УДК 539.12

МУЛЬТИГРАВИТАЦИЯ И МОДЕЛЬ ПАУЛИ-ФИРЦА

С.А. Дуплий[1], А.Т. Котвицкий[2]
[1] *Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/˜duplij
[2] *Физический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
Поступила в редакцию 20 декабря 2012 г.

Исследуется общий подход к описанию взаимодействия моделей мультигравитации в D-мерном пространстве-времени ($D > 3$). Предложены различные возможности для обобщения инвариантного объема и наиболее общий вид потенциала взаимодействия. Тщательный анализ модели проведен в формализме 3+1 разложения. Требование отсутствия духов приводит к тому, что рассматриваемая модель в пределе слабого поля эквивалентна массивной гравитации (модели Паули-Фирца).
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: мультигравитация, бигравитация, массивная гравитация, инвариантный объем, потенциал взаимодействия, модель Паули-Фирца

MULTIGRAVITY AND PAULI-FIERZ MODEL

S. A. Duplij[1], A. T. Kotvytskiy[2]
[1] *Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University*
Svoboda Sq. 4, Kharkov 61022, Ukraine
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/˜duplij
[21] *Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University*
Svoboda Sq. 4, Kharkov 61022, Ukraine

A general approach for description of multigravity models in D-dimensional space-time ($D > 3$) is presented. Different possibilities of generalization of the invariant volume and general form of the interaction potential is proposed. A thorough analysis of the bigravity model along the 3+1 expansion formalism is made. The requirement of the absence of ghosts leads to the equivalence of the model to the massive gravity (the Pauli-Fierz model).
KEYWORDS: multigravity, bigravity, massive gravity, invariant volume, interaction potential, Pauli-Fierz model

МУЛЬТИГРАВІТАЦІЯ ТА МОДЕЛЬ ПАУЛІ-ФІРЦА

С. А. Дуплій[1], А.Т. Котвицький[2]
[1] *Физико-технічний факультет, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна*
пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/˜duplij
[2] *Физичний факультет, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна*
пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

Досліджується загальний підхід до опису взаємодії моделей мультигравітації у D-мірному просторі-часі ($D > 3$). Запропоновано різні можливості узагальнення інваріантного об'єму та найбільш загальний вид потенціалу взаємодії. Ретельний аналіз моделі проведений у формалізмі 3+1 розкладання. Вимога відсутності духів призводить до того, що дана модель в межі слабкого поля еквівалентна масивній гравітації (моделі Паулі-Фірца).
КЛЮЧОВІ СЛОВА: мультигравитація, бігравитація, масивна гравітація, інваріантний об'єм, потенціал взаємодії, модель Паулі-Фірца

В первых работах по мультигравитации ее частный случай (бигравитация) назывался "*f*-*g* theory" [1–3]). В дальнейшем эта конструкция успешно применялась в теориях с дискретными размерностями [4, 5] и массивной гравитации [6], а также в объяснении таких экспериментальных фактов, как темная энергия и темная материя, [7–9], ускоренное расширение вселенной [10, 11].

Тем не менее, построение последовательного расширения теории гравитации с учетом массивных слагаемых является трудной задачей. Во-первых, это связано с явлением ван Дама-Вельтмана-Захарова, которое состоит в том, что при стремлении массы гравитона к нулю теория не переходит в общую теорию относительности [12, 13], что проявляется, например, в различных предсказаниях для отклонения луча света в поле массивных тел. Избавиться от этой неприятности позволяет механизм Вайнштейна [14], который убирает неоднородность в пространстве параметров [15, 16]. Во-вторых, в моделях подобного типа возникают духовые моды, которые являются неприемлемыми в физически осмысленных теориях.

Условно можно выделить два способа расширения гравитации на массивную теорию. Первый, это изменение действия Эйнштейна-Гильберта путем включения слагаемых с высшими степенями кривизны, как, например, в «новой массивной гравитации» [17]. Второй подход — это нелинейное расширение модели типа Паули-Фирца [18], которое свободно от нестабильности, обнаруженной в [19]. Однако, как показано в [20], оба этих подхода можно рассматривать как масштабный предел модели бигравитации, предложенной в [21], в которой отсутствуют духовые моды. Таким образом, мы приходим к выводу, что обобщение мультигравитации, в частности, бигравитации, является актуальным.

Целью данной работы является исследование обобщенного описания взаимодействия мультигравитации в D мерном пространстве-времени. В первой части изучаются различные возможности для обобщения инвариантного объема $d\Omega_{int}^{(N)}$, на который накладываются ограничения состоящие в том, что $d\Omega_{int}^{(N)}$ должен быть скаляром, в пределе совпадения всех метрик инвариантный объем должен переходить в стандартный $\sqrt{g}d^Dx$. Также функция $d\Omega_{int}^{(N)}$ должна быть монотонной и однородной по всем метрикам $g_{\mu\nu}^{(i)}$. Далее мы конструируем наиболее общий вид потенциала взаимодействия и показываем, что в самом простом случае двух метрик (бигравитации) он переходит в модель типа Паули-Фирца. Подробный анализ данной модели, проведенный в формализме 3+1 разложении и требование отсутствия духов приводит к тому, что в пределе слабого поля бигравитация полностью эквивалентна модели Паули-Фирца.

ОБОБЩЕНИЕ ИНВАРИАНТНОГО ОБЪЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим N вселенных, каждая из которых описывается метрикой $\mathrm{g}_{\mu\nu}^{(i)}$, где $i = 1, \dots N$. В D-мерном пространстве-времени мы используем сигнатуру $\left(+, \overbrace{-, \dots -}^{D-1}\right)$. Для i-той вселенной действие запишем в виде

$$S_{G(i)} = \int d\Omega^{(i)} \left[L_{gr}^{(i)}(\mathrm{g}^{(i)}) + L_{mat}\left(\mathrm{g}^{(i)}, \Phi^{(i)}\right)\right], \tag{1}$$

где $d\Omega^{(i)} = d^4x\sqrt{g^{(i)}}$, $g^{(i)} = \left|\det\left(\mathrm{g}_{\mu\nu}^{(i)}\right)\right|$ — инвариантный объем, $g^{(i)}$ — скалярную плотность веса 2 и $\mathrm{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ — метрический тензор в i-той вселенной, $L_{gr}^{(i)}(\mathrm{g}^{(i)})$ — лагранжиан, описывающий гравитационное поле, $L_{mat}\left(\mathrm{g}^{(i)}, \Phi^{(i)}\right)$ описывает взаимодействие гравитации и материальных полей $\Phi^{(i)}$. В предположении "слабо связанных миров" [22] и "no-go" теоремы [23] общее действие для N безмассовых гравитонов записывется в виде суммы чисто гравитационных действий (1) $S_0 = \sum_{i=1}^{N} S_{G(i)}$. Если "слабо связанные миры" взаимодействуют только за счет гравитационных полей, полное действие мультигравитации можно записать

$$S_{full} = \sum_{i}^{N} S_{G(i)} + S_{int}, \tag{2}$$

где последнее слагаемое S_{int} описывает взаимодействие вселенных. Выбор слагаемого взаимодействия является ключевым при описании моделей мультигравитации [24]. В общем случае D измерений для N-гравитации S_{int} можно представить как

$$S_{int} = \int d^DxW(\mathrm{g}^{(1)}, \dots, \mathrm{g}^{(N)}), \tag{3}$$

где $W(\mathrm{g}^{(1)}, \dots, \mathrm{g}^{(N)})$ — скалярная плотность. По аналогии со стандартным инвариантным объемом $d\Omega = d^4x\sqrt{g}$ в общей теории относительности [25, 26], представим выражение $d^DxW(\mathrm{g}^{(1)}, \dots, \mathrm{g}^{(N)})$ как произведение

$$d^Dx \cdot f\left(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}\right) \cdot V(\mathrm{g}^{(1)}, \dots, \mathrm{g}^{(N)}), \tag{4}$$

