УДК 538.9.

О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА СИСТЕМУ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С МУЛЬТИПЛИЦИРУЮЩИМИ И ПОГЛОЩАЮЩИМИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

С.А. Николаенко[*], Ю.В. Слюсаренко[*,]**
** Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера ННЦ ХФТИ, Украина, Харьков 61108, ул. Академическая 1*
*** Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина, Харьков 61022, пл. Свободы 4*
E-mail: s_nikolayenko@kipt.kharkov.ua
Received August 30, 2013, accepted September 19, 2013

В работе рассмотрена динамика длинноволновых неравновесных флуктуаций, обусловленных воздействием внешнего стохастического поля, в системах частиц, взаимодействующих с мультиплицирующими и поглощающими средами. Получены общие уравнения динамики длинноволновых флуктуаций в рамках метода усреднения уравнений эволюции параметров описания по внешней случайной силе. Подробно изучен случай воздействия на систему аддитивного гауссова шума. Показано, что при таком характере внешней случайной силы существует временной интервал, в течение которого при описании эволюции системы можно ограничиться учетом динамики только парных гидродинамических корреляций. Выведены линеаризованные уравнения динамики системы и проанализированы их общие решения в случае малых пространственных неоднородностей. Рассмотрены условия формирования стационарных состояний в такой системе и изучены вопросы их устойчивости. Обнаружено существенное влияние на устойчивость стационарных состояний особенностей динамики длинных неравновесных флуктуаций, которые развиваются в системе даже в том случае, если они отсутствовали в начальный момент времени.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стохастические процессы, релаксация, длинноволновые флуктуации, внешняя случайная сила, размножающие и поглощающие среды

ON THE EFFECT OF EXTERNAL STOCHASTIC FIELD ON SYSTEMS OF PARTICLES INTERACTING WITH MULTIPLYING AND CAPTURING HYDRODYNAMIC MEDIA

S.O. Nikolayenko *, Yu.V. Slyusarenko *'**
**Akhiezer Institute for Theoretical Physics NSC KIPT, Akademichna Str. 1, Kharkiv 61108, Ukraine*
*** V.N. Karazin Kharkov National UniversityUkraine, Kharkiv 61022, Svobody Square 4.*
This work considers dynamics of non-equilibrium long wave fluctuations in systems of particles interacting with multiplying and capturing media, generated by external stochastic field. General dynamic equations for long wave fluctuations are obtained using the method of averaging over external random force. The case of additive Gaussian noise is considered in detail. It is shown that in the case of such an external random force there exists a time interval during which the description of the evolution of the system can be limited to considering only the dynamics of the hydrodynamic pair correlations. Linearised dynamic equations for pair correlations are obtained, and their solutions in case of small spatial inhomogeneity are considered. The formation of stationary states and the problem of their stability is studied. It has been shown that long wave fluctuations can be generated by external random force and dramatically influence on stability of stationary states in some cases.
KEY WORDS: stochastic processes, relaxation, long wave fluctuations, external random force, multiplying and capturing media

ПРО ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО СТОХАСТИЧНОГО ПОЛЯ НА СИСТЕМУ ЧАСТИНОК, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ З МУЛЬТИПЛІКУЮЧИМИ ТА ПОГЛИНАЮЧИМИ ГІДРОДИНАМІЧНІМИ СЕРЕДОВИЩАМИ

С.О. Ніколаєнко*, Ю.В. Слюсаренко*'**
** Інститут теоретичної фізики ім. А.И. Ахієзера ННЦ ХФТИ, Україна, Харків 61108, вул. Академічна 1*
*** Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Україна, Харків 61022, майдан Свободы 4*
У роботі розглянута динаміка довгохвильових нерівноважних флуктуацій, обумовлених дією зовнішнього стохастичного поля у системах частинок, що взаємодіють з мультіплікуючими та поглинаючими середовищами. Отримані загальні рівняння динаміки довгохвильових флуктуацій у рамках методу усереднення рівнянь еволюції параметрів опису системи за зовнішньою випадковою силою. Детально вивчено випадок дії на систему адитивного Гаусового шуму. Показано, що при такому характері зовнішньої сили існує інтервал, у продовж якого при описі системи можна обмежитися врахуванням динаміки тільки парних гідродинамічних кореляцій. Виведено линеаризовані рівняння динаміки системи там проаналізовано їх загальні розв’язки у випадку малих просторових неоднорідностей. Розглянуто умови формування стаціонарних станів ц такій системі та вивчено питання їх стабільності. Знайдено істотний вплив на стійкість стаціонарних станів особливостей динаміки довгих нерівноважних флуктуацій, які виникають у системі, навіть якщо вони були відсутні у початковий момент часу.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: стохастичні процеси, релаксація, довгохвильові флуктуації, зовнішня випадкова сила, розмножуючі та поглинаючі середовища

Интерес к динамике крупномасштабных неравновесных флуктуаций имеет как академическую, так и прикладную составляющие. С точки зрения фундаментальной науки интерес к неравновесным флуктуациям обусловлен вопросами динамического обоснования статистической механики. Последовательное обоснование требует прояснения роли крупномасштабных флуктуаций в релаксационных процессах с установлением границ применимости классической (нефлуктуационной) кинетической теории. Заметим в этой связи, что несколько десятилетий назад в численном эксперименте был обнаружен степенной характер затухания автокорреляционных функций для двух- и трехмерных моделей газов [1]. Первые попытки объяснить этот результат с помощью феноменологической теории "длинных гидродинамических хвостов" были изложены в работах [2,3]. Было показано, что наличие крупномасштабных корреляций (их еще называют длинноволновыми флуктуациями) оказывает существенное влияние на релаксацию системы к состоянию статистического равновесия. В частности, наличие неравновесных гидродинамических флуктуаций приводит к релаксации системы к равновесному состоянию по степенному закону. Из более поздних работ, в которых изучались длинноволновые флуктуации в феноменологическом подходе, следует отметить работы [4-6]. В [6] эволюция систем с большим радиусом корреляций рассматривалась в гиббсовском подходе. Впоследствии был предложен микроскопический подход к описанию неравновесных гидродинамических флуктуаций [7], основанный на методе сокращенного описания Боголюбова [8, 9].

Что касается прикладных аспектов теории длинноволновых неравновесных флуктуаций, то они связаны с определяющей ролью гидродинамических длинноволновых флуктуаций в широком классе задач теории турбулентности. Однако с точки зрения приложений к такого рода задачам при построении динамической теории флуктуаций необходимо учитывать влияние на систему внешних, в частности стохастических, сил. Возможность порождения крупномасштабных флуктуаций именно влиянием внешних стохастических сил существенным образом изменяет картину построения динамики этих флуктуаций, см., например, [10]. Отметим, что одними из первых работ, в которых отмечалась роль гидродинамических флуктуаций в теории турбулентности, были работы [11, 12]. С тех пор изучению роли длинноволновых флуктуаций в задачах теории турбулентности было посвящено огромное множество работ, число которых продолжает расти, см. в этой связи, например, [13] и имеющиеся там ссылки.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния длинноволновых флуктуаций, возникающих под действием внешней случайной силы, на релаксационные процессы системах, состоящих из частиц одного сорта, слабо взаимодействующих с гидродинамическими средами, образованными частицами другого сорта. Будем учитывать при этом возможность размножения и поглощения частиц первого сорта гидродинамическими средами. Указанная система система может служить в качестве модели описания распространения нейтронов в гидродинамических средах. Выбор именно такой системы для изучения обусловлен несколькими факторами, в том числе и возможной полезностью теории с точки зрения определенных приложений или рекомендаций. Во-первых, нейтроны используются исследователями как тонкий инструмент для экспериментального изучения внутреннего состояния конденсированных сред [14], вследствие чего могут быть использованы для обнаружения эффектов, связанных с наличием длинноволновых флуктуаций. Во-вторых, как увидим далее, длинноволновые флуктуации могут существенно влиять на развитие определенного вида неустойчивостей, присущих размножающим средам. Последнее обстоятельство необходимо дополнительно учитывать при планировании экспериментальных или инженерных установок, использующих физические свойства таких сред. Отметим, что настоящая работа продолжает наши исследования динамики длинноволновых флуктуаций в подобного рода системах, начатые несколькими годами ранее. Нами были рассмотрены кинетический и гидродинамический этапы эволюции систем частиц, взаимодействующих с гидродинамическими средами без учета процессов их размножения и поглощения средой, [15]. Была исследована динамика неравновесных гидродинамических флуктуаций, возникающих в таких системах из-за случайности истинных начальных условий для параметров описания, рассмотрено влияние этих флуктуаций на процессы релаксации. Была также построена теория длинных гидродинамических хвостов [16]. Однако до сих пор отсутствуют исследования, связанные с учетом воздействия на такие системы внешней случайной силы, порождающей крупномасштабные флуктуации. Не учитывались также возможности поглощения и размножения частиц гидродинамическими средами. Решить ряд проблем, связанных с учетом обоих отмеченных обстоятельств, призвана настоящая наша статья. А именно целью настоящей работы является вывод общих уравнений флуктуационной динамики для систем частиц, взаимодействующих с мультиплицирующими и поглощающими гидродинамическими средами, под воздействием внешней стохастической силы. Одной из главных задач является анализ влияния гидродинамических корреляций на установление стационарных состояний и их устойчивость в исследуемой системе на основе полученных общих уравнений.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ВНЕШНЕЙ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ

Для решения заявленных во Введении задач прежде всего необходимо получить уравнения эволюции неравновесных флуктуаций. Для этого используем стохастический подход, основанный на усреднении по внешней случайной силе известных уравнений эволюции для параметров описания исследуемой системы.

Будем считать, что изучаемая система может быть описана набором параметров $\zeta_a\left(\mathbf{x},t\right)$ (здесь индекс "a" нумерует компоненты набора) которые удовлетворяют следующим уравнениям движения

$$\frac{\partial\hat{\zeta}_a(\mathbf{x},t)}{\partial t}=L_a\left(\mathbf{x},\hat{\zeta}(\mathbf{x}',t)\right)+\hat{\Phi}_a\left(\mathbf{x},t,\hat{\zeta}(\mathbf{x},t)\right). \tag{1}$$

Последнее слагаемое $\hat{\Phi}_a$ в уравнении (1) представляет собой случайную внешнюю силу, действующую на систему. Знак "^" над $\hat{\Phi}_a$ и $\hat{\zeta}_a$ подчеркивает случайный характер этих величин, обусловленный случайностью внешней силы. В процессе вывода уравнений мы будем пытаться сохранить максимальную общность, не конкретизируя сразу набор параметров описания системы. Отметим, что среди параметров описания могут быть такие гидродинамические величины как плотность массы системы, плотности отдельных ее компонентов, плотность импульса и плотность энергии. Внешние силы в приведенных уравнениях также следует понимать в обобщенном смысле. Это могут быть как механические силы, действующие на систему со стороны некоторого внешнего поля, так и приток в систему или отток из нее энергии и массы отдельных компонентов за счет процессов, выходящих за рамки гидродинамического описания. В качестве последних могут рассматриваться поглощение и излучения света компонентами системы, захват пролетающих через систему частиц (например нейтронов), или другие процессы, связанные с обменом массой, энергией и импульсом с окружающей средой.

