

УДК 533.9

**ПОДОБИЕ В ОПИСАНИИ 1D ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН****В.М. Куклин***Харьковский Национальный университет имени В.Н. Каразина
г. Харьков, пл. Свободы, 4, Украина, 61022**E-mail: kuklinvm1@rambler.ru*

Received January 15, 2013, accepted February 21, 2013

Показано, что процессы модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний как в горячей, так и в холодной плазме имеют ту же симметрию и механизмы возбуждения коротковолнового спектра. При уменьшении амплитуды накачки максимум инкремента в холодной плазме сдвигается в коротковолновую область, а в горячей плазме – уменьшает инкременты во всей области спектра. Максимальный инкремент в холодной плазме при уменьшении амплитуды поля накачки не изменяется, в горячей – уменьшается. Движение энергии в коротковолновую часть спектра обусловлено взаимодействием мод, но в холодной плазме этому также способствует сдвиг максимума линейного инкремента, а в горячей плазме – большие инкременты в коротковолновой части спектра. Если возмущения ионов симметричны в пространстве, то структура поля и электронной плотности будет представлять собой стоячую волну, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается. При отсутствии такой симметрии поле и искажения плотности формируются за счет сложной интерференции возмущений разных масштабов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модуляционная неустойчивость, ленгмюровские колебания, горячая и холодная плазма, симметрии пространственных возмущений

SIMILARITY IN 1D DESCRIPTION PARAMETRIC INSTABILITIES OF LANGMUIR WAVES**V.M. Kuklin***V.N. Karazin Kharkiv National University
4, Svobody Sq., Kharkov, Ukraine, 61022*

It is shown, the modulation instability processes of long-wave Langmuir oscillation in hot and cold plasmas are possessed such a symmetry and mechanism of short-wave oscillation excitation. The maximum of the growth rate of the instability in cold plasma moves in short-wave part of spectrum, in hot plasma the growth rates in all over the spectral region are reduced, if the amplitude of pump wave has decreased. The value of the growth rate maximum in cold plasma in this case not changes, but in hot plasma similar value decreases. The energy motion along the spectrum is due to mode coupling and in cold plasma the drift of the growth rate maximum, in hot plasma – large-scale increments in short-wave part of spectrum. The spatial symmetry of ions perturbation is associated with such symmetry type of field and electrons perturbation. The amplitude of standing wave structure, which is appeared in that case, is increasing and the half-width of it is reducing in initial stage of the instability. When such symmetry is absent, the field and the density deformation are formed at the expense of the interference of different scale perturbation.

KEY WORDS: modulation instability, Langmuir oscillation, hot and cold plasmas, spatial symmetry

ПОДІБНІСТЬ В ОПИСІ 1D ПАРАМЕТРИЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ЛЕНГМЮРІВСЬКИХ ХВИЛЬ*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
м. Харків, пл. Свободи, 4, Україна, 61022*

Показано, що процеси модуляційної нестійкості довгохвильових ленгмюрівських коливань, як у гарячій, так і в холодній плазмі мають таку ж симетрію та механізми збудження короткохвильового спектру. При зменшенні амплітуди накачки максимум інкременту в холодній плазмі прямує до короткохвильової частини спектру, а у гарячій плазмі це зменшує інкременти всього спектру нестійкості. Максимальний інкремент у холодній плазмі при зменшенні амплітуди поля накачки не змінюється, а максимальний інкремент у гарячій плазмі за тих умов стає меншим. Рух енергії в напрямку короткохвильової частини спектру, що обумовлено взаємодією мод, у холодній плазмі також підтримується зсувом максимуму інкременту, а в гарячій плазмі пов'язано з тим, що в короткохвильової частині спектру найбільші інкременти лінійної нестійкості. Коли іонні збудження симетричні в просторі, то структура поля та електронні збудження формують стоячу хвилю, амплітуда якої зростає, а напівширина зменшується на початковій стадії процесу. За відсутності такої симетрії поле та порушення густини формуються за рахунок складної інтерференції збуджень різного масштабу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модуляційна нестійкість, ленгмюрівські коливання, гаряча та холодна плазма, симетрії просторових збуджень

Интерес к параметрической неустойчивости интенсивных ленгмюровских волн, которые легко возбуждаются в плазме различными источниками [1-9], был обусловлен, в частности, открывшимися возможностями нагрева электронов и ионов. Корректный аппарат описания параметрической неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний фактически был создан в основополагающих работах В.П. Силина [10] и В.Е. Захарова [11]. Уже в первых численных 1D экспериментах по параметрическому распаду ленгмюровских колебаний [12] были подтверждены теоретические представления [10] (см. также [13,14] и обзор [15]). Однако наибольший интерес у экспериментаторов вызвал обнаруженный В.Е. Захаровым механизм диссипации волновой энергии. Аналитические исследования, аппаратные и численные эксперименты еще на

ранней стадии [16-18]. изучения этих явлений подтвердили тот факт, что в некоторых случаях заметная часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра и появляются выбросы быстрых частиц [16-27].

