

PASC: 42.30.Lr, 47.35.Bb, 52.35.Mw

ABNORMAL WAVES IN WAVE FIELD WITH MODULATION INSTABILITY**E.V. Belkin, A.V. Kirichok, V.M. Kuklin, A.V. Pryimak***V.N. Karazin Kharkiv National University**4 Svobody Sq., Kharkov 61022, Ukraine**e-mail: kuklinvm1@rambler.ru**Received April 23, 2014*

The paper discusses the processes of modulation instability of large-amplitude waves. The behavior of wave field envelope intensity is described for the model, which is described by Lighthill equation, taking into account the absorption and external source. Another presented model describes the appearance of abnormal amplitude waves on ocean surface in conditions of existence of finite amplitude disturbances. It is discussed the results of simplified description based on a modified S-theory, which takes into account the interaction of spectrum modes; the wave vectors of modes are arranged symmetrically with respect to the wave vector of main wave of finite amplitude. The feature of modified S-theory is the ability to clearly distinguish the mechanisms of modulation instability and explain the nature of appearance of abnormal amplitude waves with short lifetime. It is also presented the results of calculations without the use of simplifications, that allow verify the approach based on S-theory. It has been shown that many of the characteristics of both descriptions are close enough for at least at initial stage of nonlinear instability regime. Achievable maximum amplitudes of modulation and individual waves are similar, as well as characteristic times of their appearance and their lifetimes. It is noted that the envelope of wave field at beginning of nonlinear regime of instability in the Lighthill model is almost three times exceed the average amplitude of waves. It is shown that frequency of appearance of abnormal waves in statistics (by the ensemble and time) is almost identical in both models of ocean excitement. At initial stage of nonlinear regime of instability it may cause the waves and bursts of envelope with very large amplitude significantly often than it would be expected from statistically justified estimates.

KEY WORDS: modulation instability, abnormal amplitude waves, S-theory, Lighthill equation**АНОМАЛЬНІ ХВИЛІ В МОДУЛЯЦІЙНО НЕСТІЙКОМУ ХВИЛЬОВОМУ ПОЛІ****Є.В. Белкін, О.В. Кірічок, В.М. Куклін, О.В. Приймак***Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**майдан Свободи, 4, Харків 61022, Україна*

У роботі розглянуті процеси розвитку модуляційної нестійкості хвиль великої амплітуди. Обговорюється поведінка обвідної інтенсивного хвильового поля для моделі, яка описується рівнянням Лайтхілла з урахуванням поглинання і зовнішнього джерела. Представлена також подібна модель, яка описує появу хвиль аномальної амплітуди на поверхні океану в умовах існування хвилювання кінцевої амплітуди. Обговорюються результати спрощеного опису на основі модифікованої S-теорії, яка враховує взаємодію мод спектра, хвильові вектора яких симетрично розташовуються відносно хвильового вектора основної хвилі кінцевої амплітуди. Особливістю модифікованої S-теорії є можливість явно виділити механізми модуляційної нестійкості і пояснити природу виникнення хвиль аномальної амплітуди з малим часом життя. Представлені також результати розрахунків без використаних спрощень, що дозволило провести верифікацію наближення, заснованого на S-теорії. Показано, що багато характеристик обох описів виявляються досить близькі, принаймні, на початковій стадії нелінійного режиму нестійкості. Подібними виявляються також максимальні амплітуди модуляції і окремих хвиль, що досягаються, а також характерний час їх появи і час їхнього життя. Відзначається, що обвідна хвильового поля на початку нелінійного режиму нестійкості в моделі Лайтхілла майже в три рази перевершує середню амплітуду хвиль. Показано, що частоти появи аномальних хвиль в статистиці по ансамблю і за часом в обох моделях опису океанського хвилювання практично не відрізняються. На початковій стадії нелінійного режиму нестійкості можлива поява хвиль і сплесків обвідної з вельми великою амплітудою значно частіше, ніж це впливає з статистично обґрунтованих оцінок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модуляційна нестійкість, хвилі аномальної амплітуди, S-теорія, рівняння Лайтхілла**АНОМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МОДУЛЯЦИОННО НЕУСТОЙЧИВОМ ВОЛНОВОМ ПОЛЕ****Е.В. Белкин, А.В. Киричок, В.М. Куклин, А.В. Приймак***Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**пл. Свободы, 4, Харьков 61022, Украина*

В работе рассмотрены процессы развития модуляционной неустойчивости волн большой амплитуды. Обсуждается поведение огибающей интенсивного волнового поля для модели, которая описывается уравнением Лайтхилла с учетом поглощения и внешнего источника. Представлена также подобная модель, которая описывает появление волн аномальной амплитуды на поверхности океана в условиях существования волнения конечной амплитуды. Обсуждаются результаты упрощенного описания на основе модифицированной S-теории, которая учитывает взаимодействие мод спектра, волновые вектора которых симметрично располагаются относительно волнового вектора основной волны конечной амплитуды. Особенностью модифицированной S-теории является возможность явно выделить механизмы модуляционной неустойчивости и пояснить природу возникновения волн аномальной амплитуды с малым временем жизни. Представлены также результаты расчетов без использованных упрощений, что позволило провести верификацию приближения, основанного на S-теории. Показано, что многие характеристики обоих описаний оказываются достаточно близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима неустойчивости. Подобными оказываются также достигаемые максимальные амплитуды как модуляции, так и отдельных волн, а также характерные времена их появления и времена их

жизни. Отмечается, что огибающая волнового поля в начале нелинейного режима неустойчивости в модели Лайтхилла почти в три раза превосходит среднюю амплитуду волн. Показано, что частоты появления аномальных волн в статистике по ансамблю и по времени в обеих моделях описания океанского волнения практически не отличаются. На начальной стадии нелинейного режима неустойчивости возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой значительно чаще, чем это следует из статистически обоснованных оценок.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модуляционная неустойчивость, волны аномальной амплитуды, S-теория, уравнение Лайтхилла

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Системы уравнений, описывающие нестабильность волн большой амплитуды, распространяющихся в неравновесных средах и системах с кубической нелинейностью и конечным уровнем поглощения

1.1. Природа нестабильностей волн большой амплитуды

1.2. Развитие спектра возмущений вблизи порога неустойчивости волны конечной амплитуды в модели Лайтхилла

1.3. Модуляционная неустойчивость волны большой амплитуды в 1D модели Лайтхилла

1.4. Системы уравнений, описывающие модуляционную неустойчивость гравитационных волн на поверхности воды

2. Численный анализ процессов модуляционной неустойчивости

2.1. Результаты расчетов процесса модуляции волны конечной амплитуды в модели Лайтхилла

2.2. Численное моделирование модуляционной неустойчивости гравитационных волн на поверхности воды

2.3. Применение моделей

Список литературы

ВВЕДЕНИЕ

Модуляционные неустойчивости. Как известно [1-6], периодические волны конечной амплитуды в средах с наиболее распространенным видом локальной кубической нелинейности являются неустойчивыми с возбуждением двух боковых спектров вынужденных возмущений, соответственно с большей и меньшей длиной волны. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны. Это определило название этого типа неустойчивостей – модуляционные [2]. В одномерных случаях кроме модуляционных неустойчивостей возможны и процессы самофокусировки [7].

Однако ниже уделим основное внимание именно модуляционным неустойчивостям. В условиях поглощения энергии возмущений в среде инкременты модуляционной неустойчивости уменьшаются и существует пороговая амплитуда начальной волны, при превышении которой неустойчивость развивается [1-6]. Кроме того, подобные неустойчивости очень чувствительны к уширению спектра начального волнения и даже для сравнительно нешироких пакетов сильно ослабляются а также подавляются вследствие механизмов поглощения и трансформации колебаний [8,9]. Поэтому изучение модуляционной неустойчивости представляется полезным для выяснения характера уширения и пространственной модуляции практически монохроматических волн большой амплитуды в приборах электроники, где их групповые скорости невелики и соответственно значительны амплитуды поля; при распространении волн в волноводах с замедляющими структурами или с заполняющими их оптически плотными диэлектриками; при рассмотрении объемных и поверхностных волн в различных средах и в ряде других практически важных случаев.

Отметим, что для наблюдения модуляционной неустойчивости в поглощающей среде должен существовать источник энергии, который поддерживает основную волну или структуру. Этим источником энергии может быть внешний генератор или неравновесный процесс, способный генерировать достаточно узкую интенсивную спектральную линию излучения. Отметим, что именно узкая спектральная ширина излучения является необходимым условием его применения в современной высокочастотной электронике [10,11]; в диагностических методах изучения различных процессов как в земных условиях, так и в ионосфере; в лазерной физике и во множестве технических приложений. Высокая интенсивность излучения необходима для технической транспортировки СВЧ энергии вплоть до верхних слоев атмосферы [12], для использования лазерных импульсов в технических устройствах для целей обороны и в схеме технологий двойного назначения [13].

Средой, где будет распространяться возбужденная таким образом квазимонохроматическая волна большой амплитуды, может быть волновод, заполненный нелинейным диэлектриком [14-16], нелинейная замедляющая структура [17], генераторы или усилители СВЧ излучения, заполненные газом или плазмой [18]. Это могут быть и протяженные среды, такие как ионосфера [19], и поверхность океана [20]. В последнем случае интерес к исследованиям был стимулирован проблемами, осложняющими судоходство [21-30]. Во всех случаях в этих системах и средах при выполнении определенных условий могут развиваться модуляционные неустойчивости квазимонохроматических волн большой амплитуды.

В консервативных средах и системах, где затухание колебаний отсутствует (или пренебрежимо мало), в результате развития модуляционных неустойчивостей и процессов самофокусировки интенсивных волн

формируются известные нелинейные образования - автоволны (автомодельные решения, являющиеся следствием существования определенных симметрий [31,32], которые можно получить, в частности, методами обратной задачи рассеяния [33] или используя теорию групп [34]).

Так, численное моделирование модуляционной неустойчивости плоской волны в одномерном случае в консервативной среде, рассмотрено в работе [35] (см. также обсуждение этих численных экспериментов и ссылки на собственные исследования [8]). Происходит перестройка поля с формированием движущихся в системе покоя волны пакетов огибающей, каждый пакет медленно эволюционирует к солитонной форме.