где $V(\mathrm{g}^{(1)}, \dots, \mathrm{g}^{(N)})$ ($\equiv V\left(\mathrm{g}^{(i)}\right)$) - скалярный потенциал взаимодействия и $f\left(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}\right)$ - гладкая положительная функция с весом $+1$ имеющая N положительных (действительных) аргументов. Введем инвариантный объем взаимодействия (в слагаемом ультралокального взаимодействия)

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^Dxf\left(\sqrt{g_1}, \dots, \sqrt{g_N}\right), \tag{5}$$

являющийся скаляром. В пределе совпадения [24] $g^{(1)}_{\mu\nu} = \ldots = g^{(N)}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ инвариантный объем взаимодействия (в слагаемом ультралокального взаимодействия) должен переходить в стандартный инвариантный объем $d\Omega^{(N)}_{int} \to d\Omega$. Для того чтобы удовлетворить всем вышеперечисленным требованиям функция $f\left(\sqrt{g_1}, \ldots, \sqrt{g_N}\right)$ должна быть: 1) идемпотентная в пределе совпадения $f\left(\sqrt{g}, \ldots, \sqrt{g}\right) = \sqrt{g}$; 2) монотонная; 3) однородная по всем аргументам $f\left(t\sqrt{g_1}, \ldots, t\sqrt{g_N}\right) = t^{\alpha} f\left(\sqrt{g_1}, \ldots, \sqrt{g_N}\right)$ (из требования идемпотентности следует, что $\alpha = 1$); 4) симметричная по всем аргументам. Из требования однородности и симметричности функции $f\left(\sqrt{g_1}, \ldots, \sqrt{g_N}\right)$ следует, что инвариантный объем взаимодействия (в слагаемом ультралокального взаимодействия) может быть представлен как [24]

$$d\Omega^{(N)}_{int} = d^D x \cdot f\left(\sqrt{g_1}, ..., \sqrt{g_N}\right) = d^D x \sqrt[2N]{g_1 ... g_N} \cdot f\left(y^{(N)}_1, ..., y^{(N)}_N\right), \tag{6}$$

$$y^{(N)}_1 = \sqrt[2N]{g^{N-1}_1 g^{-1}_2 g^{-1}_3 ... g^{-1}_N}, \ldots \quad y^{(N)}_N = \sqrt[2N]{g^{-1}_1 g^{-1}_2 ... g^{-1}_{N-1} g^{N-1}_N}, \tag{7}$$

где переменные $y^{(N)}_i$ очевидно удовлетворяют тождеству

$$y^{(N)}_1 \cdot y^{(N)}_2 \cdot \ldots \cdot y^{(N)}_N = 1, \tag{8}$$

следовательно функция f в действительности является функцией $N-1$ аргументов и инвариантный объем взаимодействия (в слагаемом ультралокального взаимодействия) можно записать в виде

$$d\Omega^{(N)}_{int} = d^4 x \cdot f\left(\sqrt{g_1}, ..., \sqrt{g_N}\right) = d^4 x \sqrt[2N]{g_1 ... g_N} \cdot \hat{f}\left(y^{(N)}_1, \ldots, y^{(N)}_{N-1}\right), \tag{9}$$

где $\hat{f}\left(y^{(N)}_1, \ldots, y^{(N)}_{N-1}\right) \overset{def}{=} f\left(y^{(N)}_1, \ldots, y^{(N)}_{N-1}, \dfrac{1}{y^{(N)}_1 \cdot y^{(N)}_2 \cdot \ldots \cdot y^{(N)}_{N-1}}\right)$. Заметим, что в пределе совпадения $y^{(N)}_i = 1$ и $f(1, \ldots, 1) = 1$ (см. [24]).

Приведем вычисление наиболее общего вида инвариантного объема (в слагаемом ультралокального взаимодействия) для N-мультигравитации. Вначале найдем идемпотентную симметричную однородную функцию N-переменных $f(x_1, \ldots x_N)$, входящую в инвариантный объем (5) и удовлетворяющую свойствам

$$f(x, \ldots x) = x, \tag{10}$$

$$f(1, \ldots 1) = 1, \tag{11}$$

$$f(tx_1, \ldots tx_N) = t f(x_1, \ldots x_N), \tag{12}$$

$$f(x_1, \ldots x_N) = f(x_{\sigma 1}, \ldots x_{\sigma N}), \tag{13}$$

где $x_i = \sqrt{g_i}$ и σ обозначает всевозможные перестановки аргументов. Подобно (7) введем здесь переменные y_i

$$f(x_1, \ldots x_N) = \sqrt[N]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_N} f(y_1, \ldots y_N), \tag{14}$$

и переменные $y_i = \sqrt[N]{x^{-1}_1 \cdot \ldots \cdot x^{-1}_{i-1} \cdot x^{N-1}_i \cdot x^{-1}_{i+1} \ldots \cdot x_N}$ удовлетворяют тождеству

$$y_1 \cdot \ldots \cdot y_N = 1. \tag{15}$$

Соотношение (15) показывает, что эффективно имеется $N-1$ независимых переменных. Определим новую функцию формулой

$$h(z_1, \ldots z_{N-1}) \overset{def}{=} f(z_1, \ldots z_{N-1}, 1), \quad h(1, \ldots 1) = 1. \tag{16}$$

Учитывая симметрию (15), получаем

$$h(z_1, \ldots z_{N-1}) = f(z_{\sigma 1}, \ldots z_{\sigma N-1}, 1) = h(z_{\sigma 1}, \ldots z_{\sigma N-1}), \tag{17}$$

поэтому функция $h(z_1, \ldots z_{N-1})$ также симметрична. Найдем уравнения на $h(z_1, \ldots z_{N-1})$ которые следуют из (17). Из (17) находим

$$\frac{1}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}} h(z_1, \ldots z_{N-1}) = f\left(\frac{z_1}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}}, \ldots \frac{z_{N-1}}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}}, \frac{1}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}}\right) \equiv f(y_1, \ldots y_N), \tag{18}$$

из которого следует, что $\dfrac{z_1}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}} = y_1, \ldots \dfrac{z_{N-1}}{y_1 \cdot \ldots \cdot y_{N-1}} = y_{N-1}$. Тогда получаем $z_i = y_1 \cdot \ldots \cdot y_{i-1} \cdot y^2_i \cdot y_{i+1} \cdot \ldots \cdot y_{N-1}$. Так что (18) дает функциональное уравнение на функцию $h(z_1, \ldots z_{N-1})$.