Воздействие на систему внешней случайной силы поднимает вопрос об усреднении уравнений (1) по заданному распределению этой силы. В результате такого усреднения мы и получим общие уравнения динамики флуктуаций для изучаемой системы. Однако для проведения указанного усреднения необходимо конкретизировать зависимость шума $\hat{\Phi}_a\left(\mathbf{x},t,\hat{\zeta}(\mathbf{x},t)\right)$ от параметров описания системы $\zeta_a(\mathbf{x},t)$. Явный вид такой зависимости может быть достаточно сложным. Наиболее просто такая зависимость выглядит в тех случаях, когда система подвержена воздействию мультипликативного или аддитивного шумов. Процедура усреднения уравнений эволюции при воздействии на систему мультипликативного шума подробно изложена в [10]. В настоящей работе мы рассмотрим другой простой случай, когда внешняя сила входит в уравнения аддитивным образом:

$$\Phi_a\left(\mathbf{x},t,\hat{\zeta}(\mathbf{x},t)\right)=\hat{Y}_a(\mathbf{x},t). \tag{2}$$

С целью усреднения уравнений (1) по аддитивному шуму введем в рассмотрение величины

$$\zeta^{s}_{a_1,..,a_s}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_s,t)=\left\langle\zeta_{a_1}(\mathbf{x}_1,t)..\zeta_{a_s}(\mathbf{x}_s,t)\right\rangle, \tag{3}$$

где скобки $\langle...\rangle$ означают усреднение по плотности вероятности $W\left[\hat{Y}\right]$ внешней случайной силы $\hat{Y}$:

$$\langle...\rangle\equiv\int...W\left[\hat{Y},\hat{Z}\right]D\hat{Y}. \tag{4}$$

Введем далее производящий функционал средних $\zeta^{s}_{a_1,..,a_s}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_s,t)$ формулой:

$$F(u_a,\zeta_a)=\left\langle\exp\int dx\hat{\zeta}_a(x,t)u_a(x)\right\rangle. \tag{5}$$

Средние величины порядка $\zeta^{s}_{a_1,..,a_s}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_s,t)$ могут быть получены s-кратным дифференцированием производящего функционала $F(u_a,\zeta_a)$ по функциональному аргументу $u_a(x)$:

$$\zeta^{s}_{a_1,..,a_s}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_s,t)=\left.\frac{\delta^s F(u_a,\zeta_a)}{\delta u_{a_1..}(\mathbf{x}_1)..\delta u_{a_s..}(\mathbf{x}_s)}\right|_{u_a(\mathbf{x})=0}. \tag{6}$$

Введем теперь производящий функционал $\mathcal{G}(u,\xi)$ корреляционных функций $\xi_{a_1...a_s}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_s;t)$:

$$\mathcal{G}(u,\xi)=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}\int d\mathbf{x}_1...\int d\mathbf{x}_s u_{a_1}(\mathbf{x}_1)...u_{a_s}(\mathbf{x}_s)\,\xi^{(s)}_{a_1..a_s}(\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_s;t), \tag{7}$$

связанный с функционалом F выражениями:

$$F(u,\zeta)=\exp G(u,\zeta),\quad G(u,\zeta)=G_0(u,\zeta)+\mathcal{G}(u,\xi),\quad G_0(u,\zeta)\equiv\int d\mathbf{x}\zeta_a(\mathbf{x};t)u_a(\mathbf{x}), \tag{8}$$

где $\zeta_a(\mathbf{x};t)\equiv\left\langle\hat{\zeta}_a(\mathbf{x};t)\right\rangle$. Заметим, что корреляционные функции, как и средние величины, определенные в (4), инвариантны относительно одновременной перестановки индексов и соответствующих им аргументов:

$$\zeta^{s}_{a_1,..a_i,..a_j,..,a_n}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_i,..,\mathbf{x}_j,..,\mathbf{x}_s,t)=\zeta^{s}_{a_1,..a_j,..a_i,..,a_n}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_j,..,\mathbf{x}_i,..,\mathbf{x}_s,t). \tag{9}$$

Корреляционные функции порядка s могут быть получены s-кратным дифференцированием производящего функционала $\mathcal{G}(u_a,\zeta_a)$ по функциональному аргументу $u_a(x)$ аналогично(10).

Легко показать, что любой функционал $A\left(\hat{\zeta}\right)$, усредненный по внешней случайной силе в соответствии с

(4), может быть записан как функционал корреляционных функций $A\left(\zeta,\xi^{(2)},\xi^{(3)},...\right)$ [7]:

$$\left\langle A\left(\hat{\zeta}\right)\right\rangle=\exp\left(\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta},\xi\right)\right)A(\zeta). \tag{11}$$

Далее, дифференцируя выражение (5) и используя (1), придем к следующему уравнению эволюции для производящего функционала:

$$\frac{\partial F(u,\zeta_a)}{\partial t}=\int d\mathbf{x}u_a(\mathbf{x})\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)\hat{Y}_a(\mathbf{x})\right\rangle+\int d\mathbf{x}u_a(\mathbf{x})\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)L_a\left(\mathbf{x},\hat{\zeta}(\mathbf{x}',t)\right)\right\rangle. \tag{12}$$

Для сокращения последующих выражений мы ввели обозначение $\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)=\exp\left(\int d\mathbf{y}u_a(\mathbf{y})\zeta_a(\mathbf{y};t)\right)$. Первое слагаемое в выражении (12) учитывает действие внешней силы на систему, а второй член описывает процессы эволюции внутри системы. Чтобы получить замкнутое уравнение эволюции для производящего функционала, необходимо выразить оба слагаемых в этом уравнении через производящий функционал. После простых, но громоздких преобразований с учетом формул (8) для второго члена в (12) получим выражение:

$$\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)L_a\left(\mathbf{x},\hat{\zeta}(\mathbf{x}',t)\right)\right\rangle=\exp\left(G_0(u;\zeta)\right)\exp\left(\mathcal{G}\left(u+\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)\right)L_a(\zeta). \tag{13}$$

Преобразование же первого члена в правой части (12) оказывается более сложным, поскольку приходится найти способ выразить величину $\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)\hat{Y}_a(\mathbf{x})\right\rangle$ через функционал $F(u,\zeta_a)$. Для этого необходимо воспользоваться формулой Фуруцу - Новикова, доказанной в работе [17] для гауссового распределения случайных внешних полей. Эту формулу можно обобщить на случай произвольных случайных внешних полей (но таких, которые имеют моменты любого порядка, см. в этой связи [10]).

При проведении дальнейших вычислений нами вводились некоторые ограничения на характер случайной внешней силы, а именно, шум считатлся гауссовым. Более того, предполагалось, что парную корреляционную функцию внешней случайной силы можно представить в виде:

$$b_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t_1,t_2)=b_{ab}\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2;\frac{t_1+t_2}{2}\right)g(t_1-t_2), \tag{14}$$

где функция $g(t_1-t_2)$ считается четной относительно перестановки велиин t_1,t_2, $g(t_1-t_2)=g(t_2-t_1)$, и отличной от нуля только в интервале $|t_1-t_2|<\tau_0$, где τ_0 — память случайного процесса. Будем далее также считать, что $\tau_0\to 0$ и потребуем, чтобы выполнялось условие $\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(t)dt=1$, вследствие чего корреляционная функция g может рассматриваться как несколько размытая дельта функция. В терминах введенных определений величину $\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)\hat{Y}_a(\mathbf{x})\right\rangle$, следуя методике работы [10], можно представить в виде:

$$\left\langle\exp\left(\int u\hat{\zeta}\right)\hat{Y}_a(\mathbf{x})\right\rangle=Y_a(\mathbf{x},t)F(u,\zeta)+\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'u_b(\mathbf{x})b_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}';t)F(u,\zeta). \tag{15}$$

Далее несложные преобразования уравнений (1) и (12) позволяют прийти к общим нелинейным уравнениям движения для параметров описания системы и производящего функционала корреляционных функций:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\zeta_a(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\exp\left(\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)\right)L_a\left(\mathbf{x},\hat{\zeta}(\mathbf{x}',t)\right)+Y_a(\mathbf{x},t),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{G}(u,\zeta)=\left\{\exp\left[\mathcal{G}\left(u+\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)-\mathcal{G}(u;\xi)\right]-\exp\left(\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)\right)\right\}\int dxu_a(\mathbf{x})L_a(\mathbf{x};\zeta)+\\
&\quad+\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''u_a(\mathbf{x}')u_b(\mathbf{x}'')b_{ab}(\mathbf{x}'',\mathbf{x}';t)F(u,\zeta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Из уравнения движения (16) для производящего функционала легко получить уравнение динамики для корреляционных функций произвольного порядка s путем s-кратной вариацией его по $u_a(\mathbf{x})$ с последующей заменой $u_a(\mathbf{x}) = 0$. Так, для парных корреляций уравнение эволюции имеет вид

$$\frac{\partial \xi_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)}{\partial t} = e^{\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)}\int d\mathbf{x}'\xi_{ac}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}',t)\frac{\delta L_b(\mathbf{x}_2;\zeta)}{\delta\zeta_c(\mathbf{x}')} + e^{\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)}\int d\mathbf{x}'\xi_{bc}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}',t)\frac{\delta L_a(\mathbf{x}_1;\zeta)}{\delta\zeta_c(\mathbf{x}')} +$$
$$+ e^{\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}\int d\mathbf{x}'_1..d\mathbf{x}'_s\xi^{(s+1)}_{ac_1..c_s}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}'_1..\mathbf{x}'_s,t)\frac{\delta^s L_b(\mathbf{x}_2;\zeta)}{\delta\zeta_{c_1}(\mathbf{x}'_1)..\delta\zeta_{c_s}(\mathbf{x}'_s)} + \tag{17}$$
$$+ e^{\mathcal{G}\left(\frac{\delta}{\delta\zeta};\xi\right)}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}\int d\mathbf{x}'_1..d\mathbf{x}'_s\xi^{(s+1)}_{bc_1..c_s}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}'_1..\mathbf{x}'_s,t)\frac{\delta^s L_a(\mathbf{x}_1;\zeta)}{\delta\zeta_{c_1}(\mathbf{x}'_1)..\delta\zeta_{c_s}(\mathbf{x}'_s)} + b_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t).$$

Отметим, что правая часть уравнения содержит корреляционную функцию внешней силы $b_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)$. Следовательно, зарождение парных корреляций параметров описания может быть обусловлено непосредственно воздействием внешней силы. Выписать уравнения динамики корреляционных функций более высоких порядков, чем второй, принципиальных трудностей не составляет. Мы не будем их здесь выписывать из-за громоздкости. Отметим лишь то обстоятельство, что как следует из (16), уравнения эволюции для корреляционных функций параметров описания системы корреляционной функции внешней силы не содержат. Они содержат только нелинейные слагаемые, образованные корреляционными функциями второго и более высокого порядков. Следовательно, корреляционные функции порядков выше второго под воздействием внешней силы могут зарождаться лишь нелинейным образом через парные корреляции. Последнее обстоятельство позволяет в случае малых корреляций ограничиться рассмотрением динамики только парных корреляционных функций. Для этого достаточно использовать линеаризованное уравнения их эволюции на начальных этапах эволюции этих флуктуаций. Такое уравнение может быть легко получено из (18) пренебрежением корреляционными функциями более высокого порядка, чем второй:

$$\frac{\partial \xi_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)}{\partial t} = \int d\mathbf{x}'\xi_{ac}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}',t)\frac{\delta L_b(\mathbf{x}_2;\zeta)}{\delta\zeta_c(\mathbf{x}')} + \int d\mathbf{x}'\xi_{bc}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}',t)\frac{\delta L_a(\mathbf{x}_1;\zeta)}{\delta\zeta_c(\mathbf{x}')} + b_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t). \tag{18}$$

Отметим, что изложенная выше ситуация является следствием воздействия на систему аддитивного шума. В случае мультипликативного шума ситуация с зарождением корреляций более высокого порядка чем второй совершенно иная, в чем можно убедиться из [10].