Однако при наличии поглощения энергии (неконсервативные или открытые системы [36,37]) реализация автоволн (автомодельных решений систем уравнений) затруднена или даже невозможна. Известно, что при решении начальной задачи в консервативной системе с определенным запасом энергии с определенностью возникает набор нелинейных пространственно-волновых структур - автоволн конечной амплитуды и некоторый шум, представляющий собой множество пространственных мод малой амплитуды, слабо коррелированных между собой. То есть то, что авторами [38] характеризуется как слабый хаос. При этом доминирующие в системе нелинейные структуры способны обмениваться энергией между собой и с шумом, энергия которого может быть не мала. Нарушая консервативность системы и адиабатически изменяя характеристики шума, увеличивая или уменьшая энергию системы в целом, можно добиться подавления или роста амплитуды существующих автоволн. Такой механизм обмена энергией нелинейных структур с шумом можно считать или турбулентной диссипацией, или стохастическим возбуждением, в зависимости от того убывает или растет амплитуда соответствующей пространственной структуры [38-40].

Однако в квазиконсервативных системах такие изменения практически не меняют структуру решений. Наличие же заметного источника и стока (вывода, поглощения и диссипации) волновой энергии превращает систему в неконсервативную и открытую по отношению к внешней среде. Существование конечного потока энергии через систему способно привести к следующим изменениям в её динамике [41,42]: а). традиционные для консервативных систем решения - автоволны сильно искажаются и способны существовать весьма ограниченное время, б). появляются новые, не характерные для консервативных систем нелинейные решения, которые тем не менее могут иметь достаточно значительные времена жизни и отличную от консервативных аналогов пространственно-временную топологию. Некоторые решения вообще характерны только для систем находящихся вблизи порога неустойчивостей и имеют выраженную пространственную четкость (кстати, характерную для линейных по амплитуде возмущений), а в модуляционно-неустойчивых средах вблизи порога неустойчивости даже приобретают фрактальный характер [43,44].

Изучение динамики развития неустойчивости волны большой амплитуды с возбуждением спектра, ответственного за её модуляцию, невозможно без применения вычислительных методов. Однако, анализ результатов численных экспериментов часто не способен ответить на вопросы о физической природе явления, не дает возможности выделить ряд интересующих исследователя процессов, понять их роль. А это необходимо для активного воздействия на процесс, для создания управляющих систем и механизмов. Характерной в этом смысле представляется публикация результатов в основном численных экспериментов по исследованию процессов появления больших всплесков на поверхности океана, представленная в работах [20-30]. Не всегда удается выделить механизмы явлений, понять их природу. Поэтому представляется полезным изучать различные достаточно простые модели описания, позволяющие выяснить основные детали процессов.

Самоподобные структуры вблизи порога модуляционной неустойчивости. Развитие модуляционной неустойчивости на начальной стадии обусловлено нелинейным резонансным взаимодействием между основной волной и боковыми сателлитами. Вблизи порога модуляционной неустойчивости ее спектральная ширина невелика, амплитуды возникающих возмущений даже в режиме насыщения остаются много меньше амплитуды начальной волны. Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости возмущений между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с основной волной, причем их действие на основную волну носит интегральный характер. Именно поэтому можно считать, что такая система может быть определена как квазилинейная. Как оказалось (см., например, обзор [42]), в том числе и в результате наших исследований [45,46], квазилинейный характер процесса сохраняется и при достаточном удалении от порогов неустойчивостей, которые при этом должны с определенностью сопровождаться возбуждением плотного спектра возмущений.

В работах [44-46] были отмечены две основные черты модуляционных неустойчивостей в средах и системах с большим уровнем поглощения энергии. Во-первых, в режиме насыщения неустойчивости в результате обсуждаемых ниже механизмов конкуренции мод формируются узкие спектры боковых возмущений в пределе больших времен развитая пространственная структура приобретает характерный линейчатый спектр.

Во-вторых, теоретически было предсказано, что формирование линейчатого спектра облегчает выполнение условий для следующей, уже вторичной модуляционной неустойчивости, которая развивается в рамках подобного сценария. Промодулированная в результате развития первичной модуляционной неустойчивости волна (или структура) должна подвергаться модуляции из-за вторичной неустойчивости уже на существенно большем масштабе [47]. Результаты численных исследований такой многомодовой системы,

качественно подтвердили сделанные авторами [47] предположения и их теоретические выводы о возникновении мультифрактальной структуры возмущений. Кроме этого, было обнаружено, что в режиме насыщения неустойчивости интегральная энергия спектра стабилизируется, что свидетельствует о формировании долгоживущего квазиустойчивого физического состояния [45], и остается заметно меньше энергии основной волны.

При удалении от порога неустойчивости следует учитывать взаимодействие мод спектра неустойчивости, что приводит к изменению динамики развития процесса. Многомасштабность пространственной модуляции сохраняется, сужение спектра замедляется. Энергия спектра в режиме развитой неустойчивости уже сравнима с энергией основной волны.

Обмен энергией между основной волной и возникающим спектром в режимах развитой модуляционной неустойчивости часто приобретает характерный (отмеченный, например, в работах [48,49]) осцилляторный характер.

Не прекращаются попытки описать развитие модуляционной неустойчивости с использованием модифицированных различными способами решений, полученных для консервативных систем [50]. Однако такой подход не всегда может быть конструктивным, поскольку он не учитывает довольно активный и длительный переходный процесс формирования квазиустойчивых волновых структур. Ибо именно там часто возникают нестационарные возмущения аномальной амплитуды. Более того, устойчивость подобных структур может быть достигнута, как правило, только в узком диапазоне параметров.

С другой стороны в работах [51-52] было показано, что диссипация стабилизирует развитие модуляционной неустойчивости. При наличии диссипации, область неустойчивости в пространстве волновых чисел сужается с течением времени [45,46]. Это означает, что первоначально неустойчивые моды, оказавшись вне области неустойчивости, прекращают рост. Диссипация может остановить рост боковых мод ранее того момента, когда нелинейное взаимодействие станет существенным. Амплитуды таких спутников в таком случае подрастают до некоторого уровня, после чего начинают осциллировать. В работе [53] рассмотрена динамика модуляционной неустойчивости стоковых волновых пакетов в условиях действия как диссипации, так и внешнего источника энергии. Было показано, что развитие модуляционной неустойчивости при таких условиях зависит как от частоты несущей волны, так и от интенсивности внешнего воздействия.

Авторы множества работ, исследуя сложные модели процессов и наблюдая аномально большие уединенные волновые возмущения, тем не менее, не могут утверждать, что эти волны представляют собой солитоны, ибо они имеют столь короткое время жизни, что солитонным решениям не характерно. С другой стороны это не результат интерференции случайных возмущений, ибо очевидным является развитие модуляционной неустойчивости. Следовательно, это иной процесс, который возможно является так называемой вынужденной (навязанной основной волной, которая в данном случае является «накачкой» модуляционной неустойчивости) интерференцией растущих мод спектра [54].

Развивающиеся модуляционные неустойчивости как вблизи порога, так и в отдалении от него при существовании источника и стока энергии, представляют значительный интерес, ибо реализуются во многих практических важных случаях. Основное внимание следует уделить выяснению динамики системы вблизи порога, там, где образуется квазистационарное состояние, и рассмотрению явлений при удалении от порога неустойчивости, где возможно появление короткоживущих аномальных всплесков как огибающей, так и отдельных волн. Динамика подобных режимов является малоизученной и требует проведения детального анализа как качественных, так и количественных характеристик.

Для решения задач анализа устойчивости монохроматических волны большой амплитуды в открытых системах с нелинейной средой необходимо использовать математическое моделирование на основе интегродифференциальных систем уравнений с заданными условиями. Наличие разных пространственных и временных масштабов приводит к определенной редукции уравнений, позволяющей рассматривать изменения на расстояниях больше длины волны и на временах, которые существенно превосходят период осцилляций поля. Традиционное описание динамики нелинейных возмущений с медленно меняющимися амплитудами в распределенных системах является обобщением известных асимптотических методов Крылова-Боголюбова для систем с сосредоточенными параметрами [55]. Учет дисперсии впервые был проведен в работах [56]. Существование этих методов сводится к использованию разложения решений по набору ортогональных (ортонормированных) пространственно-временных функций или, в частности, по более понятным физикам и технологам синусоидальным волнам (модам) с медленно меняющимися амплитудами и фазами, для которых используются дифференциальные и интегродифференциальные уравнения с частными производными. Применение процедур осреднения или введение разных масштабов времени и координат позволяет не только снижать порядок и размерность систем уравнений, но и заменять нелокальную нелинейность локальной и т.д.

Для выделения основных параметров задачи применяют процедуру обезразмеривания [57], причем если изучение беспараметрических систем и систем с одним параметром не представляет трудностей, то изучение систем с большим числом параметров создает проблемы для исследователей. В таком пространстве крайне трудно выделить области, где система формирует решения с нужными кондициями. В техническом смысле речь идет о трудности оптимального выбора рабочей точки и области параметров для эффективной работы

устройства, которое будет создано на основе изучаемого явления.

Описание модуляционных неустойчивостей с помощью S-теории. Интерес к параметрическим неустойчивостям в средах с кубической нелинейностью, где существуют так называемые нераспадные (распадные - трехволновые взаимодействия волн запрещены законами сохранения энергии-импульса) спектры проявлялся в разных областях физики. Наиболее продуктивными для развития нелинейной теории были исследования развития неустойчивости спиновых волн при так называемой параллельной накачке, то есть в случае, когда длина волны внешнего поля существенно больше возбуждаемых спиновых волн.

Так, например, в работе [58], было показано, что при накачке спиновых волн однородной прецессией намагниченности ($k_0 \rightarrow 0$), описываемой уравнением Лайтхилла [1] при учете возбуждения симметричного спектра, для которого выполнены условия пространственно-временного синхронизма вида $2\omega_0 = \omega(k) + \omega(-k)$ и $2k_0 = 0 = k - k$ механизмом ограничения неустойчивости является их обратное влияние на накачку, приводящее к «замораживанию» ее амплитуды на пороговом уровне. Дальнейшее уточнение теории [59,60], позволяло учитывать взаимодействие возбужденных мод между собой, причем основной вклад должны были обеспечивать симметричные относительно накачки пары волн $\omega(k) + \omega(-k) = \omega(k') + \omega(-k')$, которые позволяли обеспечить выполнение условий отмеченного выше пространственно-временного синхронизма для всех мод. Ряд работ группы Захарова В.Е и Львова В.С. (см. обстоятельный обзор [61] и книгу [62]) опираясь на учет подобного взаимодействия, сформулировали подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, что в дальнейшем получило название S-теории. Для этого авторы этой теории перешли к описанию на языке корреляционных функций $\langle A_k A_{k'}^* \rangle = n_k \cdot \Delta(k - k')$ и $\langle A_k A_{k'} \rangle = \sigma_k \cdot \Delta(k + k')$, обратив внимание на эффект полной корреляции (спаривания) фаз φ_k и φ_{-k} мод, синхронно взаимодействующих с однородным полем накачки, представили $\sigma_k = n_k \cdot \exp\{-i\psi_k\}$. К важным результатам S-теории можно причислить обнаруженное доминирование в механизме насыщения обратного влияния на накачку спектра возбуждения при малой надпороговости и рост влияния на эффект насыщения неустойчивости фазового рассогласования при увеличении надпороговости.