В частности, даже в одномерном численном моделировании процесса на базе обобщенных уравнений Силина [28-30] можно было наблюдать частичный обмен энергией между спектром и интенсивной волной накачки. Ионная каверна «схлопывалась», то есть, переходила в режим пересечения траекторий частиц [31]. Отметим, что динамика процесса совпадала с ранее выполненными численным расчетами [19]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [31] (здесь m_e и m_i - массы электронов и ионов, соответственно). Для электронов переход в режим пересечения траекторий мог сдерживаться существованием ионных каверн, что способно было синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения. Эксперименты по созданию вблизи плазменного резонанса в неоднородной плазме значительной плотности энергии поля W , превышающей плотность тепловой энергии плазмы $n_{e0}T_e$, с частотой, близкой к ленгмюровской, демонстрировали на фоне нагрева электронов вблизи плазменного резонанса появление коротких импульсов быстрых частиц. Причем, наряду с электронами имел место вынос энергии из области плазменного резонанса ионами [32-33] с достаточно большими энергиями (см., например, обзорную работу [34]). Область источников электронных импульсов соответствовала малым размерам каверн плотности. Соотношение энергии, запасенной как в быстрых ионах, так и в быстрых электронах, после разрушения каверны примерно отвечало приведенным в теории [31] значениям.

Рассмотрение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно рассматривалось теоретиками раздельно, хотя эксперименты часто не разделяли эти процессы. В данной работе автор сделал попытку на примере одномерного описания согласовать эти близкие по физическому проявлению модели, изучить симметрию возмущений и найти условия перехода от одной модели к другой. Выбор одномерных моделей процессов, как отметил Дж. Даусон, часто сохраняет основные черты процессов, существенно упрощая описание и понимание физических явлений [35]. Обсуждение особенностей подобия и симметрии уравнений, кроме всего прочего, способно прояснить причину достаточно редких случаев наблюдения в экспериментах режимов с обострением, приводящих к аномальному нагреву электронов и тем более ионов.

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА, ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА

Описание поведения электронов плазмы в условиях, когда фазовые скорости ленгмюровских волн превосходят их тепловую скорость может быть гидродинамическим. Ионы можно описывать как гидродинамически, так и кинетически. Для упрощения описания ниже ограничимся одномерным случаем. При этом, для скорости v_e и плотности n_e электронов справедливы следующие уравнения

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e} E + \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial P_e}{\partial x} = -\{v_e \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_e\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (n_e \cdot v_e), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e \cdot (n_i - n_e), \quad (3)$$

где $E = -\partial\phi/\partial x$, ϕ - напряженность и потенциал электрического поля колебаний, $P_e = n_e T_e$ - давление, T_e - температура в энергетических единицах и $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ - тепловая скорость электронов, $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ - скорость звука, n_e и n_i - возмущенные плотности электронов и ионов плазмы, n_0 - невозмущенная плотность как электронов, так и ионов плазмы, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$, $\Omega_i = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$ - ленгмюровская электронная и плазменная ионная частоты.

Представим электрическое поле в виде $E = \sum_n E_n \exp\{ik_n x\} = \sum_n E_n \exp\{ink_0 x\}$, где величина $k_n = nk_0$ определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра. Перепишем уравнения (1) - (2) в виде

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} - \frac{e}{m_e} E_n + \frac{v_{Te}^2}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e = -ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n_{en}}{\partial t} + n_0 \cdot ik_0 n \cdot v_{en} = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{en-m} \cdot v_{em}, \quad (5)$$

$$ik_0 n \cdot E_n = 4\pi e (n_{in} - n_{en}). \quad (6)$$

Исключим $E_n = -4\pi i e(n_{in} - n_{en}) / k_0 n$ и (4) примет вид

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} = \frac{4\pi e^2 i}{k_0 n \cdot m_e} (n_{in} - n_{en}) - \frac{v_{Te}^2}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e - ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}. \quad (7)$$

Представим, следуя [36] плотность и скорость электронов в виде

$$-en_{en} = \sum_s u_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (8)$$

$$v_{en} = \sum_s v_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (9)$$

$$E_n = \sum_s E_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = \bar{E}_n + \frac{1}{2} (E_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + E_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t}) + E_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + E_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}. \quad (10)$$