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

В настоящем разделе мы рассмотрим с достаточно общих позиций некоторые вопросы, связанные с влияним длинноволновых флуктуаций на устойчивость стационарных состояний и развитие неустойчивостей при воздействии стохастического внешнего поля на систему частиц, взаимодействующих с гидродинамическими средами.

Предположим, что существует такой набор не зависящих от времени значений параметров описания системы $\zeta_a^0(\mathbf{x})$ и значений внешних сил $Y_a^0(\mathbf{x})$, которые удовлетворяют уравнению движения (1)

$$0 = \mathcal{L}_a\left(\mathbf{x};\zeta_b^0(\mathbf{x})\right) + Y_a^0(\mathbf{x}). \tag{19}$$

Состояние, описываемое таким набором параметров, мы будем называть стационарным состоянием системы. Однако наличие формального стационарного решения уравнений динамики системы, как известно, еще не гарантирует реализации такого состояния в процессе эволюции системы. Существуют два аспекта возможности реализации стационарных состояний в некоторой физической системы. Один из них связан с приведением системы к стационарному состоянию, а второй — с устойчивостью системы в стационарном состоянии. На самом деле, эти аспекты связаны между собой, ибо если стационарное состояние устойчиво, то система может прийти к нему сама за счет диссипативных процессов. По этой причине в настоящей статье мы будем в основном касаться вопроса устойчивости стационарных состояний.

Вблизи стационарного состояния (19) параметры описания системы и внешние силы могут быть представлены в виде:

$$\zeta_a(\mathbf{x},t) = \zeta_a^0(\mathbf{x}) + \delta\zeta_a(\mathbf{x},t), \quad Y_a(\mathbf{x},t) = Y_a^0(\mathbf{x}) + \delta Y_a(\mathbf{x},t). \tag{20}$$

Формулы (20) позволяют линеаризовать уравнения динамики системы (16), (19) по отклонениям параметров описания и внешней случайной силы от их стационарных значений. В результате получим линеаризованные уравнения гидродинамики для параметров описания и их парных корреляционных функций:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \delta\zeta_a(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \int d\mathbf{x}' T_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\delta\zeta_b(\mathbf{x}') + \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' T_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\,\xi_{bc}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',t) + \delta Y_a(\mathbf{x},t),\\
&\frac{\partial \xi_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)}{\partial t} = \int d\mathbf{x}' \xi_{ac}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}',t)\,T_{bc}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}') + \int d\mathbf{x}' \xi_{bc}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}',t)\,T_{ac}(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}') + g_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t),
\end{aligned} \tag{21}$$

где введены следующие обозначения:

$$T_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}') \equiv \left.\frac{\delta L_a(\mathbf{x};\zeta)}{\delta\zeta_b(\mathbf{x}')}\right|_{\zeta=\zeta^0}, \quad T_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'') \equiv \left.\frac{\delta^2 L_a(\mathbf{x};\zeta)}{\delta\zeta_b(\mathbf{x}')\,\delta\zeta_c(\mathbf{x}'')}\right|_{\zeta=\zeta^0}. \tag{22}$$

Здесь необходимо сделать следующую оговорку. Выписанные уравнения учитывают эволюцию только парных корреляционных функций параметров описания системы. Данное приближение оправдывается приведенными несколько выше рассуждениями о том, что случайная сила порождает линейным образом только парные корреляции. В соответствии с этим, парные корреляции порождаются внешней силой непосредственно, а возникновение корреляций более высоких порядков обусловлено лишь взаимодействием парных корреляционных функций нелинейным образом. Благодаря этому можно полагать, что в состояниях, близких к стационарным, корреляции более высокого порядка будут развиваться очень медленно, в связи с чем их влиянием на динамику системы можно пренебречь. Необходимо отметить, что такое приближение, естественно, может оставаться справедливым только конечное время, определяющееся развитием корреляционных функций более высокого порядка за счет указанных выше нелинейных эффектов. Тем не менее, предлагаемая нами к рассмотрению задача вполне может иметь смысл. Например, в том случае, если время установления стационарного состояния (19) или время развития неустойчивостей за счет "линейных" эффектов намного меньше времени развития корреляционных функций параметров описания системы большего порядка, чем второй.

Отметим некоторые особенности уравнений (21). А именно заметим, что как собственная эволюция корреляционных функций, так и собственная эволюция отклонений гидродинамических параметров от равновесных значений определяется одной и той же величиной $T_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$. Влияние корреляций на эволюцию гидродинамических величин определяется величиной $T_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$.

В дальнейшем в этой работе мы будем рассматривать в основном динамику системы в состояниях, близких к пространственно однородным. Для этого формально введем определения пространственно однородных состояний как состояний, инвариантных относительно преобразований трансляции, то есть пространственного переноса на псотоянную величину:

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = const\,. \tag{23}$$

Напомним, что для величин, зависящих от одной пространственной координаты $A(\mathbf{x})$, таких, например, как гидродинамические параметры системы и внешние силы, пространственная однородность означает, что они вовсе не зависят от координат. Величины же, зависящие от двух координат $B_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)$, такие как парные корреляционные функции параметров описания системы и внешних сил, в пространственно однородном случае будут зависеть только от разности своих аргументов,

$$B_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t) = B_{ab}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2,t). \tag{24}$$

В этой связи отметим, что реальные физические системы имеют конечный размер, поэтому формально не могут быть полностью пространственно однородными. По этой причине для реальных систем понятие пространственной однородности следует трактовать несколько по-другому. Мы будем считать систему пространственно однородной, если внутри системы вдали от границ параметры ее описания инвариантны относительно переноса на расстояния, не превосходящие некого пространственного масштаба L_h, $|\mathbf{R}| \le L_h$, такого, что этот масштаб мал по сравнению с размером системы L, $L_h \ll L$. В соответствии с изложенным в дальнейшем будем считать, что равновесное состояние ζ_a^0 и соответствующие ему силы Y_a^0 в рассматриваемой нами области пространственно однородны, а корреляционные функции внешних сил и параметров описания зависят от разности своих координат.

Рассмотрим предварительно некоторые особенности вклада корреляций в эволюцию параметров описания системы, определяемого вторым членом первого уравнения системы (21). Как видно из уравнений, этот вклад характеризуется величиной

$$\delta\dot{\zeta}_a^{(cor)}(\mathbf{x},t) \sim \frac{1}{2}\int \left.\frac{\delta^2 L_a(\mathbf{x};\zeta)}{\delta\zeta_b(\mathbf{x}')\,\delta\zeta_c(\mathbf{x}'')}\right|_{\zeta=\zeta^0} \xi_{bc}(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',t). \tag{25}$$

Для вычисления этой величины необходимо знать явный вид уравнений эволюции системы, а именно величину $L_a(\mathbf{x};\zeta)$. Конкретный вид уравнений эволюции может существенно отличаться в зависимости от рассматриваемой системы, однако существуют и некоторые общие закономерности. Так, если параметрами описания системы являются плотности аддитивных интегралов движения, такие, например, как плотности компонентов системы, плотность импульса и плотность энергии, то величины $L_a(\mathbf{x};\zeta)$ будут иметь градиентный вид

$$L_a(\mathbf{x};\zeta)=\frac{\partial\zeta_{ak}(\mathbf{x},\zeta)}{\partial x_k}. \tag{26}$$

Последний факт представляется очевидным, однако он строго следует из законов сохранения при выводе уравнений гидродинамики. В этом случае величины $\zeta_{ak}(\mathbf{x},\zeta)$ представляют собой плотности потоков соответствующих интегралов движения. Микроскопический вывод и свойства общих уравнений динамики многокомпонентной жидкости рассмотрены в книге [9]. Заметим, однако, что величины $L_a(\mathbf{x};\zeta)$ могут иметь и неградиентные слагаемые. Такие ситуации могут возникать при необходимости учета при описании, например, немеханических процессов, связанных с химическими или ядерными реакциями между компонентами системы, и сопутствующими им выделением энергии и изменением числа частиц. В случае же справедливости выражения (26) из уравнения (25) следует, что вклад корреляций в эволюцию параметров описания за счет градиентных членов в пространственно однородном случае равен нулю:

$$\delta\dot{\zeta}_a^{(cor)}(\mathbf{x},t)\sim\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\int\left.\frac{\delta^2\zeta_{ak}(\mathbf{x},\zeta)}{\delta\zeta_b(\mathbf{x}')\delta\zeta_c(\mathbf{x}'')}\right|_{\zeta=\zeta^0}\xi_{bc}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'',t)=0. \tag{27}$$

Таким образом, мы получили важный результат - в пространственно однородном случае только неградиентные члены уравнений эволюции могут обеспечивать вклад корреляций в эволюцию параметров описания системы.

Вернемся к изучению уравнений эволюции (21) для корреляционных функций и отклонений параметров описания от их стационарных значений. В дальнейших вычислениях используем преобразования Фурье по координатам в соответствии с формулами:

$$\phi(\mathbf{x},t)=\int d^3q\exp(i\mathbf{q}\mathbf{x})\phi(\mathbf{q},t);\quad \phi(\mathbf{q},t)=(2\pi)^{-3}\int d^3q\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x})\phi(\mathbf{x},t), \tag{28}$$

где ϕ — некая произвольная функция координаты x.

Чтобы перейти к фурье-образам в уравнениях (21), как легко видеть, необходимо уточнить вид величин $L_a(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}',t))$, определяющих эволюцию системы на изучаемом этапе. Конкретизация этих величин на данном этапе решения задачи понадобится минимальная. Во-первых, будем считать, что связь $L_a(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}',t))$ с параметрами описания $\zeta(\mathbf{x}',t)$ локальна, во-вторых, ограничимся рассмотрением разложения величины $L_a(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}',t))$ до второго порядка по пространственным градиентам величин $\zeta(\mathbf{x},t)$, как это имеет место в уравнениях обычной гидродинамики. Такие упрощения позволяет интегральные слагаемые в (21), содержащие величины $T_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ и $T_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$, схематически представить в терминах линейных дифференциальных операторов $\hat{T}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ и $\hat{T}_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$:

$$\hat{T}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')...=\int d\mathbf{x}'T_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')...=\left.\left(T_{ab}^{(0)}(\mathbf{x})+T_{ab;i}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i'}+T_{ab;ij}(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\right)\right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}...,$$

$$\hat{T}_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')...=\int d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''T_{abc}(\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'')...=\left(T_{abc}^{(0)}(\mathbf{x})+T_{abc;i}^{(1)}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i'}+T_{abc;i}^{(2)}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i''}+T_{abc;ij}^{(1)}(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}+\right. \tag{29}$$

$$\left.\left.+T_{abc;ij}^{(2)}(\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j''}+T_{abc;ij}^{(3)}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j''}\right)...\right|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}''=\mathbf{x}}$$

В последних выражениях явный вид величин $T_{ab}^{(0)}(\mathbf{x})$, $T_{ab;i}(\mathbf{x})$, $T_{ab;ij}(\mathbf{x})$, $T_{abc}^{(0)}(\mathbf{x})$, $T_{abc;i}(\mathbf{x})$ и $T_{abc;ij}(\mathbf{x})$ без особого труда может быть вычислен из (22), если известен явный вид $L_a(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}',t))$.