В отличие от возможного описания в рамках обобщенной на случай $k_0 \neq 0$ развитой в работах [58-62] S-теории, предложенная в [46,63-65] модифицированная модель S-теории, рассматривающая эволюцию отдельных мод спектра, позволила корректно проследить их поведение, определить пространственно-временную динамику волнового пакета (то есть, волн и их огибающих), а также характер процесса неустойчивости и структуру спектра при нарушении симметрии модуляционной неустойчивости волны большой амплитуды в среде с сильной дисперсией и ряд других тонких и важных для приложений деталей. Особенностью модифицированной S-теории является возможность выделить механизмы возникновения модуляционной неустойчивости, пояснить природу возникновения волн аномальной амплитуды с малым временем жизни и оценить амплитуду модуляции неустойчивой волны на нелинейной стадии процесса в режиме насыщения. Однако, несмотря на простоту и наглядность описания нелинейной стадии модуляционной неустойчивости волн большой амплитуды в рамках S-теории, возникает сомнение в корректности такого описания на больших временах развитого процесса. По крайней мере, следует выяснить области применимости такого описания для нескольких наиболее характерных случаев развития модуляционной неустойчивости волн конечной амплитуды.

Целью данной работы является выяснение условий появления волн и огибающих волновых пакетов аномальной амплитуды в условиях интенсивного волнового волнения. Рассмотрены нелинейные уравнения для волн конечной амплитуды. Обсуждаются результаты применения как модифицированной S-теории, так и более общей теории в рамках нелинейных уравнений, когда нелинейные слагаемые вычисляются без приближений, для описания модуляционной неустойчивости в модели Лайтхилла, а также для моделирования процесса возбуждения волн аномальной амплитуды на поверхности океана.

Проведена верификация применения S-теории для этих задач путем сравнения результатов расчетов на ее основе с результатами расчетов более общей теории, когда нелинейные слагаемые вычисляются без приближений (последнее позволяет учесть различные виды взаимодействия мод спектра). Показано, что многие характеристики процесса неустойчивости на основе двух этих подходов оказываются достаточно близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима процесса неустойчивости. Подобными оказываются также достигаемые максимальные амплитуды как модуляции (огибающей), так и отдельных волн, а также частота их появления.

В условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. При этом на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой значительно чаще, чем это следует из статистически обоснованных оценок. При развитии процесса происходит снижение амплитуды основной волны, что уменьшает ее влияние на интерференцию мод спектра.

1. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ И СИСТЕМАХ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И КОНЕЧНЫМ УРОВНЕМ ПОГЛОЩЕНИЯ

1.1. Природа неустойчивостей волн большой амплитуды

Рассмотрим неустойчивость монохроматической волны

$$A(x, t) \cdot \exp\{i\omega t - ikx\} \quad (1)$$

в волновой среде со слабой дисперсией и локальной кубической нелинейностью, где $A(x, t)$ – медленно меняющаяся ее комплексная амплитуда. В общем случае, если известна дисперсия системы

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot \vec{k}^2 + \alpha \cdot |A|^2, \quad (2)$$

то уравнение для изменения комплексной амплитуды A можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} A = i\omega_0 A - i\beta \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} A + i\alpha A |A|^2, \quad (3)$$

или в одномерном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} A = i\omega_0 A - i\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + i\alpha A |A|^2. \quad (4)$$

Подобная дисперсия характерна для ленгмюровских волн в плазме и колебаний в плазменных волноводах в соответствующей нормировке

$$\omega = \omega_0 + \vec{k}^2 - |A|^2. \quad (5)$$

Критерий Лайтхилла [1]

$$(\partial^2 \omega / \partial k^2)^{-1} \cdot \partial \omega(|A|^2) / \partial |A|^2 < 0, \quad (6)$$

согласно которому волна (модуляционно) неустойчива в направлении своего распространения в этом случае оказывается выполнен. Вообще говоря, если

$$\partial \omega(|A|^2) / \partial |A|^2 < 0, \quad (7)$$

то возможны также эффекты самофокусировки [8].

Интересно, что для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде

$$\omega = \omega(k) \{1 + a^2 k^2 / 2\}, \quad (8)$$

где линейная дисперсия определяется соотношением $\omega(k) = \sqrt{kg}$, (здесь g - ускорение свободного падения) условие Лайтхилла (6) также выполняется, несмотря на то, что условие самофокусировки (7) не выполнено.

При определенной нормировке для огибающей волнового пакета (2) при выборе зависимости от частоты и волнового вектора в форме (1) справедливо уравнение Лайтхилла [1]

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA |A|^2, \quad (9)$$

Важно отметить, что слабая зависимость частоты от волнового вектора приводит к тому, что на длине модуляции оказывается много волн, то есть речь в этом случае идет об огибающей волнового пакета. Несколько иная ситуация в случае волн на поверхности глубокой воды, где зависимость частоты от волнового вектора намного сильнее. Этот случай сильной дисперсии (т.е. сильной зависимости фазовой скорости от волнового вектора) приводит к формированию модуляции, характерный пространственный период которой может включать лишь несколько волн. Заметим, что выбор зависимости от времени и координат

$$A(x, t) \cdot \exp\{-i\omega t + ikx\}, \quad (10)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} = i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + iA |A|^2. \quad (11)$$

Очевидно, что характер процесса модуляции при этом не меняется, ибо соотношение (6) остается справедливым.

При наличии источника и стока (распределенного вывода, поглощения и диссипации) энергии волны уравнение Лайтхилла принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - iA |A|^2 + g, \quad (12)$$

где δ – декремент поглощения и g – внешний источник волновой энергии. Медленно меняющаяся со временем амплитуда колебаний $A(t, x)$ может быть представлена в виде

$$A = u_0(t) \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\} + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp\{i\phi_{k_n}(t) - ik_nx\} = \\ = \{u_0(t) + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\} \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\}. \quad (13)$$

То есть, неустойчивость понимают как возбуждение спектра $\sum_{n \neq 0} u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\} \cdot \exp\{i\omega_0t - ik_nx\}$, где $u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\}$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда n -ной моды спектра. Реальное поле представляет собой модулированную волну на частоте ω_0 . Поэтому для восстановления вида волнового поля следует выражение (13) умножить на $\exp\{i\omega_0t\}$. Выделяя отвечающий основной волне «быстрый» фазовый множитель $\exp\{i\omega_0t - ik_0x\}$, получим в этом случае поле колебаний, как произведение

$$A = \exp\{i\omega_0t - ik_0x\} \cdot \{u_0 \exp[i\phi_{k_0}] + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i\phi_{k_n} - i(k_n - k_0)x]\}, \quad (14)$$

где $\exp\{i\omega_0t - ik_0x\}$ – быстро меняющаяся фаза.

Часто, используют несколько иной вид представления поля, выделяя полную фазу основной волны $\exp\{i\omega_0t - ik_0x + i\phi_{k_0}\}$

$$A = \exp\{i\omega_0t - ik_0x + i\phi_{k_0}\} \cdot \{u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\}. \quad (15)$$

Огибающую этого волнового процесса можно определить следующим образом. Обозначим быструю фазу $\omega_0t - k_0x + \phi_{k_0} = \varphi$, а медленную $(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x = \psi_n$. Тогда, например,

$$\text{Re } A = \bar{A} \cdot \{ \text{Cos}\varphi \cdot \text{Sin}\bar{\varphi} - \text{Sin}\varphi \cdot \text{Cos}\bar{\varphi} \} = -\bar{A} \cdot \text{Sin}(\varphi - \bar{\varphi}),$$

где $\text{Sin}\bar{\varphi} = (u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \text{Cos}\psi_n) / \bar{A}$, $\text{Cos}\bar{\varphi} = \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \text{Sin}\psi_n / \bar{A}$, причем амплитуда огибающей

$$\bar{A} = \sqrt{(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \text{Cos}\psi_n)^2 + (\sum_{n \neq 0} u_n \cdot \text{Sin}\psi_n)^2}.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям

$$\bar{A} = \{(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cos[(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2 + \\ + (\sum_{n \neq 0} u_n \sin[(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2\}^{1/2}. \quad (16)$$

1.2. Развитие спектра возмущений вблизи порога неустойчивости волны конечной амплитуды в модели Лайтхилла

На начальной стадии неустойчивости возбуждается спектр колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа основной моды конечной амплитуды $k_n > k_0$ и $k_{-n} < k_0$, где $n > 0$. Каждая пара симметрично расположенных относительно основной волны мод k_n, k_{-n} непосредственно взаимодействует с полем основной волны, причем, выполняется следующее соотношение

$$k_n + k_{-n} = 2k_0, \quad (17)$$

которое обусловлено видом нелинейности. В данном разделе рассмотрим процесс развития модуляционной неустойчивости вблизи порога, когда можно удержать в нелинейном слагаемом симметричные относительно основной волны моды, для которых выполнены соотношения (17).

Таких взаимодействующих групп волн (каналов неустойчивости) может быть достаточно много. Остальными видами (диаграммами) взаимодействиями мод спектра в рассматриваемом случае линейной по амплитудам теории можно пренебречь. Отметим здесь же, что при слабом превышении порога неустойчивости [43-45], другими видами взаимодействия мод также можно пренебречь даже в режиме развитой неустойчивости.