Например, для $N = 2$ имеем $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} f(y_1, y_2)$, $y_1 = \sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}$, $y_2 = \sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$, $y_1 y_2 = 1$. Тогда, используя (17) и (18), получаем

$$h(z_1) = f(z_1, 1), \tag{19}$$

$$\frac{1}{y_1} h(z_1) = f\left(\frac{z_1}{y_1}, \frac{1}{y_1}\right), \tag{20}$$

и, так, как $\dfrac{z_1}{y_1} = y_1 \Longrightarrow z_1 = y_1^2$, то имеем функциональные уравнения (включая симметричные) $f(y_1, y_2) = \dfrac{1}{y_1} h\left(y_1^2\right) \overset{symm}{=} \dfrac{1}{y_2} h\left(y_2^2\right)$. Учитывая $y_1 y_2 = 1$, находим $h\left(y_1^2\right) = y_1^2 h\left(y_1^{-2}\right)$. Заметив, что $y_1^2 = z_1 = z$, получаем функциональное уравнение для $h(z)$

$$h(z) = z h\left(\frac{1}{z}\right) \tag{21}$$

с дополнительным условием $h(1) = 1$. Для классических средних функцию $h(z)$ можно записать в виде: 1) Арифметического: $h(z) = \dfrac{1+z}{2}$, 2) Геометрического: $h(z) = \sqrt{z}$, 3) Гармонического: $h(z) = \dfrac{2z}{1+z}$, 4) Логарифмического: $h(z) = \dfrac{z-1}{\ln z}$.

Запишем определения переменных для случая $N = 3$ как

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} f(y_1, y_2, y_3), \ y_1 = \sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2 x_3}}, \ y_2 = \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_1 x_3}}, \ y_3 = \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1 x_2}}, \ y_1 y_2 y_3 = 1.$$

Уравнение для $h(z)$ имеет вид

$$h(z_1, z_2) = f(z_1, z_2, 1), \quad \frac{1}{y_1 y_2} h(z_1, z_2) = f\left(\frac{z_1}{y_1 y_2}, \frac{z_2}{y_1 y_2}, \frac{1}{y_1 y_2}\right) \equiv f(y_1, y_2, y_3), \tag{22}$$

тогда $z_1 = y_1^2 y_2$, $\quad z_2 = y_1 y_2^2$, и, учитывая симметрию $f(y_1, y_2, y_3)$, имеем

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_1 y_2} h\left(y_1^2 y_2, y_1 y_2^2\right) = \frac{1}{y_1 y_3} h\left(y_1^2 y_3, y_1 y_3^2\right) = \frac{1}{y_2 y_3} h\left(y_2^2 y_3, y_2 y_3^2\right) \tag{23}$$

подставляя $y_3 = \dfrac{1}{y_1 y_2}$, получаем

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{y_1 y_2} h\left(y_1^2 y_2, y_1 y_2^2\right) = y_2 h\left(\frac{y_1}{y_2}, \frac{1}{y_1 y_2^2}\right) = y_1 h\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{1}{y_1^2 y_2}\right). \tag{24}$$

Таким образом, при $N = 3$ функциональные уравнения для $h(z_1, z_2)$ принимают вид

$$h(z_1, z_2) = z_2 h\left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}\right) = z_1 h\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{1}{z_1}\right) \tag{25}$$

Нахождение полного набора решений для уравнений (21) и (25) требуют привлечения теории функциональных уравнений. Мы ограничимся частными случаями. Например, при $N = 2$ для функции $h(z_1, z_2)$ можно выбрать такие классические средние

$$1) \text{ Арифметическое}: \quad h(z_1, z_2) = \frac{1 + z_1 + z_2}{3}, \quad 2) \text{ Геометрическое:} \quad h(z_1, z_2) = \sqrt[3]{z_1 z_2}, \tag{26}$$

$$3) \text{ Гармоническое}: \quad h(z_1, z_2) = \frac{3}{1 + z_1^{-1} + z_2^{-1}}, \quad 4) \text{ Логарифмическое:} \quad h(z_1, z_2) = \frac{z_1 + z_2 - 1}{\ln(z_1 + z_2)}, \tag{27}$$

$$5) \text{ Реверсивное}: \quad h(z_1, z_2) = \frac{3\sqrt[3]{z_1^2 z_2^2}}{1 + z_1 + z_2}. \tag{28}$$

Неклассическим типом средних являются квазисредние. Выразим функцию $h\left(z_1, z_2, \ldots z_{N-1}\right)$ через квазисреднюю функцию $\varphi\left(x\right)$. По определению квазигеометрическое среднее генерируется функцией $\varphi\left(x\right)$ как

$$f_\varphi\left(x_1, \ldots x_N\right) = \varphi^{-1}\left(\sqrt[N]{\varphi\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(x_N\right)}\right), \tag{29}$$

$$\varphi\left(tx\right) = t\varphi\left(x\right). \tag{30}$$

Здесь нет условия $\varphi\left(1\right) = 1$. Также можно построить и арифметическое квазисреднее по функции $\tilde{\varphi}\left(x\right)$

$$\tilde{f}_{\tilde{\varphi}}\left(x_1, \ldots x_N\right) = \tilde{\varphi}^{-1}\left(\frac{\tilde{\varphi}\left(x_1\right) + \ldots + \tilde{\varphi}\left(x_N\right)}{N}\right). \tag{31}$$

Здесь функции $\varphi\left(x\right)$и $\tilde{\varphi}\left(x\right)$ связаны законом композиции

$$\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi, \tag{32}$$

где в данном конкретном случае $\pi = \ln$. Начиная с (31) и используя $\tilde{\varphi} = \ln \circ \varphi$ и $\tilde{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \exp$, имеем

$$\tilde{f}_{\tilde{\varphi}}\left(x_1, \ldots x_N\right) = \varphi^{-1} \circ \exp\left[\frac{\ln\varphi\left(x_1\right) + \ldots + \ln\varphi\left(x_N\right)}{N}\right] = \varphi^{-1} \circ \exp\ln\sqrt[N]{\varphi\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(x_N\right)} \equiv f_\varphi\left(x_1, \ldots x_N\right). \tag{33}$$

Поскольку φ произвольная выпуклая гладкая функция, то оба средних, квазиарифметическое и квазигеометрическое, перекрывают все возможности, а закон композиции (32) можно рассматривать как действие на группе функций $\varphi\left(x\right)$. Для удобства мы можем выбрать квазигеометрическое среднее (29) с однородной функцией $\varphi\left(x\right)$ удовлетворяющей (30). Начиная с (29) и учитывая однородность (30), получаем аналог (14) в виде

$$f_\varphi\left(x_1, \ldots x_N\right) = \varphi^{-1}\left(\sqrt[N]{\varphi\left(x_1\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(x_N\right)}\right) = \sqrt[N]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_N}\varphi^{-1}\left(\sqrt[N]{\varphi\left(y_1\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(y_N\right)}\right). \tag{34}$$

Используя связь между f и h из выражения (17), получаем соотношение между h и φ

$$h_\varphi\left(z_1, z_2, \ldots z_{N-1}\right) = \varphi^{-1}\left(\sqrt[N]{\varphi\left(z_1\right) \cdot \varphi\left(z_2\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(z_{N-1}\right) \cdot \varphi\left(1\right)}\right). \tag{35}$$

Таким образом, мы представили одну из возможных формулировок связывающих функцию h_φ с квазисредними. Например, для $N = 2$ имеем

$$f_\varphi\left(x_1, x_2\right) = \sqrt{x_1 x_2}\varphi^{-1}\left(\sqrt{\varphi\left(y_1\right)\varphi\left(y_2\right)}\right), \tag{36}$$

тогда из предыдущих выражений (см. (14), (19) и (16)) и, учитывая (20), получаем

$$h_\varphi\left(z\right) = \varphi^{-1}\left(\sqrt{\varphi\left(z\right)\varphi\left(1\right)}\right), \quad h_\varphi\left(1\right) = \varphi^{-1}\left(\sqrt{\varphi\left(1\right)\varphi\left(1\right)}\right) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(1\right)\right) = 1. \tag{37}$$

Это выражение удовлетворяет уравнению на функцию h в (21), так как, используя (30), имеем

$$h_\varphi\left(z\right) = z\varphi^{-1}\left(\sqrt{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\varphi\left(1\right)}\right) = zh_\varphi\left(\frac{1}{z}\right), \tag{38}$$

и, следовательно, $h_\varphi\left(z\right)$ можно рассматривать как одно из возможных решений.