С учетом последних формул после элементарных преобразований придем к следующим уравнениям для фурье-образов отклонения параметров описания $\delta\zeta_a(\mathbf{q},t)$ от стационарных значений:

$$\frac{\partial\delta\zeta_a(\mathbf{q},t)}{\partial t}=\int d\mathbf{k}\delta\zeta_b(\mathbf{k},t)\frac{1}{(2\pi)^3}\left[ik_iT_{ab;i}(\mathbf{q}-\mathbf{k})-k_ik_jT_{ab;ij}(\mathbf{q}-\mathbf{k})\right]+\delta Y_a(\mathbf{q},t)+\frac{1}{2(2\pi)^6}\times$$
$$\times\int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\xi_{bc}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,t)\left\{T^{(0)}_{abc}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})+i\mathbf{k}_{1i}T^{(1)}_{abc;i}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})+i\mathbf{k}_{2i}T^{(2)}_{abc;i}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})-\right. \tag{30}$$
$$\left.-\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{1j}T^{(1)}_{abc;ij}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})-\mathbf{k}_{2i}\mathbf{k}_{2j}T^{(2)}_{abc;ij}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})-\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{2j}T^{(3)}_{abc;ij}(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{q})\right\},$$

и фурье-образов корреляционных функций $\zeta_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)$:

$$\frac{\partial\xi_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)}{\partial t}=\int d\mathbf{k}\xi_{ac}(\mathbf{q}_1,\mathbf{k},t)\frac{1}{(2\pi)^3}\left[T_{bc;0}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k})+ik_iT_{bc;i}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k})-k_ik_jT_{bc;ij}(\mathbf{q}_2-\mathbf{k})\right]+$$
$$+\int d\mathbf{k}\xi_{bc}(\mathbf{q}_2,\mathbf{k},t)\frac{1}{(2\pi)^3}\left[T_{ac;0}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k})+ik_iT_{ac;i}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k})-k_ik_jT_{ac;ij}(\mathbf{q}_1-\mathbf{k})\right]+g_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t) \tag{31}$$

В последних выражениях функции $T_{ab;..}(\mathbf{q})$ и $T_{ab;..}(\mathbf{q})$ являются Фурье-образами соответствующих функций координат, а верхние индексы 1, 2 и 3 в величинах $T^{(n)}_{abc;ij}$ и $T^{(n)}_{abc;ij}$ соответствуют нумерации, данной в определениях (29).

Отметим, что полученные уравнения справедливы для любых равновесных состояний $\zeta^0_a(\mathbf{x})$ (см. (19)), удовлетворяющих уравнениям эволюции для параметров описания системы системы, в том числе и пространственно неоднородных.

Полученная система уравнений (30), (31) может быть использована для решения различных задач, связанных с влиянием длинноволновых флуктуаций на устойчивость системы. В отдельных важных случаях эта система допускает дальнейшее значительное упрощение. В частности, в случае пространственно однородных стационарных значений ζ^0 величины $T_{ab;i}(\mathbf{x})$, $T_{ab;ij}(\mathbf{x})$, $T_{abc;i}(\mathbf{x})$ и $T_{abc;ij}(\mathbf{x})$ не зависят от координат, а их Фурье-образы будут пропорциональны дельта-функции от $\mathbf{q}$:

$$T_{ab,..}(\mathbf{q})=\delta(\mathbf{q})T^{(H)}_{ab,..},\quad T_{abc,..}(\mathbf{q})=\delta(\mathbf{q})T^{(H)}_{abc,..}. \tag{32}$$

Индекс (H) в последних выражениях и указывает на то обстоятельство, что мы имеем дело с пространственно однородным случаем.

Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$T^{(H)}_{ab}(\mathbf{k})=T^{(0)(H)}_{ab}+ik_iT^{(H)}_{ab;i}-k_ik_jT^{(H)}_{ab;ij}, \tag{33}$$

в терминах которых уравнение эволюции для корреляций (31) в случае пространственно однородного стационарного состояния примет вид:

$$\frac{\partial\xi_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)}{\partial t}=\xi_{ac}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)T^{(H)}_{bc}(\mathbf{q}_2)+\xi_{bc}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)T^{(H)}_{ac}(\mathbf{q}_1)+g_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t.) \tag{34}$$

Учтем далее, что в пространственно однородном случае величины $g_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)$ и $\zeta_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)$ зависят от разности своих координат

$$\xi_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,t)=\xi_{ab}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2,t),\quad g_{ab}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=g_{ab}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2), \tag{35}$$

вследствие чего их Фурье-образы удовлетворяют соотношениям:

$$g_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)g_{ab}(\mathbf{q}_1,t),\quad \xi_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)=(2\pi)^3\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)\xi_{ab}(\mathbf{q}_1,t). \tag{36}$$

С учетом (33), (36) уравнения (35) еще упрощаются:

$$\frac{\partial\xi_{ab}(\mathbf{q},t)}{\partial t}=\xi_{ac}(\mathbf{q},t)T^{(H)}_{bc}(-\mathbf{q})+\xi_{bc}(-\mathbf{q},t)T^{(H)}_{ac}(\mathbf{q})+g_{ab}(\mathbf{q},t). \tag{37}$$

Отметим, что формальное решение уравнения (34) после несложных преобразований можно записать в виде:

$$\xi_{ab}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,t)=\int_0^t d\tau e^{(t-\tau)T^{(H)}_{ac}(\mathbf{q}_1)}e^{(t-\tau)T^{(H)}_{bd}(\mathbf{q}_2)}g_{cd}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\tau)+e^{tT^{(H)}_{ac}(\mathbf{q}_1)}e^{tT^{(H)}_{bd}(\mathbf{q}_2)}\xi_{cd}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,0), \tag{38}$$

где $\xi_{cd}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,0)$ — начальные значения парных корреляционных функций параметров описания, или, с использованием (36):

$$\xi_{ab}(\mathbf{q},t)=\int_0^t d\tau e^{(t-\tau)T^{(H)}_{ac}(\mathbf{q})}e^{(t-\tau)T^{(H)}_{bd}(-\mathbf{q})}g_{cd}(\mathbf{q},\tau)+e^{tT^{(H)}_{ac}(\mathbf{q})}e^{tT^{(H)}_{bd}(-\mathbf{q})}\xi_{cd}(\mathbf{q},0). \tag{39}$$

Для дальнейшего продвижения в вычислениях удобно найти собственные векторы $V^{(\mu)}_a(\mathbf{q})$ и собственные значения $\lambda^{(\mu)}(q)$ матрицы эволюции $T^{(H)}_{ab}(\mathbf{q})$, решая уравнение:

$$T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})V_b^{(\mu)}(\mathbf{q})=\lambda^{(\mu)}(q)V_a^{(\mu)}(\mathbf{q}). \tag{40}$$

где индекс μ нумерует весь набор возможных собственных векторов. Используя собственные векторы матрицы эволюции и соотношение

$$e^{tT_{ac}^{(H)}(\mathbf{q})}=\sum_{\mu}e^{t\lambda^{(\mu)}(q)}V_a^{(\mu)}(\mathbf{q})P_a^{(\mu)}(\mathbf{q}), \tag{41}$$

в котором величина $P_a^{(\mu)}(\mathbf{q})$ представляет собой оператор-проектор на подпространство векторов $V_a^{(\mu)}(\mathbf{q})$, можно построить решение уравнения эволюции для корреляционных функций с начальными условиями при $t=0$:

$$\begin{aligned}\xi_{ab}(\mathbf{q},t)=&\sum_{\mu}\sum_{\nu}\left[1-\mathrm{e}^{t\left(\lambda^{(\mu)}(\mathbf{q})+\lambda^{(\nu)}(-\mathbf{q})\right)}\right]\left[\lambda^{(\mu)}(\mathbf{q})+\lambda^{(\nu)}(-\mathbf{q})\right]^{-1}V_a^{(\mu)}(\mathbf{q})P_c^{(\mu)}(-\mathbf{q})V_b^{(\nu)}(\mathbf{q})P_d^{(\nu)}(-\mathbf{q})g_{cd}(\mathbf{q})+\\&+\sum_{\mu}\sum_{\nu}\mathrm{e}^{t\left(\lambda^{(\mu)}(\mathbf{q})+\lambda^{(\nu)}(-\mathbf{q})\right)}V_a^{(\mu)}(\mathbf{q})P_c^{(\mu)}(-\mathbf{q})V_b^{(\nu)}(\mathbf{q})P_d^{(\nu)}(-\mathbf{q})\xi_{cd}(\mathbf{q},0).\end{aligned} \tag{42}$$

Первый член в полученном выражении описывает развитие корреляций под воздействием внешней силы, второй член характеризует собственную эволюцию корреляций и полностью соответствует результатам, полученным нами ранее для задачи с эффективными начальными условиями, см. в этой связи [16]. Обратим внимание, что в решении (42) мы ограничились рассмотрением стационарной внешней силы, считая величину $g_{cd}(\mathbf{q},t)$ не зависящей от времени при $t>0$.

Найденное решение (42) позволяет получить уравнение эволюции для параметров описания системы с учетом вклада в него динамики парных корреляций:

$$\frac{\partial\delta\zeta_a(\mathbf{x},t)}{\partial t}=\hat{T}_{ab}^{(H)}(\mathbf{x},t)\delta\zeta_b(\mathbf{x},t)+\delta Y_a(\mathbf{x},t)+X_a^{(corr)}(t). \tag{43}$$

Выписывая это уравнение, мы снова вернулись к координатной записи, подразумевая выполнение обратных преобразований Фурье. Оператор $\hat{T}_{ab}^{(H)}(\mathbf{x},t)$ представляет собой обратный Фурье-образ матрицы эволюции (33). Последний член в правой части уравнения (43) и учитывает вклад корреляций в динамику параметров описания:

$$X_a^{(corr)}(t)=T_{abc}^{(0)}\int d^3q\,\xi_{bc}(\mathbf{q},t), \tag{44}$$

где схематическое определение величины $T_{abc}^{(0)}$ см. в (29). Напомним, что как отмечалось выше, в пространственно однородном случае вклад корреляций в динамику параметров описания определяется только неградиентными слагаемыми в матрице эволюции $\hat{T}_{ab}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$, характеризуемыми величиной $T_{abc}^{(0)}$, что и нашло свое отражение в формуле (44).

Как видно из выражений (42)-(44), слагаемое $X_a^{(corr)}(t)$ не только определяет вклад корреляций в динамику параметров описания, но и характеризует устойчивость самой системы. Причем устойчивость системы полностью определяется спектром матрицы эволюции $T_{ac}^{(H)}(\mathbf{q})$. Таким образом, если гидродинамическая матрица эволюции имеет собственные значения, удовлетворяющих соотношению $\mathrm{Re}\left(\lambda^{\sigma}(\mathbf{q})\right)<0$ для всех $\mathbf{q}$, изучаемая система будет устойчивой, развитие корреляций под воздействием внешней силы достигнет некоторого стационарного предела, отклонения от равновесных состояний тоже достигнут равновесного значения, которое можно найти из уравнений (43). Тем самым наличие корреляций в системе будет эквивалентно воздействию некоторой постоянной пространственно однородной внешней силы, немного смещающей положение равновесия в системе. В случае же наличия собственных занчений с $\mathrm{Re}\left(\lambda^{\sigma}(\mathbf{q})\right)>0$ для всех $\mathbf{q}$, корреляции и отклонение от равновесного значения гидродинамических параметров будут нарастать. Кроме того, уже из общего выражения (39) видно, что в случае наличия неустойчивостей в системе, корреляции внешней силы служат лишь начальным толчком к развитию корреляций параметров описания в системе. То есть, если даже выйти за рамки описанных выше предположений и считать, что корреляции внешней силы будут существовать некоторое достаточно малое время, а потом снова обратятся в нуль, в неустойчивой системе корреляционные функции будут и дальше нарастать. Отметим также, что решение для корреляционных функций (42) содержит сумму двух собственных значений в показатели экспоненты, поэтому возможны ситуации, когда неустойчивость, обусловленная вкладом корреляций в динамику параметров описания будет превалировать над неустойчивостью, связанной с наличием в уравнениях эволюции параметров описания неградиентных слагаемых, о чем говорилось выше. Этот вопрос рассмотрен подробнее в следующем разделе.