Вернемся к рассмотрению уравнения (12). Наибольшее взаимодействие мод спектра наблюдается при участии основной волны $2k_0 = k_1 + k_2$. Получим, например, уравнение для возмущений с волновым числом

k_1

$$\frac{\partial A_{k_1}}{\partial t} = -\delta A_{k_1} + ik_1^2 A_{k_1} - i\{A | A|^2\}_{k_1}. \tag{18}$$

Для определения вида выражения в фигурной скобке нужно рассмотреть произведение трех сомножителей, каждый из которых содержит три моды

$$\begin{aligned} \{A | A|^2\}_{k_1} &= \{(A_{k_2} e^{ik_2 x} + A_{k_1} e^{ik_1 x} + A_{k_0} e^{ik_0 x}) \times \\ &\times (A_{k_2}^* e^{-ik_2 x} + A_{k_1}^* e^{-ik_1 x} + A_{k_0}^* e^{-ik_0 x})\}_{k_1} = 2A_{k_1} |A_{k_0}|^2 + A_{k_2}^* A_{k_0}^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, получим

$$\frac{\partial A_{k_1}}{\partial t} = -\delta A_{k_1} + ik_1^2 A_{k_1} - i\{2A_{k_1} |A_{k_0}|^2 + A_{k_2}^* A_{k_0}^2\} \tag{20}$$

или для действительных амплитуд и фаз

$$\frac{\partial u_{k_1}}{\partial t} = -\delta u_{k_1} + u_{k_2}^* u_{k_0}^2 \text{Sin}(2\phi_{k_0} - \phi_{k_1} - \phi_{k_2}) + g_{k_1}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t} = k_1^2 - 2u_{k_0}^2 - \frac{u_{-2k_0+k_2}}{u_{k_1}} u_{k_0}^2 \text{cos}(2\varphi_{k_0} - \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}). \tag{22}$$

Заметим, что отлично от нуля только g_{k_0} . Для основной волны

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{k_0}}{\partial t} &= -\delta A_{k_0} + ik_0^2 A_{k_0} - \\ &- i\{2A_{k_0} \sum_{k_1} |A_{k_1}|^2 + 2A_{k_0} \sum_{k_2} |A_{k_2}|^2 + A_{k_0}^* \sum_{k_1, k_2} A_{k_1} A_{k_2} + A_{k_0}^* \sum_{k_1, k_2} A_{k_2} A_{k_1}\} + g. \end{aligned} \tag{23}$$

Нужно, чтобы волновые числа всех возмущений справа и слева в этом уравнении удовлетворяли условиям

$k_0 = -k_0 + k_1 + k_2$ или были равны k_0 . Очевидно,

$$\partial A_k / \partial t = (\partial u_k / \partial t) \cdot \exp\{i\phi_k\} + i(\partial \phi_k / \partial t) u_k \cdot \exp\{i\phi_k\}. \tag{24}$$

Уравнение переписывается как

$$\begin{aligned} (\partial u_{k_0} / \partial t) \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} + i(\partial \phi_{k_0} / \partial t) \cdot u_{k_0} \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} &= -\delta u_{k_0} \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} + ik_0^2 u_{k_0} \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} - \\ - i\{2u_{k_0} \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2u_{k_0} \cdot \exp\{i\phi_{k_0}\} \sum_{k_2} u_{k_2}^2 + u_{k_0} \cdot \exp\{-i\phi_{k_0}\} \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \exp\{i\phi_{k_1} + i\phi_{k_2}\} + \\ + u_{k_0} \cdot \exp\{-i\phi_{k_0}\} \sum_{k_1, k_2} u_{k_2} u_{k_1} \exp\{i\phi_{k_2} + i\phi_{k_1}\}\} + g, \end{aligned} \tag{25}$$

а также

$$\begin{aligned} (\partial u_{k_0} / \partial t) + i(\partial \phi_{k_0} / \partial t) \cdot u_{k_0} &= -\delta u_{k_0} + ik_0^2 u_{k_0} - i\{2u_{k_0} \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2u_{k_0} \sum_{k_2} u_{k_2}^2 + \\ + u_{k_0} \cdot \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \exp\{i\phi_{k_1} + i\phi_{k_2} - 2i\phi_{k_0}\} + u_{k_0} \cdot \sum_{k_1, k_2} u_{k_2} u_{k_1} \exp\{i\phi_{k_2} + i\phi_{k_1} - 2i\phi_{k_0}\}\} + g = \\ = -\delta u_{k_0} + ik_0^2 u_{k_0} - i\{4u_{k_0} \sum_{k_1} u_{k_1}^2 + 2u_{k_0} \cdot \sum_{k_1, k_2} u_{k_1} u_{k_2} \exp\{i\phi_{k_1} + i\phi_{k_2} - 2i\phi_{k_0}\}\} + g. \end{aligned} \tag{26}$$

Используя тот факт, что волновые числа участвующих во взаимодействии мод располагаются симметрично относительно волнового числа волны накачки, определим $k_1 = k_0 + K$ и $k_2 = k_0 - K$ где $K \ll k$. Тогда уравнения для основной моды и сателлитов можно представить в следующем виде

$$du_0 / dt = u_1 \cdot [-\delta - 2 \sum_K u_K^2 \text{sin}\Phi_K] + g, \tag{27}$$

$$du_K / dt = u_K \cdot [-\delta + 2u_0^2 \text{sin}\Phi_K], \tag{28}$$

$$d\Phi_K / dt = d / dt(2\varphi_0 - \varphi_K - \varphi_{-K}) = -2K^2 + 2(u_0^2 - u_K^2) + 2(u_0^2 - 2u_K^2) \text{cos}\Phi_K. \tag{29}$$

Ниже использована известная симметрия задачи, которая состоит, в частности, в равенстве амплитуд возбуждаемых мод $u_{k_1} \equiv u_K = u_{k_2} \equiv u_{-K}$. Причем $\varphi_{k_1} \equiv \varphi_K \neq \varphi_{k_2} \equiv \varphi_{-K}$. Ниже обсудим условия формирования такой симметризации.

При рассмотрении процессов с характерными временами, значительно превышающими обратный

декремент поглощения возмущений δ^{-1} , производными по времени можно пренебречь. Из уравнений (27)-(29), считая, что декремент поглощения достаточно большой и пренебрегая производной по времени, получим значение амплитуды основной моды, поддерживаемой внешним источником

$$u_0 = \{-g[-\delta - 2\sum_K u_K^2 \sin\Phi_K]^{-1}\}. \quad (30)$$

Линейная теория. Полагая, что изменения во времени амплитуды неустойчивых мод происходят медленнее, чем меняются их фазы, пренебрежем также производной по времени от общей фазы связанных мод (канала неустойчивости) в третьем уравнении системы (29). При этом фаза $\Phi_K \rightarrow \Phi_K^{st}$. Тогда для фазы Φ_K^{st} справедливо выражение

$$\cos\Phi_K^{st} = -[u_0^2 - u_K^2 - K^2] / (u_0^2 + 2u_K^2). \quad (31)$$

Уравнение для амплитуд возмущений с волновым числом $k_0 \pm K$ в этих условиях может быть представлено в виде

$$du_K / dt = u_K \{-\delta + u_0^2 [1 - (u_0^2 - u_K^2 - K^2) / (u_0^2 + 2u_K^2)]\}. \quad (32)$$

Наибольшим линейным инкрементом обладает мода с $K = u_0(t=0) = u_{00}$, однако сужение спектра происходит в окрестности несколько меньшего значения. Если в начальный момент $u_0^2(t=0) = u_{00}^2 > \delta$, то развивается модуляционная неустойчивость. Ниже ограничимся случаем $u_{00}^2 - \delta \ll \delta$, при этом ширина спектра неустойчивости относительно невелика: $\Delta k \ll k_0$, то есть

$$k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k, \quad -k_0 - \Delta k < k < -k_0 + \Delta k, \quad (33)$$

где $\Delta k = (u_{00}^2 - \delta) / 2k_0$. Режим процесса возбуждения колебаний отвечает слабому превышению над порогом неустойчивости (слабой надпороговости). Именно в этом случае суммарные фазы каждого канала Φ_k неустойчивости "подстраиваются" под медленные изменения амплитуд колебаний. Можно перейти к представлению $K_n^2 = 1 + (\frac{2|n|-N}{N})\sqrt{1-\delta}$.

При учете нелинейных по амплитуде возмущений слагаемых уравнения для основной моды и мод неустойчивых спектров можно представить в следующем виде

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -u_0^2 - 2\sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) - 2\sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos\Phi_m, \quad (34)$$

$$u_0 = -g \{-\delta - 2\sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \sin\Phi_m\}^{-1}, \quad (35)$$

$$\frac{du_n}{dt} = \{-\delta + u_0^2 \frac{u_{-n}}{u_n} \sin\Phi_n\} u_n, \quad (36)$$

$$\frac{d\phi_n}{dt} = K_n^2 - u_0^2 \frac{u_{-n}}{u_n} \cos\Phi_n - 2[u_0^2 + \sum_{m>0}^N (u_m^2 + u_{-m}^2) - \frac{1}{2}u_n^2]. \quad (37)$$

Для суммарной фазы каждого канала неустойчивости $\Phi_n = 2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}$ справедливо уравнение

$$\frac{d\Phi_n}{dt} = \Delta_n + 2u_0^2 - (u_n^2 + u_{-n}^2) + u_0^2 [\frac{u_{-n}}{u_n} + \frac{u_n}{u_{-n}}] \cos\Phi_n - 4\sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos\Phi_m, \quad (38)$$

причем для расстройки Δ_n получим выражение

$$-\frac{\Delta_n}{2} = K_n^2 = 1 + (\frac{2|n|-N}{N})\sqrt{1-\delta}, \quad (39)$$

где

$$K_n = k_n - k_0, \text{ и } K_{-n} = k_{-n} - k_0, \quad K_{-n} = -K_n, \quad -2(1+\sqrt{1-\delta}) < \Delta_n < -2(1-\sqrt{1-\delta}). \quad (40)$$

Влияние начальных условий. Покажем, что u_m и u_{-m} выравниваются уже на линейной стадии неустойчивости. Для суммы фаз в развитом режиме неустойчивости справедливо уравнение

$$\frac{d\Phi_n}{dt} = \Delta_n + 2u_0^2 + u_0^2 [\frac{u_{-n}}{u_n} + \frac{u_n}{u_{-n}}] \cos\Phi_n. \quad (41)$$

Производная в левой части уравнения (41) быстро обращается в нуль [66], при этом $\Phi_n \rightarrow \Phi_n^{st}$, где устойчивая фаза Φ_n^{st} определяется из выражения

$$\cos(\Phi_n^{st}) = (2K_m^2 - 2u_0^2) / u_0^2 \left[\frac{u_{-m}}{u_m} + \frac{u_m}{u_{-m}} \right]. \quad (42)$$

При $\delta = 0$ устойчивые фазы растущих мод находятся в интервале $0 < \Phi_n^{st} < \pi$, максимальный инкремент отвечает значению $\Phi_n^{st} = \pi / 2$. При увеличении уровня поглощения δ интервал Φ_n^{st} сужается. Собственно, при достижении этого устойчивого значения интегральной фазы и начинается рост возмущений. Отметим, что при $K_m^2 = u_0^2$ линейный инкремент неустойчивости

$$\text{Im}\omega = \gamma = -\delta + (-\Delta_n^2 - 4\Delta_n u_0^2)^{1/2} / 2 \quad (43)$$

максимален и равен $\gamma_{MAX} = (u_0^2 - \delta)$.