Таким образом, в выборе вида инвариантного объема имеется широкий спектр возможностей при каждом N. Выберем конкретный вид инвариантного объема взаимодействия как произвольную сумму трех средних: среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое с произвольными действительными коэффициентами α, β, γ. Тогда можно написать

$$d\Omega_{int}^{(N)} = d^D x \cdot \sqrt[2N]{g_1 \ldots g_N} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}\left[\frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{(N)} + \beta + \gamma\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{y_i^{(N)}}}\right], \tag{39}$$

где $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Будем рассматривать выражение (39) как наиболее естественный вид физически осмысленного инвариантного объема взаимодействия в мультигравитации. Отметим, что в [22] был рассмотрен частный случай $\alpha = \gamma = 0$ и $\beta = 1$.

ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ

Общий вид взаимодействия мультигравитации описывается скалярным потенциалом $V(\mathrm{g}^{(1)},\ldots,\mathrm{g}^{(N)})$ как функция от N метрик $\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}$ в D-мерном пространстве-времени. Группа симметрии N вселенных является прямым произведением групп диффеоморфизмов [22]

$$G_{full}=\mathrm{Diff}\left(\varepsilon^{(1)}_{\mu}\right)\times\mathrm{Diff}\left(\varepsilon^{(2)}_{\mu}\right)\times\ldots\times\mathrm{Diff}\left(\varepsilon^{(N)}_{\mu}\right), \tag{40}$$

где каждый диффеоморфизм $\mathrm{Diff}\left(\varepsilon^{(i)}_{\mu}\right)$ действует на метрику $\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}$ вдоль вектора $\varepsilon^{(i)}_{\mu}(x)$. Группа G_{full} может быть редуцирована к диагональной подгруппе

$$G^{diag}_{full}=\mathrm{Diff}\left(\varepsilon_{\mu}\right)\times\mathrm{Diff}\left(\varepsilon_{\mu}\right)\times\ldots\times\mathrm{Diff}\left(\varepsilon_{\mu}\right), \tag{41}$$

когда все векторы совпадают $\varepsilon^{(i)}_{\mu}(x)=\varepsilon_{\mu}(x)$ [23]. Тогда инфинитизимальные преобразования любой метрики $\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}$ определяются производной Ли

$$\delta\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}=\mathcal{L}_{\varepsilon}\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}=\varepsilon^{\rho}\partial_{\rho}\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}+\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\rho}\partial_{\nu}\varepsilon^{\rho}+\mathrm{g}^{(i)}_{\rho\nu}\partial_{\mu}\varepsilon^{\rho}. \tag{42}$$

Скалярный потенциал ультралокального взаимодействия для G^{diag}_{full} должен быть функцией от скалярных функций от метрик $\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}$. Естественным выбором этих скалярных функций могут служить инварианты тензора с одним ковариантным и одним контравариантным индексами, построенного из метрик $\mathrm{H}^{\mu}_{\nu}=\mathrm{H}^{\mu}_{\nu}(\mathrm{g}^{(1)},\ldots,\mathrm{g}^{(N)})$. В этом случае собственные значения матрицы $\hat{\mathrm{H}}$, соответствующей тензору H^{μ}_{ν}, являются инвариантами относительно действия общих координатных преобразований $x^{\mu}\longmapsto\tilde{x}^{\mu}$, поскольку $\dfrac{\partial\tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\mathrm{H}^{\mu}_{\nu}\dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial\tilde{x}^{\beta}}=\tilde{\mathrm{H}}^{\alpha}_{\beta}$.

Для параметризации $\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{g}^{(1)},\ldots,\mathrm{g}^{(N)})$ используя следующее: в некоторых физически интересных моделях [25] (включая космологию [26]) метрика имеет диагональную форму, то есть

$$\mathrm{g}^{(i)}_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\left(\lambda^{(i)}_{0},\lambda^{(i)}_{1},\ldots,\lambda^{(i)}_{D-1}\right), \tag{43}$$

где $\lambda^{(i)}_{a}$ собственные значения i-той метрики. Поэтому структура матрицы $\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{g}^{(1)},\ldots,\mathrm{g}^{(N)})$ может быть описана по аналогии со структурой инвариантного объема взаимодействия, а именно, построим N матриц $\mathrm{H}^{(i)\mu}_{\nu}$ как произведение диагональных метрик

$$\mathrm{H}^{(i)\mu}_{\nu}=\mathrm{g}^{(i)\mu\alpha_1}\mathrm{g}^{(1)}_{\alpha_1\rho_1}\,\mathrm{g}^{(i)\rho_1\beta_1}\mathrm{g}^{(2)}_{\beta_1\rho_2}\cdot\ldots\cdot\mathrm{g}^{(i)\rho_{j-1}\alpha_j}\mathrm{g}^{(j)}_{\alpha_j\rho_j}\,\mathrm{g}^{(i)\rho_j\beta_j}\mathrm{g}^{(j+1)}_{\beta_j\rho_{j+1}}\cdot\ldots\cdot\mathrm{g}^{(i)\rho_{N-2}\alpha_{N-1}}\mathrm{g}^{(N-1)}_{\alpha_{N-1}\rho_{N-1}}\,\mathrm{g}^{(i)\rho_{N-1}\beta_{N-1}}\mathrm{g}^{(N)}_{\beta_{N-1}\nu}. \tag{44}$$

Матрицы $\hat{\mathrm{H}}^{(i)}$ удовлетворяют тождеству

$$\hat{\mathrm{H}}^{(1)}\hat{\mathrm{H}}^{(2)}\ldots\hat{\mathrm{H}}^{(N)}=\mathrm{I}, \tag{45}$$

где I — $D\times D$ единичная матрица. Так что имеется $(N-1)$ независимых матриц $\hat{\mathrm{H}}^{(i)}$. В случае бигравитации $(N=2)$ имеем две матрицы

$$\mathrm{H}^{(1)\mu}_{\nu}=\mathrm{g}^{(1)\mu\beta_1}\mathrm{g}^{(2)}_{\beta_1\nu},\qquad \mathrm{H}^{(2)\mu}_{\nu}=\mathrm{g}^{(2)\mu\alpha_1}\mathrm{g}^{(1)}_{\alpha_1\nu}, \tag{46}$$

которые являются взаимно обратными $\hat{\mathrm{H}}^{(1)}\hat{\mathrm{H}}^{(2)}=\mathrm{I}$ (см. (45)), поэтому достаточно рассматривать только одну из них (см., например, [22]). Можно определить следующие N^2 матриц $\hat{\mathrm{p}}^{(i,j)}$ как

$$\mathrm{p}^{(i,j)\mu}_{\ \ \nu}=\mathrm{g}^{(i)\mu\rho}\mathrm{g}^{(j)}_{\rho\nu}, \tag{47}$$

где $i,j=1,\ldots N$. Очевидно, что p-матрицы $\hat{\mathrm{p}}^{(i,j)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\mathrm{p}}^{(i,j)}\hat{\mathrm{p}}^{(j,k)}=\hat{\mathrm{p}}^{(i,k)}, \tag{48}$$

$$\hat{\mathrm{p}}^{(i,j)}\hat{\mathrm{p}}^{(j,i)}=\hat{\mathrm{p}}^{(i,i)}=\mathrm{I}. \tag{49}$$

Произведение (48) ассоциативно и обратимо (49), но определено не для всех элементов (второй индекс и у первого сомножителя должен совпадать с первым индексом у второго сомножителя в (48)), поэтому множество p-переменных является частичной группой [27]. Заметим, что существует $N(N-1)$ независимых p-матриц, которые коммутируют в случае диагональных метрик (43). Например, в бигравитации $N=2$, имеем $\hat{\mathrm{H}}^{(1)}=\hat{\mathrm{p}}^{(1,2)}$, $\hat{\mathrm{H}}^{(2)}=\hat{\mathrm{p}}^{(2,1)}$.