Воспользуемся линейными соотношениями $u_{n-m}^{(\pm)} = \pm k_0 (n-m) \cdot en_0 \omega_0^{-1} v_{n-m}^{(\pm)}$ и найдем нерезонансные величины

$$v_{n-m}^{(0)} = \frac{1}{en_0} \sum_m (u_{n-m}^{(1)} \cdot v_{n-m}^{(-1)} + u_{n-m}^{(-1)} \cdot v_{n-m}^{(1)}) = \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right]_n, \quad (11)$$

$$u_n^{(0)} + en_{in} = -\frac{m_e}{4\pi e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}]_n, \quad (12)$$

$$v_{n-m}^{(\pm 2)} = \mp \frac{k_0}{\omega_0} \sum_m m v_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_{n-m}^{(\pm 1)} = \mp \frac{1}{i\omega_0} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n, \quad (13)$$

$$u_n^{(\pm 2)} = -\frac{k_0^2 n \cdot en_0}{\omega_{pe}^2} \sum_s s v_s^{(\pm 1)} \cdot v_{n-s}^{(\pm 1)} = +\frac{en_0}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right]_n. \quad (14)$$

Уравнение для резонансных величин принимает вид

$$\begin{aligned} & \pm 2i\omega_0 \left\{ \frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp i \frac{\omega_0 n}{2n_0} \sum_m n_{in-m} \frac{u_m^{(\pm 1)}}{m} \right\} = \\ & + k_0^2 n \cdot en_0 \sum_m m [v_{n-m}^{(0)} \cdot v_m^{(\pm 1)} + v_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(0)}] - \\ & - ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0) \sum_m [(u_{n-m}^{(0)} + v_{in-m}) \cdot v_m^{(\pm 1)} + u_{n-m}^{(\pm 1)} \cdot v_m^{(0)}] + \\ & + k_0^2 n \cdot en_0 \sum_m m v_{n-m}^{(\mp 1)} \cdot v_m^{(\pm 2)} - ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0) \sum_m [u_{n-m}^{(\pm 2)} \cdot v_m^{(\mp 1)}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Правая часть (15) определяет так называемую электронную нелинейность, которая в одномерном случае обращается в нулю [36,37]. Действительно, правая часть (15) равна $(k_0 n \cdot en_0 / \omega_0) \cdot I$, где для I справедливо тождество

$$\begin{aligned} I = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[v^{(\pm 1)} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \mp v^{(\pm 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v^{(1)} v^{(-1)}] - \frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)} \right] \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \pm v^{(\mp 1)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x} v^{(\pm 1)} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для резонансных возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial u_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} u_n^{(\pm 1)} \mp \frac{\omega_0}{2n_0} n \cdot \sum_m \frac{n_{in-m}}{m} u_m^{(\pm 1)} = 0, \quad (17)$$

или переходя к напряженности электрического поля

$$E_n^{(\pm 1)} = 4\pi i e u_n^{(\pm 1)} / 2k_0 n, \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_n^{(\pm 1)}}{\partial t} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n^{(\pm 1)} \mp i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{in-m} E_m^{(\pm 1)} = 0. \quad (19)$$

Если ионы описывать крупными частицами, уравнение движения для которых

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{m_i} \sum_n \bar{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \quad (20)$$

то плотность ионов определим как

$$n_{in} = n_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_0, t)] \cdot dx_{s0}. \quad (21)$$

Заметим, что описание ионов крупными частицами, кроме всего прочего, как показано в [31] позволяет увеличить устойчивость расчетной схемы. Компонент медленно меняющегося электрического поля может быть определен следующим образом. Так как для медленных движений справедливо приближение

$$n_e = n_0 \cdot \exp\left\{\frac{e\bar{\phi} - U}{T}\right\}, \quad (22)$$

то удерживая в уравнении Пуассона первые члены разложения получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\phi} = 4\pi e \cdot \left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T} n_0 - n_i\right), \quad (23)$$

где $\bar{\phi}$ и $\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n$ потенциал и напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля. Для ВЧ потенциала $U = \sum_n U_n \exp\{ik_0 n x\}$, причем $U_n = \frac{e^2}{4m_e \omega_p^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}$.

Очевидно левой частью уравнения (23) можно пренебречь в условиях $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_{\Phi}^2 \ll 1$ и тогда напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \bar{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{in} T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m_e \omega_p^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (24)$$

Описывать ионы можно и гидродинамически. Уравнение для медленных возмущений плотности и скорости ионов имеют вид

$$\frac{\partial n_{in}}{\partial t} + v_{in} \cdot ik_0 n \cdot n_0 = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{in-m} \cdot v_{im}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_{in}}{\partial t} - \frac{e}{m_i} \bar{E} = -ik_0 \cdot \sum_m m v_{in-m} \cdot v_{im}. \quad (26)$$

Правыми частями (25) и (26) пренебрежем, полагая их малыми. Тогда для возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 n_m}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_m = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)} \quad (27)$$

где скорость звука $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$. Отметим, что при выполнении условий $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_{\Phi}^2 \ll 1$ данное уравнение можно получить, используя соотношение (22) и первые члены разложения (23).