Природа вынужденной интерференции. При различных начальных амплитудах мод u_m и u_{-m} , для которых значение расстройки Δ_n попадает в интервал (40), имеет место их неравномерный рост при $\{-\delta + u_0^2 \sin \Phi_n^{st}\} = \gamma > 0$. Мода с большей амплитудой растет медленнее, чем мода меньшей амплитуды. Для разности амплитуд справедливо уравнение

$$\frac{\partial(u_m - u_{-m})}{\partial t} = \{-\delta - u_0^2 \sin \Phi_n^{st}\} \cdot (u_m - u_{-m}), \quad (44)$$

которое и описывает динамику выравнивания растущих амплитуд мод. Заметим, что сумма амплитуд этих мод растет

$$\frac{\partial(u_m + u_{-m})}{\partial t} = \{-\delta + u_0^2 \sin \Phi_n^{st}\} \cdot (u_m + u_{-m}). \quad (45)$$

Выравнивание амплитуд и их рост происходит уже в процессе развития неустойчивости. Для корректного выяснения поведения разности фаз этих мод полезно использовать уравнения системы (34)-(37), откуда получим

$$\frac{d(\phi_n - \phi_{-n})}{dt} = 2 \frac{d(\phi_n - \phi_0)}{dt} = 2(u_n^2 - u_{-n}^2) \cdot \left\{ 1 + \frac{(K_n^2 - u_0^2)}{(u_n^2 + u_{-n}^2)} + \frac{2}{(u_n^2 + u_{-n}^2)} \sum_{m>0}^N u_m u_{-m} \cos \Phi_m \right\}. \quad (46)$$

Следует отметить, что при выравнивании амплитуд мод разность фаз уже не меняется на начальной стадии развитой неустойчивости. Таким образом, несмотря на синхронизацию основной волной суммарных фаз мод спектра $\Phi_n \rightarrow \Phi_n^{st}$, каждая пара мод на нелинейной стадии процесса сохраняет разность фаз, что приводит к навязанной основной волной интерференции. Фактически реальное поле это сумма вида

$$\sim \sum_n [\exp\{i\Phi_n^{st} / 2\} \cdot \cos[k_n x - (\varphi_n - \varphi_{-n}) / 2], \quad (47)$$

где фазы Φ_n^{st} и $(\varphi_n - \varphi_{-n})$ для каждого значения n на начальной стадии развитого процесса стабилизируются. При уменьшении амплитуды основной волны, интерференционные процессы теряют с ней связь. Такая интерференция мод спектра, навязанная основной волной, может быть названа вынужденной интерференцией [54].

Изменения в пространственной структуре поля $A(x, t)$ в лабораторной системе отчета можно исследовать, рассматривая выражение

$$A(x, t) = \exp\{-ik_0 x + i\omega_0 t + i\phi_0(t)\} \cdot [u_0 + \sum_{m>0}^N [u_m \exp\{-iK_m x + i[\phi_m(t) - \phi_0(t)]\} + u_{-m} \exp\{iK_m x + i[\phi_{-m}(t) - \phi_0(t)]\}]. \quad (48)$$

Случайное начальное распределение фаз мод приводит к подобному случайному их распределению после установления равенства амплитуд u_m, u_{-m} , симметричных относительно основной волны мод спектра.

Нетрудно привести выражение для огибающей волнового движения

$$\bar{A} = \left\{ [u_0 + \sum_{m>0}^N [u_m \cos(-K_m x + [\phi_m(t) - \phi_0(t)]) + u_{-m} \cos(K_m x + [\phi_{-m}(t) - \phi_0(t)]]]^2 + \right. \\ \left. + [\sum_{m>0}^N [u_m \sin(-K_m x + [\phi_m(t) - \phi_0(t)]) + u_{-m} \sin(K_m x + [\phi_{-m}(t) - \phi_0(t)]]]^2 \right\}^{1/2}. \quad (49)$$

1.3. Модуляционная неустойчивость волны большой амплитуды в 1D модели Лайтхилла

Учет наиболее эффективных взаимодействий, которые происходят только между симметричными по отношению к накачке модами спектра ($k_s + k_{-s} = k_n + k_{-n}$) согласно S-теории приводит к следующим уравнениям

$$\frac{dv_s}{dt} = v_s \left\{ -\delta + u_0^2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sin\Phi_s + 2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sum_{n \neq s}^N u_n u_{-n} \sin\Psi_{sn} \right\}, \quad (50)$$

$$\frac{d\phi_s}{dt} = K_s^2 - 2(u_0^2 + \frac{3}{2}v_s^2 + 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2) - u_0^2 \frac{v_{-s}}{v_s} \cos\Phi_s - 2 \frac{v_{-s}}{v_s} \sum_{n \neq s}^N u_n u_{-n} \cos\Psi_{sn}, \quad (51)$$

к которым следует добавить первые два уравнения системы (34) - (37). Выше использовано обозначение: $\Psi_{sn} = \Phi_s - \Phi_n$. Здесь для удобства анализа использовано обозначение $v_s \equiv u_s$ амплитуд мод спектра с волновыми числами k_s . В развитой стадии неустойчивости данная система уравнений способна описывать не только процессы обмена энергией между модами спектра, но и развитие каскада модуляционных неустойчивостей, результатом которой может быть формирование фрактального спектра возмущений.

Можно показать, что выравнивание амплитуд v_s и v_{-s} происходит и в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} - \frac{dv_{-s}}{dt} &= -\delta(v_s - v_{-s}) + (v_{-s} - v_s)u_0^2 \sin\Phi_s + 2(v_{-s} - v_s) \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \sin\Psi_{sn} = \\ &= (v_s - v_{-s}) \left\{ -\delta - u_0^2 \sin\Phi_s - 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \sin\Psi_{sn} \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Причем сумма этих мод при выполнении условий неустойчивости растет:

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} + \frac{dv_{-s}}{dt} &= -\delta(v_s + v_{-s}) + (v_{-s} + v_s)u_0^2 \sin\Phi_s + 2(v_{-s} + v_s) \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \sin\Psi_{sn} = \\ &= (v_s + v_{-s}) \left\{ -\delta + u_0^2 \sin\Phi_s + 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \sin\Psi_{sn} \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Что касается поведения фаз, то следует отметить, что при выравнивании амплитуд мод разность фаз уже не меняется даже на развитой стадии неустойчивости:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_s}{dt} - \frac{d\phi_{-s}}{dt} &= -(v_s^2 - v_{-s}^2) - u_0^2 \left(\frac{v_{-s}}{v_s} - \frac{v_s}{v_{-s}} \right) \cos\Phi_s - 2 \left(\frac{v_{-s}}{v_s} - \frac{v_s}{v_{-s}} \right) \sum_{n \neq s, -s}^N u_n^2 \cos\Psi_{sn} - \\ &- 2 \left(\frac{v_{-s}^3}{v_s} - \frac{v_s^3}{v_{-s}} \right) \cos\Psi_{s-s}. \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, систему уравнений уже даже на начальной стадии неустойчивости можно представить в виде

$$\frac{dv_s}{dt} = v_s \left\{ -\delta + u_0^2 \sin\Phi_s + 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \sin\Psi_{sn} \right\}, \quad (55)$$

$$\frac{d\phi_s}{dt} = K_s^2 - 2(u_0^2 + \frac{3}{2}v_s^2 + 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2) - u_0^2 \cos\Phi_s - 2 \sum_{n \neq s}^N u_n^2 \cos\Psi_{sn}. \quad (56)$$

Двумерная неустойчивость. Для двумерной неустойчивости плоской интенсивной волны справедлива следующая система уравнений.

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -u_0^2 - 4 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N (u_{m,s}^2 + u_{-m,-s}^2) - 2 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \cos\Phi_{m,s}, \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} u_0 = \left\{ -\delta - 2 \sum_{s=-S}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \sin\Phi_{m,s} \right\} + G, \quad (58)$$

$$\frac{du_{n,s}}{dt} = u_{n,s} \left\{ -\delta + u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sin\Phi_{n,s} + 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m \neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \sin\Psi_{snmz} \right\}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{n,s}}{dt} &= (K_{n,s}^2 + K_{n,s}^2) - 2[u_0^2 + \frac{1}{2}u_{n,s}^2 + u_{-n,-s}^2 + 2\sum_{\substack{z>0 \\ z\neq s}}^S \sum_{\substack{m>0 \\ m\neq n}}^N (u_{m,z}^2 + u_{-m,-z}^2)] \\ &- u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \cos\Phi_{n,s} - 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z\neq s}}^S \sum_{\substack{m\neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \cos\Psi_{snmz}, \end{aligned} \tag{60}$$

где $\Phi_{n,s} = 2\varphi_0 - \varphi_{n,s} - \varphi_{-n,-s}$ и $\Psi_{snmz} = \Phi_{n,s} - \Phi_{m,z}$, а для волновых чисел в двух направлениях

$$K_{n,s}^2 = \{1 + (\frac{2|n|-N}{N})\sqrt{1-\delta}\} - K_{n,s}^2, K_{m,s} = 0.1 \cdot s.$$

Для медленно меняющегося поля справедливо выражение

$$\begin{aligned} E_M(\xi, \eta, t) &= [u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0)\} + \\ &+ u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0)\}]]. \end{aligned} \tag{61}$$

В том случае, если существует необходимость просмотреть тонкую структуру поля, то есть, отдельные волны

$$\begin{aligned} E_M(\xi, \eta, t) &= \exp\{-ik_0\xi + i\varphi_0\} \times \\ &\times \left(u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N (u_{m,s} \exp(-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0)) + \right. \\ &\left. + u_{-m,-s} \exp(iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0))) \right). \end{aligned} \tag{62}$$

