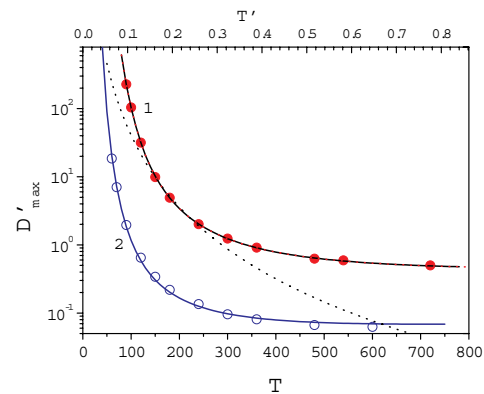


Рис. 3. Температурные зависимости максимального коэффициента диффузии для двух различных значений коэффициента трения.

1- $\gamma' = 0,141$, 2- $\gamma' = 0,707$. Маркеры – данные компьютерного моделирования, сплошные линии - аппроксимационные кривые (8). Штриховая линия – зависимость предложенная в работе [11].

следует совершенно иная функциональная зависимость. Для верификации модели нами были проведены расчеты для случая больших значений γ' . Расчеты показали что при $\gamma' > 7$ данные моделирования хорошо аппроксимируются зависимостью $D_{\max} = D_0 T^\alpha$. При $\gamma' \approx 7$ значение коэффициента $\alpha \approx 0,36$, что близко к значению $\alpha = 1/3$ теоретически предсказанному для передемпфированного случая. Это свидетельствует о том, что используемая компьютерная модель правильно отражает физику процесса диффузии частиц, и в случае малых значений γ' мы имеем дело с ситуацией существенно отличной от рассмотренной в работе [4].

Как следует из данных таблицы 1, критическая точка F_{mx} имеет значительно меньшее значение чем F_0 , как следовало бы из работ [4,12]. Кроме того, коэффициент диффузии в окрестности F_{mx} не уменьшается, а возрастает с понижением температуры.

Как следует из (8) при стремлении температуры к нулю наблюдается экспоненциальная расходимость коэффициента диффузии. Вместе с тем и время установления стационарного состояния при этом так же стремится к бесконечности, как видно из рис. 1. В свете этого исследование области низких температур методами компьютерного эксперимента проблематично для существующих вычислительных возможностей. Для решения этой задачи необходимо привлечения аналитических методов.

Различие в функциональной зависимости $D_{\max}(T)$, полученное в данной работе, от рассмотренного передемпфированного случая связано с различной природой критических точек, возникающих в этих двух случаях. В случае нулевой температуры в передемпфированном случае при $F_{mx} = F_0$ наблюдается тангенциальная бифуркация, которая не зависит от начальных значений импульса частицы. В случае же малых γ' наблюдается бифуркация удвоения (или типа “вилка”).

Как хорошо известно, при малой диссипации энергии в системе с периодическим потенциалом возможны два типа решений: так называемые локализованные и бегущие решения [2]. На рис. 4 приведены численные решения уравнений движения для различных начальных условий. Частица, на которую действовала постоянная во времени внешняя сила F , в момент времени $t=0$ находилась в точке с минимальной потенциальной энергией. В зависимости от начального импульса $P_0 = mV_0$, частица с течением времени либо переходит в связанное состояние (кривая 1), либо совершает осциллирующее движение и движется со средней во времени скоростью $\overline{V}_F = \frac{F}{\gamma}$ (кривые 2 и 3). Стационарная скорость движения \overline{V}_F соответствует движению свободной частицы в вязкой среде под воздействием внешней силы F . Как видно из рисунка, существует критическое значение начального импульса P_{cr} . При $P_0 < P_{cr}$ частица переходит в связанное состояние, а при $P_0 > P_{cr}$ возникает устойчивое бегущее решение. Видно, что отклонение начального импульса в большую или меньшую сторону не сказывается на стационарном бегущем решении. Значение P_{cr} зависит от величины F . На рис. 5 показана диаграмма существования связанных и локализованных решений в зависимости от величины действующей силы F . При значении F меньше чем некоторое критическое значение F_{cr1} в системе возможно только одно локализованное решение. При $F > F_{cr1}$ возникают два устойчивых решения: локализованное и бегущее. Стрелками на рисунке показано стремление частицы с произвольными начальным импульсом к стационарному во времени решению.