Для тернарной гравитации ($N=3$) построим матрицы $\hat{\mathrm{H}}^{(i)}$ из 6 независимых p-матриц

$$\hat{\mathrm{H}}^{(1)}=\hat{\mathrm{p}}^{(1,3)}\hat{\mathrm{p}}^{(1,2)},\quad \hat{\mathrm{H}}^{(2)}=\hat{\mathrm{p}}^{(2,1)}\hat{\mathrm{p}}^{(2,3)},\quad \hat{\mathrm{H}}^{(3)}=\hat{\mathrm{p}}^{(3,2)}\hat{\mathrm{p}}^{(3,1)}, \tag{50}$$

которые удовлетворяют тождеству $\hat{\mathrm{H}}^{(1)}\hat{\mathrm{H}}^{(2)}\hat{\mathrm{H}}^{(3)}=\mathrm{I}$. Используя (43), представим структуру собственных значений матриц $\mathrm{H}_{\nu}^{(i)\mu}$ через собственные значения метрик как

$$\hat{\mathrm{H}}^{(i)}=\mathrm{diag}\left(\frac{\left(\lambda_0^{(i)}\right)^N}{R_0},\frac{\left(\lambda_1^{(i)}\right)^N}{R_1},\ldots,\frac{\left(\lambda_{D-1}^{(i)}\right)^N}{R_{D-1}}\right), \tag{51}$$

где $R_a=\Pi_{i=1}^{N}\lambda_a^{(i)}$. Из (51), следует что

$$\det\hat{\mathrm{H}}^{(i)}=\frac{\left(\det\mathrm{g}^{(i)}\right)^N}{\Pi_{j=1}^{N}\det\mathrm{g}^{(j)}}, \tag{52}$$

и, очевидно, что $\Pi_{j=1}^{N}\det\hat{\mathrm{H}}^{(j)}=1$ (см. (45)). Отметим, что для метрики $\mathrm{g}_{\mu\nu}^{(i)}$ с сигнатурой $\left(+,\overbrace{-,\ldots-}^{D-1}\right)$ знаки собственных чисел определены (в физических моделях [25]) следующим образом $\lambda_0^{(i)}>0$, $\lambda_1^{(i)}<0,\ldots,\lambda_{D-1}^{(i)}<0$. Учитывая (51) и (45), получаем, что все собственные значения матриц $\hat{\mathrm{H}}^{(i)}$ являются положительными и ненулевыми, что позволяет определить новые μ-переменные

$$\mu_a^{(i)}=\ln\frac{\left(\lambda_a^{(i)}\right)^N}{R_a}, \tag{53}$$

которые удовлетворяют D тождествам

$$\sum_{i=1}^{N}\mu_a^{(i)}=0,\quad a=0,\ldots,D-1. \tag{54}$$

Учитывая (54), число независимых μ-переменных есть $D\,(N-1)$. Так что скалярный потенциал взаимодействия может быть выбран как гладкая функция μ-переменных, т.е. $V(\mathrm{g}^{(1)},\mathrm{g}^{(2)},\ldots,\mathrm{g}^{(N)})=\tilde{v}\left(\mu_a^{(i)}\right)$. Следуя [22] (где рассматривался частный случай $N=2$, $D=4$), выбираем базис для D независимых скаляров в виде симметричных полиномов

$$\sigma_k^{(i)}=\sum_{a=0}^{D-1}\left(\mu_a^{(i)}\right)^k, \tag{55}$$

где $k=1,\ldots,D$. Таким образом, наиболее общий вид скалярного потенциала взаимодействия для мультигравитации имеет вид

$$V(\mathrm{g}^{(i)})=v\left(\sigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)},\ldots\sigma_D^{(i)}\right),\quad i=1,\ldots,N, \tag{56}$$

где v — скалярная функция, имеющая ND аргументов. В случае плоских пространств взаимодействие отсутствует, поэтому задаем следующее "граничное" условие

$$v\,(0,0,\ldots 0)=0. \tag{57}$$

Выразим скалярный потенциал взаимодействия (56) через комбинацию инвариантов матриц $\hat{\mathrm{H}}^{(i)}$ в явном виде. Из (52), (53) и (55), получаем

$$\sigma_k^{(i)}=\mathrm{tr}\left(\ln\hat{\mathrm{H}}^{(i)}\right)^k. \tag{58}$$

Параметризуем метрику как

$$\mathrm{g}_{\mu\nu}^{(i)}=\eta_{\mu\nu}+\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(i)}, \tag{59}$$

где $\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(i)}$ некоторые возмущения над плоским фоном. Ограничиваясь квадратичными слагаемыми по возмущениям $\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(i)}$, которые соответствуют массивному случаю и отсутствию самодействия, получаем для $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ следующие выражения

$$\sigma_1^{(i)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left[\left(h^{(i)} - h^{(j)} \right) - \left(\left(h^{(i)}_{\mu\nu} \right)^2 - \left(h^{(j)}_{\mu\nu} \right)^2 \right) \right], \tag{60}$$

$$\sigma_2^{(i)} = (N-1)^2 \left(h^{(i)}_{\mu\nu} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left(h^{(j)}_{\mu\nu} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{k,j=1\\ j\neq k, k\neq i, j\neq i}}^{N} \mathrm{h}^{(j)\mu}{}_{\nu} \mathrm{h}^{(k)\nu}{}_{\mu} - 2(N-1)\, \mathrm{h}^{(i)\mu}{}_{\nu} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathrm{h}^{(j)\nu}{}_{\mu}. \tag{61}$$

где $h^{(i)} := \mathrm{h}^{(i)}_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ и $\left(h^{(i)}_{\mu\nu} \right)^2 := \mathrm{h}^{(i)}_{\mu\nu}\mathrm{h}^{(i)\mu\nu}$. Заметим, что $\sigma_k^{(i)} \sim \mathcal{O}\left(\left(h^{(i)} \right)^k \right)$, следовательно, ограничиваясь квадратичными слагаемыми, нет необходимости рассматривать выражения со степенями $k \geq 3$. Таким образом, общий вид скалярного потенциала взаимодействия в мультигравитации в квадратичном приближении, а также в диагональной параметризации метрик и группы диффеоморфизмов G^{diag}_{full}, имеет вид

$$V(\mathrm{g}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N} \left[a_i \sigma_1^{(i)} + b_i \left(\sigma_1^{(i)} \right)^2 + c_i \sigma_2^{(i)} \right], \tag{62}$$

где a_i, b_i, c_i произвольные действительные константы. Из (60) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_1^{(i)} = 0, \tag{63}$$

что согласуется с (54).