В системе покоя модуляции для подобной тонкой структуры поля справедливо выражение

$$\begin{aligned} E_M(\xi, \eta, t) &= \exp\{-ik_0((\xi + 2k_0t)) + i\varphi_0\} \cdot [u_0 + \\ &+ \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}\xi - iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{m,s} - \varphi_0) - 2K_m \cdot k_0t\} + \\ &+ u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}\xi + iK_{m,s}\eta + i(\varphi_{-m,-s} - \varphi_0) + 2K_m \cdot k_0t\}]]. \end{aligned} \tag{63}$$

Модель Лайтхилла без ограничений на вид взаимодействия мод спектра. Если в выражении для нелинейного слагаемого вида $\{A | A|^2\}_k$ в уравнении Лайтхилла (9) удерживать все слагаемые, не ограничиваясь симметричными по отношению к накачке модами спектра ($2k_0 = k_s + k_{-s} = k_n + k_{-n}$), которые используются для формирования S-теории, то уравнения для амплитуды и фазы малых мод можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\delta u_n - \beta_{1L} A_{n,1} - \beta_{2L} A_{n,2}, \tag{64}$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = K_n^2 \cdot u_n - \beta_{1L} B_{n,1} - \beta_{2L} B_{n,2} \tag{65}$$

а для амплитуды и фазы основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -\delta u_0 - \beta_{1L} A_{0,1} - \beta_{2L} A_{0,2} + G_0, \tag{66}$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -\beta_{1L} B_{0,1} - \beta_{2L} B_{0,2}, \tag{67}$$

где $G_{k_n} \equiv G_n = 0, k_n \neq k_0, n \neq 0; G_{k_n} \equiv G_n = \delta, k_n = k_0, n = 0.$

Причем для $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ справедливы выражения

$$A_{0,1} = +u_0 \sum_{m\neq 0} u_m u_{-m} \sin(2\varphi_0 - \varphi_m - \varphi_{-m}), \tag{68}$$

$$B_{0,1} = [u_0^3 + 2u_0 \sum_{m\neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m\neq 0} u_m u_{-m} \cos(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \tag{69}$$

$$A_{0,2} = -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \sin(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \tag{70}$$

$$B_{0,2} = +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cos(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \tag{71}$$

$$A_{n,1} = -[u_{-n}u_0^2 \sin(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0,n} u_m u_{-m} \sin(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (72)$$

$$B_{n,1} = [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0,n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \cos(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0,n} u_m u_{-m} \cos(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (73)$$

$$A_{n,2} |_{n \neq 0} = -\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \sin(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1}, \quad (74)$$

$$B_{n,2} |_{n \neq 0} = +\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cos(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}. \quad (75)$$

При $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 0$ приходим к предыдущему случаю (S-теория), при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 1$, не трудно видеть, что система уравнений есть следствие уравнения (12), где слагаемое $iA|A|^2$ вычисляется точно, без учета ограничений S-теории. Ниже будем выделять случай описания с помощью S-теории и так называемый общий случай, когда нелинейные слагаемые вычисляются без приближений. Пространственно-временная структура волнового поля и его огибающей может быть представлена выражениями (48) и (49).

1.4. Система уравнений, описывающая модуляционную неустойчивость гравитационных волн на поверхности воды

Если дисперсия достаточно сильная в окрестности частоты волны большой амплитуды, возможно нарушение симметрии в структуре стоковой и антистоковой части спектра, что способно значительно изменить характер модуляции. Так, например, для гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, представляющих интерес для судоходства в районах с высоким уровнем возбуждения океанского волнения, справедливо следующее выражение для частоты волн большой амплитуды [8]

$$\omega = kW = \sqrt{gk} \cdot \left\{ 1 + \frac{A^2 k^2}{2} + \dots \right\}, \quad (76)$$

где A – отклонение поверхности, W – скорость волны, g – ускорение свободного падения. Уравнение для комплексной амплитуды поля, используя подход, с помощью которого получено уравнение (12), представляется в виде

$$\frac{\partial A_K}{\partial t} = -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_K, \quad (77)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$ – длина волны большой амплитуды, $H = 2|A|$ – крутизна волны, то есть расстояние между

верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины волны. В случае применения S-теории уравнение (77) можно записать в виде

$$\frac{\partial A_K}{\partial t} = -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K,0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K \neq K,0} A_K \cdot A_{-K}\}\}. \quad (77a)$$

Данные экспериментальных исследований [67] указывают на следующие характеристики таких волн: максимальная крутизна для устойчивых длинных (гравитационных) волн на глубокой воде до их обрушения $H/\lambda = 0,11 \div 0,13$ откуда $Ak < 1$. Важно отметить, что волны с большей амплитудой не существуют из-за эффекта обрушения.

В отсутствие модуляции $|A_0|$ – средняя амплитуда, $\bar{H} = 2|A_0|$ – средняя крутизна. Для аномально больших волн их крутизна достигает $(2 \div 3) \cdot 2|A_0|$, причем для наиболее высоких волн $(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 < 0,11 - 0,13$. Анализируя эти данные, легко видеть, что ширина пространственного спектра неустойчивости в этих условиях не столь мала в сравнении с волновым числом волны большой амплитуды, как в предыдущих моделях.

Перейдем к описанию медленно меняющейся амплитуды волны (исключим частоту основной волны $\sqrt{gk_0}$) то есть будем рассматривать медленное изменение комплексной амплитуды, что соответствует переходу:

$$A_K \propto \exp\{-i\omega_0 t + i(k_0 + K)x + i\phi_K\} \rightarrow A_K \propto \exp\{+i(k_0 + K)x + i\phi_K\}. \quad (78)$$

При этом уравнение (77) можно записать в виде

$$\frac{\partial A_K}{\partial t} = -\delta A_K - i[\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}]A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \times \times \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K \neq K, 0} A_K \times A_{-K}\}\}. \quad (79)$$

Введем в рассмотрение действительные амплитуды и фазы: $A_K = |A_K| \exp\{i\varphi_K\}$. Здесь пространственная зависимость уже не нужна и мы её убрали, то есть был осуществлен дальнейший переход: $A_K \propto \exp\{i(k_0 + K)x + i\varphi_K\} \rightarrow A_K \cdot \exp\{i\varphi_K\}$. Правильнее было бы переобозначить величины, но это не обязательно. Для амплитуды и фазы отдельной моды:

$$\frac{\partial |A_K|}{\partial t} = -\delta |A_K| + \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin(2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K}) + + |A_{-K}| \sum_{K \neq K, 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \sin(\phi_K + \phi_{-K} - \phi_K - \phi_{-K})], \quad (80)$$

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial t} = -[\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}] - \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} |A_0|^2 \cos(2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K}) + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} \sum_{K \neq K, 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \cos(\phi_K + \phi_{-K} - \phi_K - \phi_{-K}). \quad (81)$$

Определим величину $2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K} = \Phi_K$. Используя это представление, запишем систему уравнений, описывающую модуляционную неустойчивость гравитационной поверхностной волны большой амплитуды в условиях сильной дисперсии глубокой воды.

$$\frac{\partial |A_K|}{\partial t} = -\delta |A_K| + \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin\Phi_K + + |A_{-K}| \sum_{K \neq K, 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \sin(\Phi_K - \Phi_K)], \quad (82)$$

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial t} = -[\sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}] - \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} |A_0|^2 \cos(\Phi_K) + \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} \sum_{K \neq K, 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \cos(\Phi_K - \Phi_K)]. \quad (83)$$

Для волны большой амплитуды

$$\frac{\partial |A_0|}{\partial t} + \delta |A_K| + \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2}{2} \cdot [|A_0| \sum_{K \neq K, 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \sin(\Phi_K)] = G, \quad (84)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = -\sqrt{gk_0} \frac{k_0^2}{2} \cdot [|A_0|^2 + 2 \sum_{K \neq 0} |A_K|^2] + \sum_{K \neq 0} |A_K| \cdot |A_{-K}| \cos(\Phi_K)]. \quad (85)$$

Линейная по амплитудам возмущений теория и области задания параметров. Для решения задачи линейной устойчивости пренебрежем квадратами малых амплитуд. Для амплитудного уравнения (82) при этом справедливо выражение

$$\frac{\partial |A_K|}{\partial t} = -\delta |A_K| + \sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin\Phi_K]. \quad (86)$$

Введем новый масштаб времени $\tau = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}$, при этом для значения затухания получим

$\delta_d = \delta / \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}$. Уравнение для действительных амплитуд мод спектра при этом перепишем следующим образом

$$\frac{\partial |A_K|}{\partial \tau} = -\delta_d |A_K| + (1 + K/k_0)^{2,5} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin\Phi_K]. \quad (87)$$

Тогда два уравнения для двух мод неустойчивого спектра, непосредственно взаимодействующих с основной волной, примут вид

$$\frac{\partial |A_K|}{\partial \tau} = -\delta_d |A_K| + (1 + K/k_0)^{2,5} \cdot [|A_{-K}| |A_0|^2 \sin \Phi_K], \quad (88)$$

$$\frac{\partial |A_{-K}|}{\partial \tau} = -\delta_d |A_{-K}| + (1 - K/k_0)^{2,5} \cdot |A_K| |A_0|^2 \sin \Phi_K. \quad (89)$$

В частности, в отсутствие диссипации определим, как растут на линейной стадии амплитуды таких мод, симметрично расположенных в пространстве волновых чисел относительно основной волны. В этом случае для выявления тенденций нужно перенормировать время, которое здесь будет другим: $\tau(1 + K/k_0)^{1,25} \cdot (1 - K/k_0)^{1,25} \rightarrow \tau'$. Ниже этот переход к новому масштабу времени не используется. Он нужен только для поиска отношений амплитуд.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 |A_K|}{\partial \tau^2} &= (1 + K/k_0)^{2,5} \cdot \left[\frac{\partial |A_{-K}|}{\partial \tau} |A_0|^2 \sin \Phi_K \right] = \\ &= +(1 + K/k_0)^{2,5} \cdot |A_0|^2 \sin \Phi_K \cdot (1 - K/k_0)^{2,5} \cdot [|A_K| |A_0|^2 \sin \Phi_K] = \\ &= +(1 + K/k_0)^{2,5} \cdot (1 - K/k_0)^{2,5} |A_0|^4 \sin^2 \Phi_K \cdot |A_K|. \end{aligned} \quad (90)$$

Теперь мы получили подсказку, как записать компактно эти уравнения. Выясним, какое отношение амплитуд формируется (в отсутствие диссипации) на линейной стадии. Оказывается $|A_K| / |A_{-K}| \rightarrow (1 + K/k_0)^{1,25} / (1 - K/k_0)^{1,25}$. Напомним: ранее амплитуды симметричных мод выравнивались на линейной стадии. Здесь они будут несколько отличаться. То есть, будем ожидать нарушение симметрии по амплитудам справа (антистоксовая часть спектра) и слева (стоксовая часть спектра) в пространстве волновых чисел от основной волны.