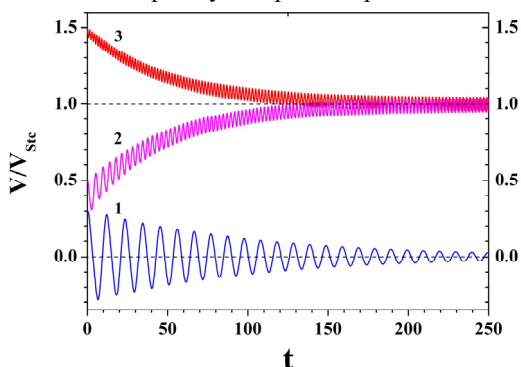


Рис. 4. Изменение во времени скорости частицы при различных начальных импульсах P_0 .

$\gamma' = 0,141$, $F = 0,15F_0$, $T=0$. 1- $P_0 = 0,3mV_{stc}$, 2- $P_0 = 0,5mV_{stc}$, 3 - $P_0 = 1,5mV_{stc}$.

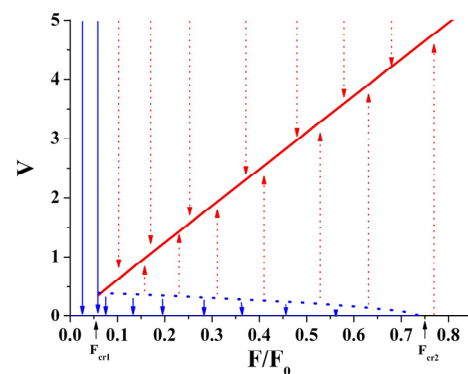


Рис. 5. Диаграмма существования связанных и локализованных решений в зависимости от величины действующей силы F . $\gamma' = 0,141$.

Стрелками на рисунке показано стремление частицы к стационарному во времени решению. Сплошные линии – бегущее решение, пунктирные линии – локализованное решение.

Таким образом, как видно из рис. 5, при изменении внешней силы в точке $F = F_{cr1}$ происходит бифуркация типа “вилка”, когда вместо одного устойчивого решения возникает два устойчивых решения. Это так называемый суперкритический случай бифуркации “вилки”. При дальнейшем росте F вплоть до значения $F = F_{cr2}$ два решения сосуществуют. Однако, с увеличением силы, область существования связанного решения сужается. И при значении $F = F_{cr2}$ реализуется субкритический случай бифуркации “вилки”, когда из двух устойчивых решений остается только одно.

Под воздействием теплового шума частицы могут получать дополнительный импульс и переходить в окрестность другого устойчивого решения. Эта ситуация существенно отличается от рассмотренной в работах [4,12], где тепловые флуктуации приводили лишь к “перебросу” частиц за критическое значение силы. Качественно эта ситуация хорошо описана в книге [2].

Таким образом, как следует из данных компьютерного моделирования, при воздействии на систему находящуюся в контакте с тепловым резервуаром внешней силы $F_{cr1} < F < F_{cr2}$, частицы разбиваются на 2

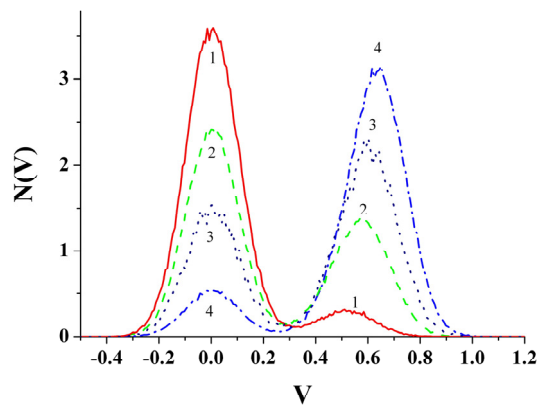


Рис. 6. Функции распределения по скоростям для частиц под воздействием постоянной силы F .

1 - $F = 0,08F_0$, 2 - $F = 0,09F_0$, 3 - $F = 0,095F_0$, 4 - $F = 0,10F_0$. $T=120K$ ($T' = 0,13$), $\gamma' = 0,141$.