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С РАЗМНОЖАЮЩИМИ И ПОГЛОЩАЮЩИМИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В качестве приложения построенной в предыдущих разделах общей теории изучим вклад корреляционных функций параметров описания в динамику частиц, взаимодействующих с мультиплицирующими и поглощающими гидродинамическими средами, находящимися под воздействием внешнего стохастического поля. Как нами уже отмечалось, такая система может служить моделью для системы, распространяющихся в гидродинамической среде, в том числе и в размножающей [18-21]. Мы рассмотрим наиболее простой модельный случай, предполагающий малую плотность числа частиц, взаимодействующих со средой. Сама гидродинамическая среда в нашей модели будет считаться однородной по составу, даже однокомпонентной для упрощения выкладок и наглядности результатов. Заметим, что такое предположение является упрощением, поскольку процесс захвата и размножения частиц, взаимодействующих со средой, должен сопровождаться процессами превращения частиц среды из одного сорта в другой. Однако предположение о малой плотности частиц, взаимодействующих со средой, позволяет нам считать изменения состава самой среды пренебрежимо малыми, по крайней мере, на некотором ограниченном масштабе времени.

В качестве параметров описания системы выберем плотность энергии среды $\zeta_0(\mathbf{x},t)=\varepsilon_0(\mathbf{x},t)+\rho(\mathbf{x},t)u^2(\mathbf{x},t)/2$, плотность импульса среды $\zeta_i(\mathbf{x},t)=\rho(\mathbf{x},t)u_i(\mathbf{x},t)$, плотность массы среды $\zeta_4(\mathbf{x},t)\equiv\rho(\mathbf{x},t)$ и плотность числа частиц $\zeta_5(\mathbf{x},t)\equiv n(\mathbf{x},t)$, взаимодействующих со средой (встречающаяся в этих формулах величина $u_i(\mathbf{x},t)$ представляет собой среднюю скорость частиц гидродинамической среды). Уравнения динамики для системы мы выпишем в полуфеноменологическом подходе. За основу мы возьмем уравнения динамики частиц, взаимодействующих с гидродинамической средой без поглощения и размножения частиц средой, полученные в микроскопическом подходе в работах [15,16] в рамках развитого там метода сокращенного описания (см. в этой связи также [9]). В эти уравнения будут добавлены члены, описывающие процессы захвата и размножения частиц, давно используемые в феноменологических теориях (см., например, [20,21]), а также включена внешняя случайная сила, действующая на компоненты системы.

С учетом сказанного уравнения эволюции для параметров системы можно записать в виде:

$$\frac{\partial\zeta_0(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{0k}^{(0)}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{0k}^{(1)}(\mathbf{x},t)+En+Y_0(\mathbf{x},t),\qquad \frac{\partial\zeta_i(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{ik}^{(0)}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{ik}^{(1)}(\mathbf{x},t)+Y_i(\mathbf{x},t),$$

$$\frac{\partial\zeta_4(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{4k}^{(0)}(\mathbf{x},t),\qquad \frac{\partial\zeta_5(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{5k}^{(0)}(\mathbf{x},t)-\frac{\partial}{\partial x_k}\zeta_{5k}^{(1)}(\mathbf{x},t)+KN+Y_5(\mathbf{x},t),\tag{45}$$

где величины $\zeta_{ak}^{(0)}(\mathbf{x},t)$ представляют собой бездиссипативные потоки:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{0k}^{(0)}(\mathbf{x},t)=p(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t)+n(\mathbf{x},t)T(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t)+\zeta_0(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t),\\
&\zeta_{ik}^{(0)}(\mathbf{x},t)=p(\mathbf{x},t)\delta_{ik}+n(\mathbf{x},t)T(\mathbf{x},t)\delta_{ik}+\rho(\mathbf{x},t)u_i(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t),\\
&\zeta_{4k}^{(0)}(\mathbf{x},t)=\zeta_k(\mathbf{x},t)=\rho(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t),\qquad \zeta_{5k}^{(0)}(\mathbf{x},t)=n(\mathbf{x},t)u_k(\mathbf{x},t).
\end{aligned}\tag{46}$$

а величины $\zeta_{ak}^{(1)}(\mathbf{x},t)$ являются диссипативными потоками:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{0k}^{(1)}(\mathbf{x},t)=u_i(\mathbf{x},t)t_{ik}^{(1)}(\mathbf{x},t)-\kappa\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial x_k},\\
&\zeta_{ik}^{(1)}(\mathbf{x},t)=t_{ik}^{(1)}(\mathbf{x},t)=-\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)-\zeta\delta_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_j},\\
&\zeta_{4k}^{(1)}(\mathbf{x},t)=0,\qquad \zeta_{5k}^{(1)}(\mathbf{x},t)=-D_{eff}\frac{\partial n(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}.
\end{aligned}\tag{47}$$

и $Y_a(\mathbf{x},t)$ - обобщенные в оговоренном выше смысле внешние случайные силы силы, действующие на систему. Величина в приведенных выше выражениях $p(\mathbf{x},t)$ представляет собой давление среды, а $T(\mathbf{x},t)$ - температуру среды. Параметр K описывает общий рост (когда $K>0$) или уменьшение (когда $K<0$) плотности частиц (иногда будем их называть также нейтронами), обусловленное размножением и поглощением их средой, а величина E описывает нагрев системы за счет выделения энергии при размножении и поглощении частиц ([18-21]). На эти величины стоит обратить особое внимание потому, что они входят в уравнения не градиентным образом. Выше уже отмечалась особая роль таких слагаемых в динамике параметров описания системы. Сделаем также следующую оговорку. Введенная нами плотность энергии гидродинамической среды $\zeta_0(\mathbf{x},t)$ учитывает только плотность ее внутренней (тепловой) энергии $\varepsilon_0(\mathbf{x},t)$ и кинетической энергии, и не учитывает энергию связи частиц (нейтронов) с частицами среды.Поэтому процессы поглощения и размножения частиц, взаимодействующих с гидродинамической средой, сопровождаются переходом энергии связи в тепловую энергию среды, что отражается в уравнениях появлением неградиентных членов. Отметим также, что мы выписали уравнения в упрощенном виде, пренебрегая некоторыми слабыми эффектами, такими, например, как термодиффузия частиц. Величина D_{eff} представляет собой эффективный коэффициент диффузии частиц в гидродинамической среде. В работе [15] было показано, что наличие частиц, взаимодействующих со средой, порождает новые механизмы переноса импульса и тепла в системе и приводит к появлению поправок к кинетическим коэффициентам первой и второй вязкости η и ζ_{visc}, а также теплопроводность κ, пропорциональных плотности нейтронов. По этой причине в настоящей работе предполагается, что все кинетические коэффициенты уже содержат эти поправки.

Особое внимание стоит уделить вопросу о соотношении плотности частиц и плотности гидродинамической среды. Как уже упоминалось выше, рассматриваемые нами уравнения справедливы только при малых плотностях частиц, $(mn/\rho)\ll 1$, то есть плотность массы частиц должна быть намного меньше плотности массы гидродинамической среды. Заметим, что учет процессов поглощения и размножения частиц накладывают дополнительные ограничения на плотность частиц. В самом деле, поглощающая и размножающая среда несомненно должна быть многокомпонентной, в которой процессы размножения и поглощения частиц связаны с переходом частиц--компонентов среды из одного сорта в другой. Поэтому существенные изменение состава среды могут сильно влиять на параметры, входящие в уравнения (45). По этой причине систему можно условно считать однокомпонентной только в том случае, если на рассматриваемых масштабах времен ее состав меняется слабо, что накладывает более строгие ограничения на плотность частиц. Фактически в реальных системах, в которых имеет место распространении нейтронов в различных средах, плотность нейтронов на много порядков меньше плотности среды. Поэтому в дальнейших вычислениях мы будем предполагать справедливость условий

$$\frac{mn}{\rho}\ll 1,\quad \frac{Mn}{\rho}\ll 1,\quad \frac{nT}{\rho S_0^2}\ll 1, \tag{48}$$

что и позволит считать гидродинамическую подсистему условно однокомпонентной. В последних выражениях величина M представляет собой среднюю массу частицы среды, а S_0 - скорость звука в среде без учета влияния частиц.

Выписанные выше уравнения гидродинамики могут быть исползованы для прояснения вопроса о влиянии парных корреляций на эволюцию всей исследуемой системы. Для этого необходимо вернуться к задаче на собственные значения, поставленной нами в предыдущем разделе, см. (40):

$$T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})V_b^{(\mu)}(\mathbf{q})=\lambda^{(\mu)}(q)V_a^{(\mu)}(\mathbf{q}), \tag{49}$$

где $\mu=0,1,2,3,4,5$, тперь уже с конкретной матрицей эволюции $T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})$, которая может быть получена путем линеаризации уравнений гидродинамики вблизи некоторого пространственно-однородного состояния ζ^0. При этом можно убедиться в том, что матрица эволюции $T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})$

$$T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})=T_{ab}^{(NG)}(\mathbf{q})+T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q})+T_{ab}^{(2)}(\mathbf{q}) \tag{50}$$

содержит неградиентные члены, то есть, члены, не зависящие от $\mathbf{q}$ и члены, пропорциональные q:

$$T_{ab}^{(NG)}(\mathbf{q})=\begin{pmatrix}0&0&0&E\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&K\end{pmatrix},\quad T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q})=-iq\begin{pmatrix}0&Bt_k&0&0\\At_i&0&Ct_i&Tt_i\\0&t_k&0&0\\0&\frac{N}{\rho}t_k&0&0\end{pmatrix},\qquad t_i\equiv\frac{q_i}{q}, \tag{51}$$

а также члены, пропорциональные q^2:

$$T_{ab}^{(2)}(\mathbf{q})=-q^2\begin{pmatrix}\frac{\kappa}{\rho c_v}&0&-\frac{\kappa}{\rho c_v}\left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\rho}\right)_T&0\\0&-\frac{\eta}{\rho}\delta_{ik}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)t_it_k&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&D_{eff}\end{pmatrix}. \tag{52}$$

Отметим, что при линеаризации уравнений мы считали справедливым соотношение $\zeta_i^0=0$, то есть, что система покоится как целое в рассматриваемой нами системе отсчета. В уравнении (51) для сокращения введены обозначения

$$A = \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_0}\right)_\rho, \quad B = \frac{p+\varepsilon_0}{\rho}, \quad C = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho}\right)_{\zeta_0}. \tag{53}$$

Все характеристики системы стоящие в выражениях (51)-(53) вычисляются при параметрах среды, равных стационарным (см. (19)). Отметим еще одну важную особенность введенных нами обозначений. Исследуемая система имеет шесть параметров описания, относящихся к четырем категориям физических величин - плотности энергии ζ_0, трем проекциям плотности импульса ζ_i, плотности массы среды ζ_4 и плотности частиц, взаимодействующих со средой (нейтронов) ζ_5. Однако для уменьшения громоздкости формул мы будем выписывать векторы состояния системы и матрицу эволюции, формально рассматривая только четыре компонента, нумеруемых индексами $a = 0, i, 4, 5$ и $b = 0, k, 4, 5$, не забывая при этом, что величины, относящиеся к импульсу, имеют три проекции $i, k = 1, 2, 3$. Поэтому компоненты матриц в формулах (51)-(53), относящиеся к импульсу имеют, свои индексы i и k. Подчеркнем, что используемый в формулах (51) вектор $\mathbf{t} \equiv \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ является ортом вектора $\mathbf{q}$.