Для интегральной фазы канала $2\varphi_0 - \varphi_K - \varphi_{-K} = \Phi_K$ справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_K}{\partial \tau} &= 2 \frac{[\sqrt{1 + K/k_0} + \sqrt{1 - K/k_0} - 2]}{k_0^2 |A_0|^2} + 2 |a_0|^2 \{-2 + 2(1 + K/k_0)^{2,5} + 2(1 - K/k_0)^{2,5}\} + \\ &+ |a_0|^2 \cos(\Phi_K) \left\{ (1 + K/k_0)^{2,5} \frac{|A_{-K}|}{|A_K|} + (1 - K/k_0)^{2,5} \frac{|A_K|}{|A_{-K}|} \right\}. \end{aligned} \quad (91)$$

Ранее мы использовали то обстоятельство, что при переходе к экспоненциальному росту возмущений в условиях конечного поглощения энергии выполнялось условие $\cos(\Phi_K) \rightarrow 0$ для пары мод с максимальным инкрементом. При этом оказывалось возможным определить положение центров неустойчивого спектра. Ибо неустойчивый спектр состоит из двух почти симметричных частей относительно положения волнового вектора основной моды. Уравнение для положения центров кривых инкремента $K_{Max}/k_0 = f(k_0^2 |A_0|^2)$

$$\frac{[2 - \sqrt{1 + K_{Max}/k_0} - \sqrt{1 - K_{Max}/k_0}]}{k_0^2 |A_0|^2} = \{-2 + 2(1 + K_{Max}/k_0)^{2,5} + 2(1 - K_{Max}/k_0)^{2,5}\} \quad (92)$$

следует решать численно. Можно разложить (92) используя малый параметр K_{Max}/k_0 :

$$\frac{[K_{Max}/k_0]^2}{4k_0^2 |A_0|^2} = 2, \quad (93)$$

при этом

$$K_{Max}/k_0 = 2\sqrt{2}k_0 |A_0| = 2\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}. \quad (94)$$

После этого моды спектра располагаем в интервалах: $0 < K < 2K_{Max}$ (антистоксовая часть спектра, положительные K) и $-2K_{Max} < -K < 0$ (стоксовая часть спектра, отрицательные K). Интервал $0 < K < 2K_{Max}$ можно представить в виде суммы N мод обычным способом, как и ранее, вводя интервал в пространстве волновых чисел $\Delta K = \frac{2K_{Max}}{N}$, и переходя к использованию безразмерных величин $K_i = i \cdot \Delta K / k_0$, $i = \pm(1, 2, \dots, N)$.

Визуализация. Кстати, ΔK определит и область рассмотрения – для наблюдения импульсов в пространстве $\zeta = k_0 x$:

$$\zeta \subset L = 2\pi / (\Delta K / k_0) = \pi N / K_m = \frac{\pi N}{2\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}}, \quad (95)$$

где $K_m = K_{Max}/k_0$. Поле возмущений имеет вид, который немного более общий, чем ранее

$$\begin{aligned}
 E &= \exp\{-i\omega_0 t + ik_0 x + i\phi_0\} \cdot \\
 &\{u_0 + \sum_{\substack{i \neq 0 \\ i > 0}} [u_i \cdot \exp\{-i(\omega_i - \omega_0)t + i(k_i - k_0)x + i(\phi_i - \phi_0)\}] + \\
 &u_{-i} \cdot \exp\{-i(\omega_{-i} - \omega_0)t + i(k_{-i} - k_0)x + i(\phi_{-i} - \phi_0)\}]\}.
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

Это связано с тем, что частоты мод $\omega_i - \omega_0 = \omega(k_0 + K) - \omega(k_0) = \sqrt{g(k_0 + K)} - \sqrt{gk_0}$ могут быть, разумеется, разложены в ряд по K , а могут быть приведены и в такой форме. Например, раскладывая в ряд по K , получим $\omega(k_0 + K) = \omega(k_0) \left\{ 1 + \frac{K}{2k_0} - \frac{K^2}{8k_0^2} \right\}$, тогда $\omega(k_0 + K) - \omega(k_0) = \omega(k_0) \left\{ \frac{K}{2k_0} - \frac{K^2}{8k_0^2} \right\}$ и экспонента в верхнем выражении будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 &\exp\left\{-i\omega(k_0)\left(\frac{K}{2k_0} - \frac{K^2}{8k_0^2}\right)t + iKx + i(\phi_i - \phi_0)\right\} = \\
 &= \exp\left\{i\omega(k_0)\left(\frac{K^2}{8k_0^2}\right)t\right\} \cdot \exp\left\{iK\left(x - \frac{\omega(k_0)}{2k_0}t\right) + i(\phi_i - \phi_0)\right\}.
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

Тогда выражение для поля в системе отсчета основной волны $\xi = x - \frac{\omega_0}{k_0}t$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 E &= \exp\{ik_0 \xi + i\phi_0\} \cdot \\
 &\{u_0 + \sum_{\substack{K \neq 0 \\ K > 0}} \exp\{i\omega_0 \frac{K^2}{8k_0^2} t\} [u_K \cdot \exp\{+iK(\xi + \frac{\omega_0}{2k_0}t) + i(\phi_K - \phi_0)\}] + \\
 &+ u_{-K} \cdot \exp\{-iK(\xi + \frac{\omega_0}{2k_0}t) + i(\phi_{-K} - \phi_0)\}]\},
 \end{aligned}
 \tag{98}$$

Используем следующие обозначения $k_0 \xi = \zeta$, $\frac{\omega_0}{2}t = \tau / \alpha$, $\alpha = k_0^2 |A_0|^2$, $\tau = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}$, $K \rightarrow K/k_0$, $\omega_0 \frac{K^2}{8k_0^2} t = (\tau / 4\alpha) \cdot K^2$.

В пространстве ζ вид возмущения

$$\begin{aligned}
 E &= \exp\{i\zeta + i\phi_0\} \cdot \\
 &\{u_0 + \sum_{\substack{K \neq 0 \\ K > 0}} \exp\{i\frac{K^2}{4\alpha}\tau\} [u_K \cdot \exp\{+iK(\zeta + \frac{\tau}{\alpha}) + i(\phi_K - \phi_0)\}] + \\
 &+ u_{-K} \cdot \exp\{-iK(\zeta + \frac{\tau}{\alpha}) + i(\phi_{-K} - \phi_0)\}]\}.
 \end{aligned}
 \tag{99}$$

Здесь основная волна покоится, а модуляция перемещается. Окончательно система уравнений, описывающая модуляционную неустойчивость волны большой амплитуды в условиях сильной дисперсии, принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_K}{\partial \tau} &= -\delta_d u_K + (1 + K)^{2.5} \cdot [u_{-K} \cdot u_0^2 \sin\Phi_K + \\
 &+ u_{-K} \sum_{K \neq K, 0} u_K u_{-K} \sin(\Phi_K - \Phi_K)].
 \end{aligned}
 \tag{100}$$

Здесь следует различать моды с волновыми числами K и K , соответственно и фазы Φ_K и Φ_K и сделана замена $K \rightarrow K/k_0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_K}{\partial \tau} &= -\frac{2[\sqrt{(1 + K)} - 1]}{\alpha} - (1 + K)^{2.5} \cdot [[2u_0^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} u_{K'}^2 + u_K^2] + \\
 &+ \frac{u_{-K}}{u_K} u_0^2 \cos\Phi_K + \frac{u_{-K}}{u_K} \sum_{K \neq K, 0} u_K u_{-K} \cos(\Phi_K - \Phi_K)],
 \end{aligned}
 \tag{101}$$

где использованы традиционные обозначения $A_K / A_0 = a_K = |a_K| \exp\{i\varphi_K\} = u_K \exp\{i\varphi_K\}$, а также

$\Delta_K = \frac{2\{\sqrt{(1+K)}-1\} + \sqrt{(1-K)}-1\}}{\alpha}$, $P_K = \{2(1+K)^{2.5} + 2(1-K)^{2.5} - 2\}$ причем при расчетах можно не

использовать разложение подкоренных выражений. Уравнения для основной волны можно записать как

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \delta u_0 + u_0 \sum_{K \neq K,0} u_K u_{-K} \sin \Phi_K = G, \quad (102)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = -u_0^2 - 2 \sum_{K \neq 0} u_K^2 - \sum_{K \neq 0} u_K u_{-K} \cos \Phi_K. \quad (103)$$

Уравнение для интегральной фазы Φ_K принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_K}{\partial \tau} = & \Delta_K + P_K \cdot \{u_0^2 + 2 \sum_{K' \neq -K, K, 0} u_{K'}^2 + 3u_K^2 + 3u_{-K}^2\} + \\ & + \{(1+K)^{2.5} \cdot \frac{u_{-K}}{u_K} u_0^2 + (1-K)^{2.5} \cdot \frac{u_K}{u_{-K}} u_0^2 - 2 \sum_{K \neq 0} u_K u_{-K}\} \cos \Phi_K + \\ & + \{(1+K)^{2.5} \cdot \frac{u_{-K}}{u_K} \sum_{K \neq K,0} u_K u_{-K} + (1-K)^{2.5} \cdot \frac{u_K}{u_{-K}} \sum_{K \neq -K,0} u_K u_{-K}\} \cos(\Phi_K - \Phi_K). \end{aligned} \quad (104)$$

Так же как и в предыдущем разделе можно перейти к $K \rightarrow K_m$ и суммированию по m , то есть $K_m = m \cdot \Delta K / k_0$ где $\Delta K = \frac{2K_{Max}}{N}$ и $m = \pm(1,2,\dots,N)$, причем $K_{Max} / k_0 = 2\sqrt{2}k_0 |A_0| = 2\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}$, где $\alpha = k_0^2 |A_0|^2$.