БИГРАВИТАЦИЯ И МОДЕЛЬ ПАУЛИ-ФИРЦА

Рассмотрим бигравитацию ($N = 2$) и получим из общих принципов модель Паули-Фирца. Вместо (60)–(61) имеем (с точностью до квадратичных слагаемых по возмущениям $\mathrm{h}^{(1,2)}_{\mu\nu}$)

$$\sigma_1^{(1)} = -\sigma_1^{(2)} = h^{(1)} - h^{(2)} - \left(\left(h^{(1)}_{\mu\nu} \right)^2 - \left(h^{(2)}_{\mu\nu} \right)^2 \right) \equiv \sigma_1, \tag{64}$$

$$\sigma_2^{(1)} = \sigma_2^{(2)} = \left(h^{(1)}_{\mu\nu} \right)^2 + \left(h^{(2)}_{\mu\nu} \right)^2 - 2\mathrm{h}^{(1)\mu}{}_{\nu}\mathrm{h}^{(2)\nu}{}_{\mu} \equiv \sigma_2. \tag{65}$$

Для скалярного потенциала взаимодействия сумма (62) принимает вид (с учетом (57))

$$V(\mathrm{g}^{(1)}, \mathrm{g}^{(2)}) = a\sigma_1 + b\sigma_1^2 + c\sigma_2, \tag{66}$$

где a, b, c - произвольные действительные константы размерности $(mass)^4$. Тогда полное действие для бигравитации запишется как

$$S^{(2)} = -M_1^2 \int d^4x R_1 \sqrt{g_1} - M_2^2 \int d^4x R_2 \sqrt{g_2} + \int d\Omega^{(2)}_{int} V(\mathrm{g}^{(1)}, \mathrm{g}^{(2)}), \tag{67}$$

где $M_{1,2}$ константы размерности $(mass)^1$, и $d\Omega^{(2)}_{int}$ - инвариантный объем взаимодействия для бигравитации (5), который имеет вид

$$d\Omega^{(2)}_{int} = d^4x \cdot \sqrt[4]{g_1 g_2} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma} \left[\frac{\alpha}{2} \left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right) + \beta + 2\gamma \left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} + \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right)^{-1} \right], \tag{68}$$

где α, β, γ - безразмерные параметры и $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Заметим, что параметризация (59) выражения (68) приводит к виду $d\Omega^{(2)}_{int} = d^4x \cdot \sqrt[4]{g_1 g_2} + \ldots$, где $\ldots$ означают слагаемые квадратичные по возмущениям $\mathrm{h}^{(1,2)}_{\mu\nu}$. Эти слагаемые не вносят вклада в (67), потому что мы ограничиваемся вторым порядком, а скалярный потенциал взаимодействия (66) не содержит слагаемых без $\mathrm{h}^{(1,2)}_{\mu\nu}$. Используя разложение (59) и применяя его к действию (67), получаем

$$S^{(2)} = \int d^4x \left(L_{kin} + L_{int} \right), \tag{69}$$

где

$$L_{kin} = \frac{1}{4}M_1^2\left[\partial^\rho \mathrm{h}_{\mu\nu}^{(1)}\partial_\rho \mathrm{h}^{(1)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(1)}\partial_\mu h^{(1)} + 2\partial_\mu \mathrm{h}^{(1)\mu\nu}\partial_\nu h^{(1)} - 2\partial_\mu \mathrm{h}^{(1)\mu\nu}\partial_\rho \mathrm{h}_\nu^{(1)\rho}\right]$$
$$+ \frac{1}{4}M_2^2\left[\partial^\rho \mathrm{h}_{\mu\nu}^{(2)}\partial_\rho \mathrm{h}^{(2)\mu\nu} - \partial^\mu h^{(2)}\partial_\mu h^{(2)} + 2\partial_\mu \mathrm{h}^{(2)\mu\nu}\partial_\nu h^{(2)} - 2\partial_\mu \mathrm{h}^{(2)\mu\nu}\partial_\rho \mathrm{h}_\nu^{(2)\rho}\right], \quad (70)$$

$$L_{int} = b(h^{(1)} - h^{(2)})^2 + c\left(\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(1)} - \mathrm{h}_{\mu\nu}^{(2)}\right)(\mathrm{h}^{(1)\mu\nu} - \mathrm{h}^{(2)\mu\nu}) +$$
$$+ a\left(h^{(1)} - h^{(2)} + \mathrm{h}_{\mu\nu}^{(2)}\mathrm{h}^{(2)\mu\nu} - \mathrm{h}_{\mu\nu}^{(1)}\mathrm{h}^{(1)\mu\nu}\right) + \frac{a}{4}\left(\left(h^{(1)}\right)^2 - \left(h^{(2)}\right)^2\right). \quad (71)$$

Применим (3+1)-разложение [28] для полного действия (69). Отделим пространственные и временные компоненты в L_{int}, тогда

$$L_{int} = b\left(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(1)} + h_{ii}^{(2)}\right)^2 + c\left(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)}\right)\left(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)}\right) - 2c\left(h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)}\right)\left(h_{0i}^{(1)} - h_{0i}^{(2)}\right) +$$
$$+ c\left(h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)}\right)\left(h_{ij}^{(1)} - h_{ij}^{(2)}\right) + a\left(h_{00}^{(1)} - h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(1)} + h_{ii}^{(2)}\right) +$$
$$+ a\left(h_{00}^{(2)}h_{00}^{(2)} - 2h_{0i}^{(2)}h_{0i}^{(2)} + h_{ij}^{(2)}h_{ij}^{(2)} - h_{00}^{(1)}h_{00}^{(1)} + 2h_{0i}^{(1)}h_{0i}^{(1)} - h_{ij}^{(1)}h_{ij}^{(1)}\right) +$$
$$+ \frac{a}{4}\left(\left(h_{00}^{(1)} - h_{ii}^{(1)}\right)^2 - \left(h_{00}^{(2)} - h_{ii}^{(2)}\right)^2\right). \quad (72)$$

Ограничимся рассмотрением только скалярного сектора, что является достаточным для нахождения условий уничтожения духовых мод в спектре (для стандартной гравитации, см. [28]). Параметризуем (3+1) разложение в виде

$$h_{00}^{(1,2)} = 2\varphi_{(1,2)}, \quad h_{0i}^{(1,2)} = \partial_i B_{(1,2)}, \quad h_{ij}^{(1,2)} = -2(\psi_{(1,2)}\delta_{ij} - \partial_i\partial_j E_{(1,2)}), \quad (73)$$

где $\varphi_{(1,2)}, \psi_{(1,2)}, B_{(1,2)}, E_{(1,2)}$ — скалярные поля для возмущеной метрики $\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(1)}$ и $\mathrm{h}_{\mu\nu}^{(2)}$ соответственно. Из (69) получаем для кинетического слагаемого

$$L_{kin} = M_1^2\left[-2\psi_1\partial_k\partial_k\psi_1 - 6\dot\psi_1^2 - 4\varphi_1\partial_k\partial_k\psi_1 - 4\dot\psi_1\partial_k\partial_k B_1 + 4\dot\psi_1\partial_k\partial_k \dot E_1\right] +$$
$$+ M_2^2\left[-2\psi_2\partial_k\partial_k\psi_2 - 6\dot\psi_2^2 - 4\varphi_2\partial_k\partial_k\psi_2 - 4\dot\psi_2\partial_k\partial_k B_2 + 4\dot\psi_2\partial_k\partial_k \dot E_2\right], \quad (74)$$