Уравнения (19) и (27) при $\omega_0 = \omega_{pe}$ в виде

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{2\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \cdot n_i E = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2, \quad (29)$$

известны как уравнения Захарова [11] в одномерном случае.

Симметрии

Можно убедиться, в том, что комплексно сопряженное уравнение (19) при верхнем знаке принимает вид

$$\frac{\partial (E_{-n}^{(1)})^*}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} (E_{-n}^{(1)})^* + i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \{n_{in}^* (E_0^{(1)})^* + \sum_{m \neq 0} n_{in-m}^* (E_m^{(1)})^*\} = 0, \quad (30)$$

В то же время для отрицательных индексов, это же уравнение может быть записано (при суммировании можно заменить немой индекс $m \rightarrow -m$)

$$\frac{\partial E_{-n}^{(-1)}}{\partial t} + i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_{-n}^{(-1)} + i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \{n_{i,-n} E_0^{(-1)} + \sum_{m \neq 0} n_{i,-n+m} E_{-m}^{(-1)}\} = 0. \quad (31)$$

а) Легко видеть, что при $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$ уравнения (30) и (31) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. То есть, возмущение плотности ионов обладает симметрией $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. При этом для корректного описания такой ионной каверны достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E_n^{(1)}$, $E_{-n}^{(1)}$ и $E_0^{(1)}$, а также возмущения плотности ионов $n_{i,n}$, так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от использования верхнего индекса.

Система уравнений (18), (27) в этих условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{in} = - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i} \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* \quad (33)$$

или при описании ионов частицами, можно воспользоваться уравнениями движения (20) и выражением для ионной плотности (2.21), где напряженность медленно меняющегося электрического поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n \tilde{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_m T}{en_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m_e \omega_p^2} \sum_m E_{n-m} E_{-m}^* \quad (34)$$

Для поля накачки, которой является длинноволновая ленгмюровская волна большой амплитуды, получим

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{i,-m} E_m = 0. \quad (35)$$

Отметим, что величины, отвечающие разному знаку нижнего индекса при этом независимы, что приводит к пространственному искажению интегральных возмущений, не только из-за изменения амплитуды, но и за счет пространственного сдвига возмущений разного масштаба.

б) Кстати, если $n_{i,-n} = n_{i,n} = (n_{i,n})^*$, то есть, возмущения ионной плотности не меняют своего положения в пространстве, то ВЧ электрическое поле также остается симметричным в пространстве $E_n^{(1)} = E_{-n}^{(1)} = (E_n^{(-1)})^* = (E_{-n}^{(-1)})^*$ и для описания процесса достаточно значений $E_n^{(1)}$ и $n_{i,n}$, что обусловлено жесткой связью величин, отвечающих разному знаку нижнего индекса. Структура поля и плотности будет представлять собой неподвижную пространственную структуру, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается, по крайней мере в определенной области.

в) С другой стороны, возмущение ионов вида $n_{i,-n} = -(n_{i,n})^*$ оказывается запрещено электронной дисперсией.

Дозвуковой режим

В условиях, когда $\partial^2 n_{in} / n_{in} \partial t^2 \ll k_p^2 c_s^2$, где k_p - волновой вектор колебаний, уравнение (33) упрощается

$$n_{in} = - \frac{1}{16\pi m_i c_s^2} \sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \quad (36)$$

Подставляя значения n_{in} в уравнение (28), представим его в виде

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \frac{\omega_{pe}}{32\pi m_i c_s^2 n_0} \cdot |E|^2 E = 0. \quad (37)$$

В другой форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n + \frac{i\omega_0}{32\pi m_i n_0 c_s^2} \cdot \sum_m \sum_p E_{n-m-p} E_{-p}^* E_m = 0. \quad (38)$$

Сверхзвуковой режим

При $\partial^2 n_{in} / n_{in} \partial t^2 \gg k_p^2 c_s^2$ возможно развитие сверхзвукового режима процесса. В этом случае уравнение (27) для медленных возмущений принимает вид

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i} \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^*, \quad (39)$$

или

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2. \quad (40)$$

Для волны большой амплитуды (волны накачки) волновой вектор которой стремится к нулю справедливо уравнение (35), а для коротковолновых возмущений

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_0} E_n - i \frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \{n_n E_0 + \sum_{m \neq 0} n_{n-m} E_m\} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = - \frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i} \{E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m \neq 0, n} E_{n-m} E_{-m}^*\}. \quad (42)$$

Приведем также значение для медленно меняющейся напряженности поля с учетом волны накачки