существенным изменением коэффициента диффузии.

популяции. Это частицы связанные с узлами решетки и “надбарьерные”, движущиеся в вязкой среде с энергией большей, чем энергия связи с узлом решетки. На рис. 6 приведены графики функции распределения частиц по скоростям $N(V)$ для различных значений F при фиксированной температуре $T = 120K$. Графики строились при достижении ансамблем невзаимодействующих частиц стационарного состояния, когда $N(V)$ не изменялось со временем. Как следует из рисунка, в окрестности критической точки происходит существенное изменение $N(V)$ и часть частиц переходят из связанного состояния в надбарьерное. В то время как при $F/F_0 = 0,08$ основное количество частиц связано с узлами решетки, при $F/F_0 = 0,10$ большая часть ансамбля частиц связана с бегущим решением. Если снова возвратится к рис. 2, то видно, что такое перераспределение связано с

ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе методом компьютерного моделирования исследована температурная зависимость диффузии в ансамбле невзаимодействующих частиц, движущихся под воздействием внешней постоянной силы F в периодических структурах с малой диссипацией энергии. Показано, что при определенных значениях F наблюдается anomalous температурная зависимость диффузии: диффузия возрастает с уменьшением температуры. Предложена аппроксимационная формула, описывающая эту зависимость. Показано что со стремлением температуры к нулю коэффициент диффузии экспоненциально возрастает. Такое поведение связано с существованием бифуркации “вилки” для решения движения частиц под воздействием внешней силы. Anomalous температурная зависимость наблюдается в окрестности точки бифуркации.

В заключение авторы выражают благодарность Пархоменко А.А. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale // Rev. Mod. Phys.- 2009.- Vol. 81.- P. 337-442.
2. Risken H. The Fokker-Planck equation and methods of solution and applications. - Springer, 1989.- 485p.
3. Machura L., Kostur M., Talkner P., et. al. Brownian motors: Current fluctuations and rectification efficiency // Phys. Rev.- 2004.- Vol. E70.- P. 061105 (8 pp.).
4. Reimann P., Van den Broeck C., Linke H., Hänggi P., Rubi J.M., Perez-Madrid A. Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling // Phys. Rev.- 2002.- Vol. E 65.- P. 031104 (16 pp.).
5. Coffey W.T., Kalmykov Yu.P., Waldron J.T. The Langevin equation. - Singapore: World Scientific publishing, 2004.- 678 p.
6. Sancho J.M., Lacasta A.M. The rich phenomenology of Brownian particles in nonlinear potential landscapes // Eur. Phys. J. Special Topics. - 2010.- Vol.187.- P. 49-62.
7. Lacasta A.M., Sancho J.M., Romero A.H., Sokolov I.M., Lindenberg K. From subdiffusion to superdiffusion of particles on solid surfaces // Phys. Rev. - 2004. - Vol. E70. - P. 051104 (10 pp.).
8. Marchenko I.G., Marchenko I.I. Anomalous Temperature Dependence of Diffusion in Crystals in Time-Periodic External Fields

- // JETP Letters.- 2012.- Vol. 95, №3. - P. 137–142.
9. Verlet L. Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules // Phys. Rev. - 1967.- Vol. 159.- P. 98 – 103.
 10. Kuznetsov D.F. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya: teoriya i praktika chislennogo resheniya. - Sankt-Peterburg: Politekhnichestkiy universitet, 2007.- 769 s.
 11. Lindenberg K., Lacasta A.M., Sancho J.M., Romero A.H. Transport and diffusion on crystalline surfaces under external forces // New Journal of Physics. - 2005.- Vol. 7.- P. 29 (19 pp.).
 12. Reimann P., Van den Broeck C., Linke H., Hänggi P., Rubi J.M., Pérez-Madrid A. Giant Acceleration of Free Diffusion by Use of Tilted Periodic Potentials // Phys. Rev. Lett.- 2001.- Vol. 87.- P. 010602 (4 pp.).
 13. Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics And Chaos. - Massachusetts: Perseus Books Publishing L.L.S., 1994.- 498 p.