и взаимодействия

$$L_{int} = b\left(2(\varphi_1 - \varphi_2) + 6(\psi_1 - \psi_2) - 2\Delta(E_1 - E_2)\right)^2 + c(4(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 2(B_1 - B_2)(\Delta B_1 - \Delta B_2) +$$
$$+ 12(\psi_1 - \psi_2)^2 + 4(\Delta E_1 - \Delta E_2)^2 - 8(\psi_1 - \psi_2)(\Delta E_1 - \Delta E_2)) +$$
$$+ a\left(4\left(\varphi_2^2 - \varphi_1^2\right) + 12\left(\psi_2^2 - \psi_1^2\right) + B_2\Delta B_2 - B_1\Delta B_1 + 4\left((\Delta E_2)^2 - (\Delta E_1)^2\right)\right. +$$
$$\left.+8\left(\psi_1\Delta E_1 - \psi_2\Delta E_2\right)\right) + a\left((\varphi_1 + 3\psi_1 - \Delta E_1)^2 - (\varphi_2 + 3\psi_2 - \Delta E_2)^2\right) +$$
$$+ a\left(2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + 6\left(\psi_1 - \psi_2\right) - 2\left(\Delta E_1 - \Delta E_2\right)\right). \quad (75)$$

Далее, рассмотрим часть полного лагранжиана, содержащую скалярные поля $\varphi_{(1,2)}$,

$$L(\varphi) = -4M_1^2\varphi_1\Delta\psi_1 - 4M_2^2\varphi_2\Delta\psi_2 + \varphi_1^2\left(4b + 4c - 3a\right) + \varphi_2^2\left(4b + 4c + 3a\right) +$$
$$+ \varphi_1\left(24b\left(\psi_1 - \psi_2\right) - 8b\left(\Delta E_1 - \Delta E_2\right) + 6a\psi_1 - 2a\Delta E_1\right) - 8\varphi_1\varphi_2\left(b + c\right) +$$
$$+ \varphi_2\left(-24b\left(\psi_1 - \psi_2\right) + 8b\left(\Delta E_1 - \Delta E_2\right) - 6a\psi_2 + 2a\Delta E_2\right) + 2a\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \quad (76)$$

Видно, что при

$$4b + 4c - 3a = 0 \quad (77)$$
$$4b + 4c + 3a = 0 \quad (78)$$
$$b + c = 0 \quad (79)$$

лагранжиан $L(\varphi)$ не содержит квадратичных слагаемых по полям $\varphi_{(1,2)}$, поэтому скалярные поля являются нединамическими (подробнее см. [28]). Система (77)–(79) эквивалентна

$$b + c = 0, \quad a = 0 \tag{80}$$

Только при таких соотношениях на параметры лагранжиан можно представить через разности соответствующих полей. Введем

$$\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 \tag{81}$$
$$B \equiv B_1 - B_2 \tag{82}$$
$$\psi \equiv \psi_1 - \psi_2 \tag{83}$$
$$E \equiv E_1 - E_2 \tag{84}$$

тогда лагранжиан взаимодействия (75) принимает вид

$$L_{int}^{(2)} = 4b \left[6\psi^2 + 6\varphi\psi - 2\varphi\Delta E - 4\psi\Delta E - \frac{1}{2} B\Delta B \right], \tag{85}$$

что совпадает с массовым лагранжианом Паули-Фирца в 3+1 разложении стандартной гравитации [28].

Однако чтобы доказать эквивалентность бигравитации (67) и теории Паули-Фирца, необходимо включить в рассмотрение также и кинетическую часть. Отметим, что кинетическое слагаемое (74) можно представить через поля (81)–(84) только с использованием уравнений движения (on-shell). Для этого выпишем полный лагранжиан (74) и (75) с учетом (81) и (82), имеем

$$\begin{aligned} L_{EH}^{(2)} + L_{int}^{(2)} = {} & M_1^2 \left[-2\psi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 6\dot{\psi}_1^2 - 4\varphi_1 \partial_k \partial_k \psi_1 - 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k B_1 + 4\dot{\psi}_1 \partial_k \partial_k \dot{E}_1 \right] + \\ & + M_2^2 \left[-2\psi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 6\dot{\psi}_2^2 - 4\varphi_2 \partial_k \partial_k \psi_2 - 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k B_2 + 4\dot{\psi}_2 \partial_k \partial_k \dot{E}_2 \right] + \\ & + 24a \left(\psi_1 - \psi_2\right)^2 + 4a \left[6 \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\psi_1 - \psi_2\right) - 2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \Delta \left(E_1 - E_2\right) \right] - \\ & - 16a \left(\psi_1 - \psi_2\right) \Delta \left(E_1 - E_2\right) - 2a \left(B_1 - B_2\right) \Delta \left(B_1 - B_2\right) \end{aligned} \tag{86}$$

Система уравнений Эйлера-Лагранжа по полям $B_{1,2}$ принимает вид

$$4M_1^2 \Delta\dot{\psi}_1 + 4a \left(\Delta B_1 - \Delta B_2\right) = 0, \quad 4M_2^2 \Delta\dot{\psi}_2 + 4a \left(\Delta B_2 - \Delta B_1\right) = 0, \tag{87}$$

где мы представили зависящую от полей $B_{1,2}$ часть лагранжиана как

$$L(B) = 4M_1^2 \partial_k \dot{\psi}_1 \partial_k B_1 + 4M_2^2 \partial_k \dot{\psi}_2 \partial_k B_2 + 2a \left(\partial_k B_1 - \partial_k B_2\right)\left(\partial_k B_1 - \partial_k B_2\right). \tag{88}$$

Учитывая (82), формула (87) переходит в

$$M_1^2 \Delta\dot{\psi}_1 = -a\Delta B, \qquad M_2^2 \Delta\dot{\psi}_2 = a\Delta B, \tag{89}$$

откуда следует

$$M_1^2 \psi_1 = -M_2^2 \psi_2. \tag{90}$$

Для разностного поля ψ (83) получаем

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = \psi_1 + \frac{M_1^2}{M_2^2}\psi_1 = \frac{M_1^2 + M_2^2}{M_2^2}\psi_1 = -\frac{M_2^2}{M_1^2}\psi_2 - \psi_2 = -\frac{M_1^2 + M_2^2}{M_1^2}\psi_2. \tag{91}$$

Учитывая (89), имеем

$$B = \frac{M_1^2}{-a}\dot{\psi}_1 = \frac{M_1^2 M_2^2}{-a\left(M_1^2 + M_2^2\right)}\dot{\psi} \tag{92}$$

После чего часть лагранжиана $L(B)$ (88) принимает вид

$$L(B) = 2\frac{M_1^4 M_2^4}{a\left(M_1^2 + M_2^2\right)^2}\dot{\psi}\Delta\dot{\psi}. \tag{93}$$

Варьирование (86) по полям $\varphi_{(1,2)}$ приводит к системе

$$\begin{cases} -M_1^2\Delta\psi_1 + 6a\left(\psi_1-\psi_2\right) - 2a\left(\Delta E_1 - \Delta E_2\right) = 0 \\ -M_2^2\Delta\psi_2 - 6a\left(\psi_1-\psi_2\right) + 2a\left(\Delta E_1 - \Delta E_2\right) = 0 \end{cases}, \tag{94}$$

которая, с учетом (84) и (90), эквивалентна выражению

$$\Delta E = -\frac{M_1^2 M_2^2}{2a\left(M_1^2+M_2^2\right)}\Delta\psi + 3\psi. \tag{95}$$

Тогда, часть лагранжиана, содержащую поля $E_{1,2}$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L(E) &= 4M_1^2\dot\psi_1\Delta\dot E_1 + 4M_2^2\dot\psi_2\Delta\dot E_2 - 8a\varphi\Delta E - 16a\psi\Delta E = \\ &= 4\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\dot\psi\left(-\frac{M_1^2M_2^2}{2a\left(M_1^2+M_2^2\right)}\Delta\dot\psi + 3\dot\psi\right) - 8a\left(\varphi+2\psi\right)\left(-\frac{M_1^2M_2^2}{2a\left(M_1^2+M_2^2\right)}\Delta\psi + 3\psi\right). \end{aligned} \tag{96}$$