Наличие в матрице эволюции неградиентных членов (не зависящих от $\mathbf{q}$) делает решение нашей задачи на собственные значения сложнее, чем аналогичное решение для однокомпонентной гидродинамической среды [6] или для частиц, взаимодействующих с гидродинамической средой, без их размножения и поглощения [16]. При наличии в уравнениях слагаемых, пропорциональных только первой и второй степени $\mathbf{q}$ задача на собственные значения решалась методом теории возмущений в приближении малых $|\mathbf{q}|$. Такое решение справедливо в длинноволновом пределе $|\mathbf{q}| \le q_{\lim}$ и отказывает на коротких пространственных масштабах. Тут стоит отметить тот факт, что и сами уравнения гидродинамики справедливы только на достаточно больших пространственных масштабах [9], то есть, ограничение на $|\mathbf{q}|$ сверху содержится в самих уравнениях гидродинамики. Однако, ситуация еще более усложняется, когда уравнения содержат слагаемые, пропорциональные нулевой, первой и второй степени волнового вектора $\mathbf{q}$. Очевидно, что в этом случае при очень малых $|\mathbf{q}|$ неградиентные члены будут играть определяющую роль в уравнениях. Однако с ростом величины $|\mathbf{q}|$ вклад членов первого и второго порядка по градиентам в решение растет, и при достаточно больших $|\mathbf{q}|$ построение классической теории возмущений, в которой первый порядок по градиентам будет лишь малыми поправками к нулевому, окажется невозможным. Не стоит забывать также, что поиск собственных значений для матрицы $T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})$ нас интересует с точки зрения описания длинноволновых гидродинамических корреляций в системе. По этой причине нам прежде всего важен такой диапазон величин $\mathbf{q}$, в котором корреляционная функция внешней силы $g_{ab}(\mathbf{q},\tau)$ отлична от нуля и имеет физический смысл. Выше нами уже отмечалось, в каком смысле необходимо трактовать использованное нами в настоящей работе приближение пространственно однородного состояния.С учетом этого становится ясно, что интересующий нас диапазон значений $|\mathbf{q}|$ ограничен снизу размером системы $|\mathbf{q}| > L^{-1}$ и даже размером ее части, близкой к пространственно-однородному состоянию $|\mathbf{q}| > L_h^{-1}$ (напомним, что величина L_h характеризует размеры рассматриваемой системы, на которых можно не учитывать влияния граничных эффектов). Это обстоятельство добавляет важное условие поиска интересующих нас решений - ограничение на величину $|\mathbf{q}|$ снизу. Благодаря этому ограничению мы можем найти собственные векторы матрицы эволюции в приближении малых неградиентных членов. Заметим, что конкретный критерий малости компонентов матрицы $T_{ab}^{(NG)}$ должна предоставить верификация, которую мы проведем после нахождения приближенных решений задачи на собственные значения, а для начала просто будем полагать эти нужные компоненты малыми. Схема построения теории возмущений будет практически аналогична схеме, использованной нами ранее в работах [16] и [22], поэтому тут мы изложим лишь основные ее шаги. В качестве начального приближения для матрицы $T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})$ мы выберем слагаемое

$$T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q}) = T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q}) \tag{54}$$

а в качестве поправок - величину

$$T_{ab}^{(Corr)}(\mathbf{q}) = T_{ab}^{(NG)} + T_{ab}^{(2)}(\mathbf{q}). \tag{55}$$

Отметим, что при этом выполняется соотношение

$$T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q}) = T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q}) + T_{ab}^{(Corr)}(\mathbf{q}). \tag{56}$$

Параллельно с задачей поиска собственных векторов матрицы $T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q})$ неизбежно возникнет вопрос их ортогонализации и доказательства условия их полноты. Предвидя это обстоятельство, определим скалярное произведение (U,V) в пространстве найденных векторов, введя в рассмотрение "нормировочную" матрицу G_{ab} скалярного произведения:

$$(U,V) = U_a^* G_{ab} V_b, \tag{57}$$

Мы сконструируем матрицу G_{ab} таким образом, чтобы ее структура была максимально простой, а матрица $T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q})$ удовлетворяла условию антиэрмитовости во введенном скалярном произведении (57):

$$\left(U, T^{(1)}(\mathbf{q})V\right) = -\left(UT^{(1)}(\mathbf{q}), V\right). \tag{58}$$

Тогда найденные в соответствующем приближении собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, окажутся ортогональными автоматически.

Используя явное выражение (51) для матрицы эволюции $T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q})$ и условие антиэрмитовости (58), удается построить матрицу скалярного произведения, имеющую наиболее простой вид [16]:

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & G_{04} & \\ 0 & G_{11}\delta_{ij} & 0 & 0 \\ G_{04} & 0 & G_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{55} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} G_{00} = \dfrac{1}{T^2\rho c_v}, \quad G_{11} = \dfrac{1}{T\rho}, \quad G_{04} = -\dfrac{1}{T^2\rho c_v}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial\rho}\right)_T, \quad G_{55} = \dfrac{1}{n}, \\ G_{44} = \dfrac{S_0^2}{\rho T} - \dfrac{1}{T^2\rho c_v}\left(\dfrac{p+\varepsilon_0}{\rho}\right)^2 + \dfrac{2}{T^2\rho c_v}\left(\dfrac{p+\varepsilon_0}{\rho}\right)\left(\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial\rho}\right)_T, \end{array} \tag{59}$$

где $S_0 = \sqrt{AB+C}$ - скорость звука в гидродинамической среде без учета влияния частиц, взаимодействующих с этой средой, а $c_v = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_0}{\partial T}\right)_\rho$ - теплоемкость среды при постоянном обьеме.

Обратимся теперь к поиску решения задачи на собственные значения в первом приближении

$$T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q})U_b^{(\mu)}(\mathbf{q}) = \lambda_1^{(\mu)}(q)U_a^{(\mu)}(\mathbf{q}). \tag{60}$$

В последнем уравнении функции $U_a^{(\mu)}(\mathbf{q})$, где индекс μ пробегает значения $\mu = 0,1,2,3,4,5$, представляют собой собственные векторы матрицы $T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q})$, а собственные значения, соответствующие этим собственным векторам, обозначены как $\lambda_1^{(\mu)}(q)$. Благодаря достаточно простой структуре матрицы $T_{ab}^{(IN)}(\mathbf{q})$ уравнения (60) могут быть легко решены точно, и для величин $\lambda_1^{(\mu)}(q)$ получим следующие значения:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{(0)}(q) = 0, && U^{(0)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\rho T(\gamma-1)}{S_0^2}}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1, 0\right), \\ &\lambda_1^{(1,2)}(q) = \pm iqS, && U^{(1,2)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\rho T}{2S^2}}\left(B, \mp S\mathbf{t}_k, 1, \frac{n}{\rho}\right), \\ &\lambda_1^{(3,4)}(q) = 0, && U^{(3,4)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\rho T}\left(0, \mathbf{e}_k^{(1,2)}, 0, 0\right), \\ &\lambda_1^{(5)}(q) = 0, && U^{(5)}(\mathbf{q}) = \sqrt{n}\left(\frac{-TB}{S^2}, 0, \frac{-T}{S^2}, 1\right). \end{aligned} \tag{61}$$

В последнем выражении единичный вектор $\mathbf{t} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ направлен вдоль вектора $\mathbf{q}$, а единичные векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны друг другу и вектору $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{e}^{(1)} \perp \mathbf{t}, \quad \mathbf{e}^{(2)} \perp \mathbf{t}, \quad \mathbf{e}^{(2)} \perp \mathbf{e}^{(2)}, \quad \left|\mathbf{e}^{(1)}\right| = \left|\mathbf{e}^{(2)}\right| = 1. \tag{62}$$

Величина S, которая дается выражением

$$S^2 = AB + C + nT/\rho, \tag{63}$$

представляет собой скорость звука в гидродинамической среде с учетом влияния частиц, с этой средой взаимодействующих, а величина $\gamma = c_p/c_v$ - отношение теплоемкости среды при постоянном давлении и при постоянном обьеме.

Проанализируем теперь выражение (61). Шесть найденных собственных векторов $U^{(\mu)}(\mathbf{q})$ матрицы $T_{ab}^{(1)}(\mathbf{q})$ удовлетворяют условиям ортонормировки и полноты:

$$\left(U^{(\mu)}(\mathbf{q}),U^{(\nu)}(\mathbf{q})\right)=\delta_{\mu\nu},\quad \sum_{\mu=0}^{5}U_a^{(\mu)}(\mathbf{q})U_b^{(\mu)}(\mathbf{q})G_{bc}=\delta_{ac}. \tag{64}$$

Эти векторы соответствуют шести модам внутреннего движения системы, без учета процессов диссипации и размножения частиц средой. Моды $U^{(1)}(\mathbf{q})$ и $U^{(2)}(\mathbf{q})$ соответствуют распространению звуковых волн в системе. Остальные моды вырождены в бездиссипативном приближении. Однако по структуре векторов видно, что $U^{(3)}(\mathbf{q})$ и $U^{(4)}(\mathbf{q})$ соответствуют поперечным вязким волнам, а $U^{(0)}(\mathbf{q})$ и $U^{(5)}(\mathbf{q})$ соответствуют процессам переноса тепла и диффузии частиц в системе. Однако для их разделения и снятия вырождения следует найти поправки следующего порядка малости. Благодаря тому, что матрица $T_{ab}^{(Corr)}(\mathbf{q})$ (69) содержит большое количество нулей, разделение вырожденных собственных векторов окажется относительно простым. Основной проблемой, как увидим далее, будет разделение мод $U^{(0)}(\mathbf{q})$ и $U^{(5)}(\mathbf{q})$.

Обратимся теперь к задаче о поиске решений уравнения (49). Очевидно, что искомые решения $V_a^{(\mu)}$ зависят от $\mathbf{q}$ как от параметра. Однако в дальнейшем мы не будем подчеркивать эту зависимость, чтобы не загромождать выкладок. Имея ввиду условия полноты (64), можно искать решения $V_a^{(\mu)}$ в виде разложения по полному набору векторов $U_a^{(\mu)}$:

$$V_a^{(\mu)}=U_a^{(\mu)}+\sum_{\sigma=0}^{5}R_{\mu\sigma}U_a^{(\sigma)}. \tag{65}$$

Благодаря тому обстоятельству, что выбор нормировки нормировки векторов $V_a^{(\mu)}$ пока не зафиксирован, мы можем потребовать, чтобы выполнялось условие

$$R_{\mu\mu}=0. \tag{66}$$

Следует отметить, что величины $R_{\mu\sigma}$, определенные в (65), не обязательно малы по сравнению с единицей несмотря на предполагаемую малость матрицы $T_{ab}^{(Corr)}$. Помимо малых поправок к собственным векторам, $R_{\mu\sigma}$ могут содержать элементы преобразования, обусловленного снятием вырождения собственных векторов $U_a^{(\mu)}$. Что касается собственных значений, для них можно ввести поправки

$$\lambda^{(\mu)}=\lambda_1^{(\mu)}+\lambda_2^{(\mu)}. \tag{67}$$

Подставляя определения (65)-(67) в уравнения (49) и воспользовавшись соотношением (60), после несложных преобразований перейдем к системе уравнений

$$\lambda_2^{(\mu)}=T^{\mu\mu}+\sum_{\sigma=0}^{5}R_{\mu\nu}T^{\mu\nu},\qquad \left(\lambda_1^{(\mu)}-\lambda_1^{(\sigma)}+\lambda_2^{(\mu)}\right)R_{\mu\sigma}=T^{\sigma\mu}+\sum_{\sigma=0}^{5}R_{\mu\nu}T^{\sigma\nu}, \tag{68}$$

в которой введено новое обозначение:

$$T^{\mu\nu}=\left(U_a^{(\mu)},T_{ab}^{(2)}U_b^{(\nu)}\right). \tag{69}$$

Можно убедиться, что система (68) содержит 36 уравнений, в роли неизвестных выступают 30 величин $R_{\mu\nu}$ $\mu\neq\nu$ и 6 величин $\lambda_2^{(\mu)}$, вследствие чего непосредственный поиск и анализ ее решений затруднителен. Поэтому мы воспользуемся теорией возмущений [16], а именно предположением о малости $T_{ab}^{(Corr)}$, и соответственно, $T^{\mu\nu}$. С помощью теории возмущений мы расцепим систему (68) на отдельные независимые уравнения там, где это возможно.