Оставшиеся слагаемые в кинетическом выражении полного лагранжиана (86) также выразим через поле ψ

$$\begin{aligned} L_k(\psi) &= -2M_1^2\psi_1\Delta\psi_1 - 2M_2^2\psi_2\Delta\psi_2 - 6M_1^2\dot\psi_1^2 - 6M_2^2\dot\psi_2^2 - 4M_1^2\varphi_1\Delta\psi_1 - 4M_2^2\varphi_2\Delta\psi_2 = \\ &= -2\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\left(\psi\Delta\psi + 3\dot\psi^2 + 2\varphi\Delta\psi\right). \end{aligned} \tag{97}$$

Полный лагранжиан (86) есть

$$\begin{aligned} L_{EH}^{(2)} + L_{int}^{(2)} &= L_k(\psi) + L(B) + L(E) + 24a\psi^2 + 24a\varphi\psi = \\ &= 6\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\left(\dot\psi^2 + \psi\Delta\psi\right) - 24a\psi^2. \end{aligned} \tag{98}$$

Представим постоянную a через новую постоянную m_g^2

$$a = \frac{1}{4}\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}m_g^2, \tag{99}$$

тогда скалярный сектор бигравитации принимает вид

$$L = 6\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\left(\dot\psi^2 + \psi\Delta\psi - m_g^2\psi^2\right) = 6\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\left(\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - m_g^2\psi^2\right), \tag{100}$$

где m_g - масса гравитона. Действие (67) с учетом условий (80) запишется, как

$$S_g = -M_1^2\int R_1\sqrt{-g_1}d^4x - M_2^2\int R_2\sqrt{-g_2}d^4x - \frac{1}{4}\frac{M_1^2M_2^2}{M_1^2+M_2^2}\int\left(g_1g_2\right)^{1/4}d^4x(\sigma_2-\sigma_1^2). \tag{101}$$

Из этого следует, что только полное действие бигравитации приводит к теории Паули-Фирца. Отметим, что в работе [22] слагаемое взаимодействия было предложено на основе полу-эвристических рассуждений, в то время, как мы доказали это в рамках 3+1 разложения строго и с использованием кинетической части лагранжиана.

ВЫВОДЫ

В данной работе мы исследовали взаимодействие в моделях мультигравитации. Вначале мы построили инвариантный объем взаимодействия мультигравитации в общем виде. Затем частный случай объема как сумма трех различных средних (в работе [22] рассматривалось только геометрическое среднее) был использован при анализе модели бигравитации. В рамках формализма 3+1 разложения нами строго доказана эквивалентность полного лагранжиана бигравитации (с учетом кинетических слагаемых типа эйнштейновских) и массивной теории Паули-Фирца.

Примененный в работе формализм 3+1 разложения, а также развитый нами подход при разложении метрики над плоским фоном (метрикой Минковского) легко можно обобщить для вычисления поправок над искривленным фоном (метрикой Шварцшильда, Керра, различными космологическими моделями и т.д.). Это является важным при изучении нестабильности Бульвара-Дезера [19], так как данная мода может отсутствовать в теории над плоским фоном и проявляться над искривленным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. f-Dominance of gravity // Phys. Rev. - 1971. - Vol. D3. - № 4. - P. 867–873.
2. Aichelburg P. C., Mansouri R., Urbantke H. K. Exact wave-type solution to f-g theory of gravity // Phys. Rev. Lett. - 1971. - Vol. 27. - P. 1533–1534.
3. Aichelburg P. C. Implications of classical two-tensor gravity // Phys. Rev. - 1973. - Vol. D8. - № 2. - P. 377–384.
4. Deffayet C., Mourad J. Multigravity from a discrete extra dimension // Phys. Lett. - 2004. - Vol. B589. - P. 48–58.
5. Deffayet C., Mourad J. Some properties of multigravity theories and discretized brane worlds // Int. J. Theor. Phys. - 2004. - Vol. 43. - P. 855–864.
6. Blas D. Bigravity and massive gravity // AIP Conf. Proc. - 2006. - Vol. 841. - P. 397–401.
7. Hannestad S. Dark energy and dark matter from cosmological observations // Int. J. Mod. Phys. - 2006. - Vol. A21. - P. 1938–1949.
8. Grib A. A., Pavlov Y. V. Superheavy particles and the dark matter problem // Grav. Cosmol. - 2006. - Vol. 12. - P. 159–162.
9. Dubovsky S. L., Tinyakov P. G., Tkachev I. I. Massive graviton as a testable Cold-Dark-Matter candidate // Phys. Rev. Lett. - 2005. - Vol. 94. - № 18. - P. 181102.
10. Damour T., Kogan I. I., Papazoglou A. Non-linear bigravity and cosmic acceleration // Phys. Rev. - 2002. - Vol. D66. - P. 104025.
11. Deffayet C., Dvali G., Gabadadze G. Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions // Phys. Rev. - 2002. - Vol. D65. - № 4. - P. 044023.
12. Zakharov V. I. Linearized gravitation theory and the graviton mass // JETP Lett. - 1970. - Vol. 12. - P. 312–315.
13. van Dam H., Veltman M. J. G. Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // Nucl. Phys. - 1970. - Vol. B22. - P. 397–411.
14. Vainshtein A. I. To the problem of nonvanishing gravitation mass // Phys. Lett. - 1972. - Vol. B39. - P. 393–394.
15. Koyama K., Niz G., Tasinato G. Strong interactions and exact solutions in non-linear massive gravity // Phys. Rev. - 2011. - Vol. D84. - P. 064033.
16. Babichev E., Deffayet C., Ziour R. The recovery of general relativity in massive gravity via the Vainshtein mechanism // Phys. Rev. - 2010. - Vol. D82. - P. 104008.
17. Bergshoeff E. A., Hohm O., Townsend P. K. Massive gravity in three dimensions // Phys. Rev. Lett. - 2009. - Vol. 102. - P. 201301.
18. de Rham C., Gabadadze G. Generalization of the fierz-pauli action // Phys. Rev. - 2010. - Vol. D82. - P. 044020.
19. Boulware D., Deser S. Can gravitation have a finite range? // Phys. Rev. - 1972. - Vol. D6. - P. 3368–3382.
20. Paulos M. F., Tolley A. J. Massive gravity theories and limits of ghost-free bigravity models.- Paris, 2012. (Preprint LPTHE).
21. Hassan S. F., Rosen R. A. Bimetric gravity from ghost-free massive gravity // JHEP. - 2012. - № 2. - P. 1–12.
22. Damour T., Kogan I. I. Effective lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity // Phys. Rev. - 2002. - Vol. D66. - P. 104024.
23. Boulanger N., Damour T., Gualtieri L., Henneaux M. Inconsistency of interacting, multigraviton theories // Nucl. Phys. - 2001. - Vol. B597. - P. 127–171.
24. Duplij S. A., Kotvytskiy A. T. Coincidence limit and generalized interaction term structure in multugravity // J. Kharkov National Univ., ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2007. - Vol. 784. - № 3(25). - P. 61–66.
25. Weinberg S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. - New York: Wiley, 1972.
26. Wald R. M. General Relativity. - Chicago: University of Chicago Press, 1984.
27. Hermann R. Quantum and Fermion Differential Geometry. - Brookline: Math. Sci. Press, 1994. - 371 p.
28. Rubakov V. A., Tinyakov P. G. Infrared-modified gravities and massive gravitons // Phys.-Usp. - 2008. - Vol. 51. - P. 759–792.