Для начала рассмотрим собственный вектор $U_a^{(\mu)}$ и соответствующее ему невырожденное собственное значение $\lambda_1^{(\mu)}$. В данном случае малость $T_{ab}^{(Corr)}$ следует понимать именно как выполнение соотношения:

$$\left|\lambda_1^{(\mu)}-\lambda_1^{(\sigma)}\right|\gg\left|T^{\nu\upsilon}\right| \tag{70}$$

для всех значений $\sigma\neq\mu$ и для любых значений индексов ν и υ. Тогда, используя систему (68), легко показать, что для выбранного μ и любого ν выполняется соотношение

$$R_{\mu\nu}\ll 1, \tag{71}$$

а поправка для собственного значения дается выражением

$$\lambda_2^{(\mu)}=T^{\mu\mu}. \tag{72}$$

В рассматриваемой нами задаче переход от (68) к (72) требует дополнительного анализа. Дело в том, что различные компоненты $T^{\nu o}$ содержат различные малые параметры - K, E и q^2, поэтому несмотря на малость

$R_{\mu\nu}$, малость вклада слагаемого $\sum_{\sigma=0}^{5} R_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ в $\lambda_2^{(\mu)}$ (см. (68)) следует проверить дополнительно. Так, для справедливости соотношения (72) для некоторого фиксированного μ достаточно того, чтобы величины $T^{\mu\mu}$ и $T^{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$ были одного порядка. Используя изложенные выше соображения и вычислив величины $T^{\mu\nu}$, найдем поправку для собственного значения звуковых мод:

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_2^{(2)} = -q^2\Gamma_s + I_s, \quad \Gamma_s = \frac{1}{2\rho}\left\{\frac{\kappa(\gamma-1)S_0^2}{\gamma c_v S^2} + \frac{4}{3}\eta + \zeta_{visc} + \frac{n_0 T}{S^2} D_{eff}\right\}, \quad I_s = \frac{1}{2}\left\{\frac{AEn}{\rho S^2} + \frac{nTK}{\rho S^2}\right\}. \tag{73}$$

Первое слагаемое в формуле (73) описывает процессы затухания звуковых волн, связанные с диссипативными процессами в гидродинамической среде. Величина Γ_s содержит как слагаемые, связанные с вязкостью и теплопроводностью среды, хорошо известные из гидродинамики [23], так и слагаемое, связанное с диффузией частиц, взаимодействующих со средой [16]. Второе слагаемое в формуле (73) описывает процесс усиления звуковых волн за счет процессов размножения частиц, взаимодействующих со средой, упомянутый в работах [22] и [24].

Для поперечных вязких мод $U_a^{(3)}$ и $U_a^{(4)}$ нахождение собственных значений оказывается еще более простым. Непосредственными вычислениями легко убедиться, что выполняются соотношения:

$$T^{3\nu} = 0, \quad T^{\nu 3} = 0, \nu \neq 3; \quad T^{3\mu} = 0, \quad T^{\mu 4} = 0, \nu \neq 4; \quad T^{33} = T^{44} = -q^2\frac{\eta}{\rho}, \tag{74}$$

что приводит к тривиальному решению части уравнений системы (68)

$$\lambda_2^{(3)} = \lambda_2^{(4)} = -q^2\Gamma_\perp, \quad \Gamma_\perp \equiv (\eta/\rho) \quad, R^{30} = R^{03} = 0, \quad, R^{40} = R^{04} = 0. \tag{75}$$

Как видим, для поперечных вязких мод собственные значения находятся совершенно точно, и соответствующие им собственные векторы остаются ортогональными всем остальным собственным векторам и друг другу, несмотря на некоторый произвол выбора векторов $U_a^{(3)}$ и $U_a^{(4)}$, обусловленный произволом выбора трехмерных векторов $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$. Собственные значения для поперечных вязких мод совпадают с известными значениями из обычной гидродинамики [23].

Остается наиболее сложный вопрос о поиске собственных значений и собственных векторов тепловой моды ($\mu = 0$) и диффузионной моды ($\mu = 5$). Используя предположение о малости $T_{ab}^{(Corr)}$ в виде соотношения (70), можно пренебречь влиянием звуковых мод на тепловую и диффузионную, считая что

$$R^{01} = R^{02} = 0, R^{51} = R^{52} = 0. \tag{76}$$

Теперь остается рассмотреть уравнения (68), когда μ принимает только два значения: $\mu = 0$ и $\mu = 5$. Для такой системы четырех уравнений несложно выписать точное решение:

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(0)} &= \frac{1}{2}\left(T^{00} + T^{55} + \left(T^{00} - T^{55}\right)\sqrt{1 + 4T^{05}T^{50}\left(T^{00} - T^{55}\right)^{-2}}\right), \quad R^{05} = T^{50}\left(\lambda_2^0 - T^{55}\right)^{-1}, \\ \lambda_2^{(5)} &= \frac{1}{2}\left(T^{55} + T^{00} + \left(T^{55} - T^{00}\right)\sqrt{1 + 4T^{05}T^{50}\left(T^{00} - T^{55}\right)^{-2}}\right), \quad R^{50} = T^{05}\left(\lambda_2^5 - T^{00}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{77}$$

Из последних соотношений видно, что тепловая и диффузионная моды хорошо разделяются, когда квадрат разности величин T^{00} и T^{55} велик по сравнению с произведением $T^{50} * T^{05}$. При выполнении условия

$$\left(T^{00} - T^{55}\right)^2 \ll T^{50}T^{05} \tag{78}$$

величины $R^{\mu\nu}$ будут малыми по сравнению с единицей, а решения для собственных значений будут близкими к $\lambda_2^{(\mu)} = T^{\mu\mu}$. Если же условие (78) не выполняется, добавки к собственным векторам будут большими и, следовательно, теория возмущений для решения такой задачи неприменима. В случае же справедливости равенства $T^{00} = T^{55}$ разделение мод в нашем приближении вовсе невозможно.

Проведя далее несложные вычисления, придем к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{-q^2\kappa}{\gamma\rho c_v}, \quad T^{55} = K - \frac{AEn}{\rho S^2} - q^2 D_{eff}\frac{-q^2\kappa}{\gamma\rho c_v}\frac{(\gamma-1)n}{\rho}\frac{T}{S^2}, \\ T^{50} &= \frac{-q^2\kappa}{\rho c_v}\sqrt{\frac{n(\gamma-1)T}{\rho S}}, \quad T^{05} = \frac{-q^2\kappa}{\rho c_v}\sqrt{\frac{n(\gamma-1)T}{\rho S}} - \sqrt{\frac{\rho S^2}{(\gamma-1)nT}}\frac{AEn}{\rho S^2}. \end{aligned} \tag{79}$$

Из последнего выражения видно что моды хорошо разделяются при больших коэффициентах диффузии $D_{eff} \gg \frac{\kappa}{\rho c_v \gamma}$ и при выполнения условия $K \leq 0$. В изучаемом нами случае коэффициент диффузии частиц оказывается большим благодаря малому взаимодействию их со средой и большой длине свободного пробега [15]. В случае положительных K существует некоторая область значений q, где моды сильно взаимодействуют. Однако эта область будет очень небольшой благодаря малости величин T^{05} и T^{50} из-за малой плотности частиц (48). Поэтому в дальнейшем мы будем считать что вырождение снято, величины $R^{\mu\nu}$ малы по сравнению с единицей, и собственные векторы даются выражением

$$\lambda_2^{(0)}(q) = -q^2\Gamma_T, \quad \Gamma_T = \frac{\kappa}{\gamma\rho c_v}, \quad \lambda_2^{(5)}(q) = I_D - q^2\Gamma_D, \quad I_D = K - \frac{AEn}{\rho S^2}, \quad \Gamma_D = D_{eff}. \tag{80}$$

При этом стоит отметить, что оба выражения справедливы как при малых, так и при больших q. Тепловая мода $\mu = 0$ описывает затухающую тепловую волну, а мода $\mu = 5$ описывает процессы диффузии частиц и размножения их средой.

Таким образом, результат решения задачи на собственные значения определяетс формулами:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^{(0)}(q) = -q^2\Gamma_T, && V^{(0)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\rho T(\gamma-1)}{S_0^2}}\left(-\frac{C}{A}, 0, 1, 0\right),\\
&\lambda_1^{(1,2)}(q) = I_s \pm iqS - q^2\Gamma_s, && V^{(1,2)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{\rho T}{2S^2}}\left(B, \mp S\mathbf{t}_k, 1, \frac{n}{\rho}\right),\\
&\lambda_1^{(3,4)}(q) = -q^2\Gamma_\perp, && V^{(3,4)}(\mathbf{q}) = \sqrt{\rho T}\left(0, \mathbf{e}_k^{(1,2)}, 0, 0\right),\\
&\lambda_1^{(5)}(q) = I_D - q^2\Gamma_D, && V^{(5)}(\mathbf{q}) = \sqrt{n}\left(\frac{-TB}{S^2}, 0, \frac{-T}{S^2}, 1\right).
\end{aligned} \tag{81}$$

Проанализируем полученные решения. Тепловая мода $V^{(0)}$ имеет диффузионный характер, и соответствующее ей собственное значение $\lambda^{(0)}(q)$ совпадает со значением, известным из обычной однокомпонентной гидродинамике [6]). Поперечные вязкие моды $V^{(3)}$ и $V^{(4)}$ тоже не демонстрируют нового поведения. Для звуковых мод $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ мы получили качественно новый результат. Выражения для скорость звука S и коэффициента затухания звука Γ_s совпадают с выражениями, полученными и проанализированным в работе [16]. Однако, появилось и дополнительное слагаемое I_s, который не зависит от q и может быть положительным при условии

$$K > -\frac{AE}{T}, \tag{82}$$

то есть даже при отрицательных коэффициентах размножения K. В случае своей положительности величина I_s выступает в роли инкремента нарастания соответствующих волн. Таким образом, для достаточно больших q процессы усиления звуковых волн, обусловленные размножением частиц в системе и ее нагревом будут доминировать над процессом поглощения звуковых волн за счет диссипативных процессов в среде. Иными словами, возможен процесс усиления звуковых волн размножающей средой, являющийся одной из возможных причин развития неустойчивостей в системе. К несколько иному результату придем для диффузионной моды $V^{(5)}$. В собственном значении $\lambda^{(5)}$ тоже присутствует поправка, обусловленная размножением частиц. Однако эта мода оказывается неустойчивой только при условии $K > \dfrac{AEn}{\rho S^2}$.

Вернемся теперь к выражениям (43), (44), определяющие влияние корреляций на динамику параметров описания, в данном случае —гидродинамических параметров. Разложение матрицы $T_{ab}^{(H)}(\mathbf{q})$ по собственным векторам, найденное выше, позволяет вычислять различные функции содержащие эту матрицу в качестве аргумента (см. в этой связи, например, (41), (42)). Используя определение скалярного произведения (57), общего решения для динамики корреляций (42) и выражения (44) найдем, что вклад корреляций в уравнения гидродинамики дается выражением:

$$X_a^{(corr)}(t) = T_{abc}^{(0)} \sum_{\mu=0}^{5}\sum_{\nu=0}^{5}\int_0^\infty dq q^2 \left[1 - e^{t\left(\lambda^{(\mu)}(q) + \lambda^{(\nu)}(-q)\right)}\right]\left[\lambda^{(\mu)}(q) + \lambda^{(\nu)}(-q)\right]^{-1} \int_{4\pi} d\Omega F_{bc;de}^{\mu\nu}(\mathbf{t})\, g_{de}(q\mathbf{t}), \tag{83}$$

где введено обозначение

$$F_{ab;cd}^{\mu\nu}(\mathbf{q}) = V_a^{(\mu)}(\mathbf{q}) V_b^{(\nu)}(-\mathbf{q}) V_{a'}^{*(\mu)}(\mathbf{q}) V_{b'}^{*(\nu)}(-\mathbf{q}) G_{a'c} G_{b'd}. \tag{84}$$

В выражении (83) разделено интегрирование по модулю вектора $\mathbf{q}$ и по направлению его орта $\mathbf{t}$. Такое разделение упрощает анализ результатов благодаря тому обстоятельству, что собственные векторы $V_a^{(\mu)}(\mathbf{q})$ зависят только от направления $\mathbf{q}$, тогда как собственные значения $\lambda^{(\mu)}$ зависят только от его модуля. Отметим, что собственные значения при $\mu = 1,2$ являются комплексными, однако, используя свойства симметрии собственных значений и векторов (81), а также величины $g_{ab}(\mathbf{q})$ относительно замены $\mathbf{q}$ на $-\mathbf{q}$, нетрудно показать, что результат суммирования по μ и ν и интегрирования в выражении (83) получится действительным. Величины $T^{(0)}_{abc}$ представляют собой вторые производные от неградиентных членов уравнений динамики системы, и многие из них не являются нулевыми. Например, это касается элемента

$$T_{504;0} = \left(\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta_0 \partial \rho} \right)\Bigg|_{\zeta=\zeta^0}. \qquad (85)$$

Как легко видеть, вычисление величины $X^{(corr)}_a(t)$ требует знания спектра корреляций внешней силы. Однако из самой структуры выражения (83) видно, что наличие достаточно крупномасштабных компонент в корреляционных функциях внешней силы, для которых реальная часть некоторых собственных значений положительна, могут порождать экспоненциально нарастающие решения. Поскольку действительные части всех собственных значений $Re\left(\lambda^{(\mu)}(q)\right)$ убывают с ростом q максимально нарастающие решения будут давать длинноволновые компоненты внешнего шума. При этом благодаря тому, что в показателе экспоненты в (83) стоит сумма двух собственных значений, экспоненциальный рост величины $X^{(corr)}_a(t)$ может происходить вдвое быстрее, чем нарастание соответствующих гидродинамических неустойчивостей, получающееся из решения уравнений гидродинамики без учета корреляций. Наибольший интерес тут представляет неустойчивость звуковых мод, которая может реализовываться даже в том случае, когда коэффициент размножения K меньше нуля (см. формулы (73), (82)). Корреляции внешней силы, для которых выполняется условие

$$|\mathbf{q}| < (I_s/\Gamma_s), \qquad (86)$$

приводят к появлению нарастающих решений для величины $X^{(corr)}_a(t)$. При этом, как видно из решения для звуковых мод, наличие корреляции для практически любых компонент g_{ab} может порождать неустойчивые пространственно однородные нарастающие корреляционные функции, которые воздействуют на систему как некоторая однородная и нарастающая со временем внешняя сила, выводящая систему из стационарного состояния. Например, любая изотропная корреляция любых двух компонент внешней силы g_{ab}, соответствующих $a,b = 0,4,5$, порождает гидродинамические корреляционные функции через звуковые моды. В случае неустойчивости инкремент нарастания этих мод может достигать $2I_s$, что вдвое больше инкремента нарастания соответствующих неустойчивостей в обычных уравнениях гидродинамики. При этом неустойчивые звуковые решения в обычной гидродинамике представляют из себя быстро убегающие нарастающие волны, которые не могут развиться в системе конечных размеров (как мы уже отмечали, приближение пространственной однородности возможно и для систем конечных размеров), а гидродинамические корреляции развиваются во всем объеме пространственно-однородной системы. Таким образом, мы показали, что корреляции внешней силы, воздействующей на неустойчивую систему в состоянии, близком к пространственно однородному, могут приводить к появлению нарастающих парных корреляционных функций. Последние, в свою очередь, в случае наличия в уравнениях динамики системы неградиентных членов, воздействуют на систему как некоторая пространственно однородная внешняя сила, которая со временем нарастает быстрее, чем неустойчивости, не связанные с учетом корреляций, и, тем самым, оказывают определяющее воздействие на выход системы из стационарного состояния. В случае устойчивой системы, парные корреляции развиваются до некоторого стационарного значения, воздействуя на систему как некоторая постоянная сила, немного смещающая положение равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, нами изучены особенности динамики системы частиц, взаимодействующих с мультиплицирующими и поглощающими гидродинамическими средами при воздействии внешнего стохастического поля. В частности, предложено рассматривать такую систему в качестве модели нейтронов, взаимодействующих с размножающей и поглощающей гидродинамической средой. Нами показано, что внешнее стохастическое поле порождает в системе флуктуации параметров описания, причем динамика этих флуктуаций может существенным образом влиять на эволюцию всей системы как целого. Для изучения этого влияния получены общие уравнения флуктуационной динамики в случае воздействия на систему внешнего аддитивного гаоссового шума. Уравнения проанализированы с точки зрения возможности установления стационарных состояний в изучаемой системе и их устойчивости. Анализ уравнений дал возможность установить условия, при которых флуктуации параметров описания играют определяющую роль при развитии неустойчивостей возможных стационарных состояний системы.

Как отмечено в статье, существование описанных состояний в системе частиц, взаимодействующих с мультиплицирующими и поглощающими средами под влиянием стохастической внешней силы может быть ограничено по времени развитием нелинейных явлений. После прошествия таких характерных времен становится необходимо учитывать нелинейности в уравнениях флуктуационной динамики и, следовательно, принимать во вниамние динамику флуктуаций более высокого порядка, чем второй. Однако решение задачи учета нелинейных эффектов и динамики корреляций порядка более высокого порядка, чем второй, требует дополнительных исследований.

В заключение отметим, что изучение в работе случая воздействия на систему внешнего аддитивного шума не является принципиальным. Развитый нами подход дает возможность описать влияние на динамику системы мультипликативного шума, или даже воздействие комбинации аддитивного и мультипликативного шумов. Такая система, возможно, будет демонтсрировать наличие каких-либо новых эффектов по сравнению с изученными в настоящей статье. Но описание эволюции такой системы, несомненно, представляет и более сложную задачу, хотя бы из-за ее громоздкости и, по этой причине, также требует отдельного изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alder B., Wainright T. Decay of Velocity Autocorrelation Functions // Phys.Rev A.- 1970.- Vol. 1.-P. 18-21.
2. Dorfman J., Cohen E. Velocity Correlation Function in Two and Three Dimensions // Phys. Rev. Lett.- 1970.-Vol. 21.-P. 1257-1260.
3. Ernst M., Hauge E., van Leewen J. Asymptotic Time Behaviour of Correlation Functions // Phys.Rev. Lett. - 1970. -Vol. 24. - P. 1254-1256.
4. Zubaref D., Hazanov A. Boltzmann -Enskog equation and asympotics of time autocorrelation functions // Theoretical and mathematical physics. - 1977. - Vol. 31, № 2. - P. 260-272.
5. Kawasaki K. Dynamical theory of fluctuations near the critical points // Critical Phenomena / Ed. by M. S. Green.- New York: Academic, 1971.-P. 342-379.
6. Peletminskii S., Plokhov S., Prikhod’ko V. On statistical theory of non-equilibrium fluctuations with large correlations radius (in Russian) // Theoretical and mathematical physics. - 1981. - Vol. 46, № 2. - P. 174-183.
7. Peletminskii S.V., Y. Slyusarenko Yu. V. On theory of long-wave nonequilibrium fluctuations // Physica A.- 1994.- Vol. 210, № 1-2. - P. 165-204.
8. Bogolyubov. N.N. Problems of a dynamical theory in statistical physics - Providence R.I.: Providence College, 1959.
9. Akhiezer A.I., Peletminskii. S.V. Methods of Statistical Physics - Oxford: Pergamon Press, 1981.
10. Peletminskii S., Slyusarenko Yu., Sokolovsky A. Kinetics and hydrodynamics of long-wave fluctua¬tions under external random force // Physica A. - 2003. - Vol. 326, № 3-4. - P. 412-429.
11. Taylor G. Diffusion by continious movements // Proc. London Math. Soc.(2). - 1921. - Vol. 20, № 2. - P. 196-211.
12. Keller L., A. Fridman A. Differentialgleichung fur die turbulente bewegung einer kompressiblen flussigkeit // Proc. Ist. intern. Congr. Appl. Mech. - Delft. - 1924. - P. 395-406.
13. Branover H., Moiseyev S., Golbraikh E., Eidelman A. Turbulence and structures: chaos, fluctuations, and helical self-organization in nature and the laboratory, - London: Academic Press, 1999.
14. Bulavin L.A. et.al. Neutron Specrtoscopy of condenced matter [in Ukrainian] - Kyiv: Akademperiodica, 2005.
15. Nikolyaenko S.O., Slyusarenko Yu.V. Microscopic theory of relaxation processes in systems of particles interacting with the hydrodynamic medium // J. Math. Phys. - 2009. - Vol. 50. - P. 083305.
16. Nikolyaenko S.O., Slyusarenko Yu.V. Theory of macroscopic fluctuations in systems of particles, interacting with hydrodynamic and gaslike media // J. Math. Phys. - 2010. - Vol. 51. - P. 113301.
17. Novikov S. Functional and method of random forces in turbulence theory // Journal of Experimental and Theoretical Physics (in Russian). - 1964. - Vol. 47, № 5. - P. 1919-1926.
18. Davison B. Neutron Transport Theory - Oxford: Clarendon, 1957.
19. Stacey W.M. Nuclear Reactor Physics (second edition) -Wiley - VCH, 2007.
20. Anthony V. Nero JR. A Guidebook to neuclear reacrors -Berkley/Los Angeles/London: University of California press, 1979.
21. Akhieser A.I., Pomeranchuk I.Ya. Introduction in the theory of multyplying systems (reactors) - Moscow: IzdaT, 2002.
22. Nikolyaenko S.O., Slyusarenko Yu.V. On the long wave fluctuations in systems of particles interacting with hydrodynamic media // Problems of Atomic Science and Technology. - 2011. - № 1. - P. 198-202.
23. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics, vol. 6 - London: Pergamon Press, 1987.
24. Vodyanitskii A.A., Y. Slyusarenko Yu.V. The thermal neutron waves excitation in muldiplied media bounded by absorber // Problems of Atomic Science and Technology. - 2007. - № 3. - P. 348-352.