2D представление. Для двумерной неустойчивости плоской волны большой амплитуды справедлива следующая система уравнений [63].

$$\frac{d\phi_0}{dt} = -u_0^2 - 4 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N (u_{m,s}^2 + u_{-m,-s}^2) - 2 \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \cos \Phi_{m,s}, \quad (105)$$

$$\frac{d}{dt} u_0 = \{-\delta_d - 2 \sum_{s=-S}^S \sum_{m>0}^N u_{m,s} u_{-m,-s} \sin \Phi_{m,s}\} + G, \quad (106)$$

где $\Phi_{n,s} = 2\phi_0 - \phi_{n,s} - \phi_{-n,-s}$ и $\Psi_{snmz} = \Phi_{n,s} - \Phi_{m,z}$, а для волновых чисел в двух направлениях $K_{m,s}^2 = \frac{m^2 \cdot \Delta K_{Max}^2}{N^2 \cdot k_0^2} - P_{n,s}^2$, причем $K_{m,s} = \text{sign}(m) \sqrt{K_{m,s}^2}$ и $P_{m,s} = 0.1 \cdot s$, и для небольших $K_{Max} / k_0 = 2\sqrt{2}k_0 |A_0| = 2\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}$. Причем, для длинных гравитационных волн $\alpha = k_0^2 |A_0|^2$ и выполнено условие $(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 \propto 0.13$.

Моды спектра в двумерном представлении описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{du_{n,s}}{dt} = & u_{n,s} \{-\delta_d + \\ & + (1 + K_{n,s})^{2.5} \cdot [u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sin \Phi_{n,s} + 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m \neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \sin \Psi_{snmz}]\}, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{n,s}}{dt} = & -\frac{2[\sqrt{(1+K_{n,s})}-1]}{\alpha} - \\ & -(1 + K_{n,s})^{2.5} \{2[u_0^2 + \frac{1}{2}u_{n,s}^2 + u_{-n,-s}^2 + 2 \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m>0 \\ m \neq n}}^N (u_{m,z}^2 + u_{-m,-z}^2)] + \\ & + u_0^2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \cos \Phi_{n,s} + 2 \frac{u_{-n,-s}}{u_{n,s}} \sum_{\substack{z>0 \\ z \neq s}}^S \sum_{\substack{m \neq n \\ m>0}}^N u_{-m,-z} u_{m,z} \cos \Psi_{snmz}\}. \end{aligned} \quad (108)$$

Для тонкой структуры поля, то есть, выделяя отдельные волны, получим

$$\begin{aligned}
E_M(\xi, \eta, t) &= \exp\{i\xi\zeta + i\phi_0\} \cdot \\
&\{u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N \exp\{i\frac{K^2}{4\alpha}\tau\} \cdot [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}(\zeta + \frac{\tau}{\alpha}) - iP_{m,s}\eta + i(\phi_{m,s} - \phi_0)\} + \\
&+ u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}(\zeta + \frac{\tau}{\alpha}) + iP_{m,s}\eta + i(\phi_{-m,-s} - \phi_0)\}]\}.
\end{aligned} \tag{109}$$

Причем для модуляции справедливо выражение $E_M(\xi, \eta, t) \cdot \exp\{-i\xi\zeta - i\phi_0\}$. В системе покоя модуляции $\zeta' = (\zeta + \frac{\tau}{\alpha})$ для подобной тонкой структуры поля справедливо выражение

$$\begin{aligned}
E_M(\xi, \eta, t) &= \exp\{i(\zeta' - \frac{\tau}{\alpha}) + i\phi_0\} \cdot \\
&\{u_0 + \sum_{s>0}^S \sum_{m>0}^N \exp\{i\frac{K^2}{4\alpha}\tau\} \cdot [u_{m,s} \exp\{-iK_{m,s}\zeta' - iP_{m,s}\eta + i(\phi_{m,s} - \phi_0)\} + \\
&+ u_{-m,-s} \exp\{iK_{m,s}\zeta' + iP_{m,s}\eta + i(\phi_{-m,-s} - \phi_0)\}]\}.
\end{aligned} \tag{110}$$

Модель без учета ограничений на вид взаимодействия мод спектра. Если учитывать все виды нелинейного взаимодействия мод спектра, то есть в выражении для нелинейного слагаемого вида $\{A | A|^2\}_k$ удерживать все слагаемые, не ограничиваясь симметричными по отношению к накачке модами спектра ($2k_0 = k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$), которые используются для формирования S-теории, то уравнения для амплитуды и фазы малых мод можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\delta u_n - \beta_1 A_{n,1} - \beta_2 A_{n,2}, \tag{111}$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = -2 \left\{ \frac{\sqrt{1+n \cdot \Delta} - 1}{\alpha} \right\} u_n - \beta_1 B_{n,1} - \beta_2 B_{n,2}. \tag{112}$$

Уравнения для амплитуды и фазы моды основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\delta u_0 - \beta_1 A_{0,1} - \beta_2 A_{0,2} + G_0, \tag{113}$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\beta_1 B_{0,1} - \beta_2 B_{0,2}, \tag{114}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{0,1} &= -[u_0 \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \sin(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \\
B_{0,1} &= [u_0 u_0^2 + 2u_0 \sum_{m \neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \cos(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \\
A_{0,2} &= -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \sin(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \\
B_{0,2} &= +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cos(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \\
A_{n,1} &= -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_{-n} u_0^2 \sin(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \sin(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \\
B_{n,1} &= (1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0, n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \cos(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + \\
&+ u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \cos(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \\
A_{n,2} |_{n \neq 0} &= -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \sin(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1}; n \neq 0, \\
B_{n,2} |_{n \neq 0} &= +(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cos(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}.
\end{aligned}$$

При $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 0$ приходим к предыдущему случаю (S-теория), при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 1$, не трудно видеть, что система уравнений есть следствие уравнения (77), где нелинейное слагаемое вычисляется точно,

без учета ограничений S-теории. Ниже будем выделять случай описания с помощью S-теории и так называемый общий случай, когда нелинейные слагаемые модели (12) вычисляются без приближений.

Пространственно-временная структура волнового поля в системе покоя основной волны может быть представлена выражением

$$E(\xi, \tau) = u_0 \cos(\xi + \varphi_0) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n > 0}} [u_n \cos\{-2 \frac{\sqrt{(1+n \cdot \Delta)} - (1+n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1+n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_n\} + u_{-n} \cos\{2 \frac{\sqrt{(1-n \cdot \Delta)} - (1-n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1-n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_{-n}\}], \quad (115)$$

где $k_0 x = \xi$ и область пространства рассмотрения $-\pi / \Delta < \xi < \pi / \Delta$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Результаты расчетов процесса модуляции волны конечной амплитуды в модели Лайтхилла

Численное решение представленной выше системы дифференциальных уравнений (34)-(38) демонстрирует возбуждение спектра неустойчивости по обе стороны от основной волны. По мере возбуждения спектра неустойчивости наблюдаются модулирование основной моды. При определенных условиях наблюдается значительные всплески амплитуды основной волны.

Ниже приведены результаты численного моделирования, проведенного при разных уровнях надпороговости. Количество мод N взято равным 100. При уровне надпороговости $u_{00} - \delta = 0,2$, или, что то же самое, при декременте поглощения $\delta = 0,80$ (так как $u_{00} = 1$) имеем следующую картину эксперимента:

При начальных значениях наблюдается одна основная мода и в результате нелинейного взаимодействия начинается медленный, но ускоряющийся рост спектра неустойчивости. Значения амплитуд мод неустойчивости на данном этапе мало, поэтому не оказывает существенного влияния на основную волну. Основная волна имеет вид синусоиды, огибающая основной волны имеет вид прямой линии, т.к основная волна не модулирована. При этом малы уровень дефектности структуры $D = \frac{2}{u_0^2} \sum_{m>0} u_m^2$ и уровень интенсивности

спектра $I_s = 2 \sum_{m>0} u_m^2$, а интенсивность основной волны $I_0 = u_0^2$ близка к единице.

При дальнейшем моделировании производная амплитуд мод спектра неустойчивости по времени достигает своего максимума, быстро формируется спектр амплитуды возбужденных мод, которые достигают значений, достаточных для эффективного воздействия на основную волну (рис.2.1-2.2). Моды возбуждаются по обе стороны от основной моды. На данном этапе спектр широкий, амплитуда возбужденных мод составляет 1-5 % от амплитуды основной, однако их взаимодействие приводит к отклонениям вида основной волны на 15-20% от правильной синусоидальной формы. При данном процессе наблюдается рост уровня дефектности D .

На следующем этапе развитии процесса ($t > 100$) наблюдается сужение спектра модуляционной неустойчивости с одновременным увеличением амплитуды возбужденных мод (рис.2.3). Производная крайних мод спектра принимает отрицательное значение, максимум спектра смещается в сторону основной моды. Далее скорость изменения амплитуды возбужденных мод уменьшается и система выходит на квазиустойчивое состояние. Увеличение амплитуды возбужденных мод приводит к более выраженному воздействию на основную волну (рис. 2.4). В результате такого воздействия всплески амплитуды последней могут превышать начальную амплитуду в 1,5-1,7 раза.

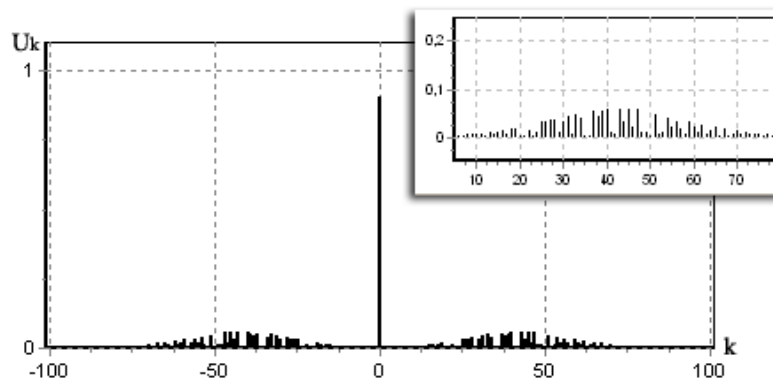


Рис. 2.1. Возбуждение широкого спектра неустойчивости ($t \approx 50, \delta = 0,80$)

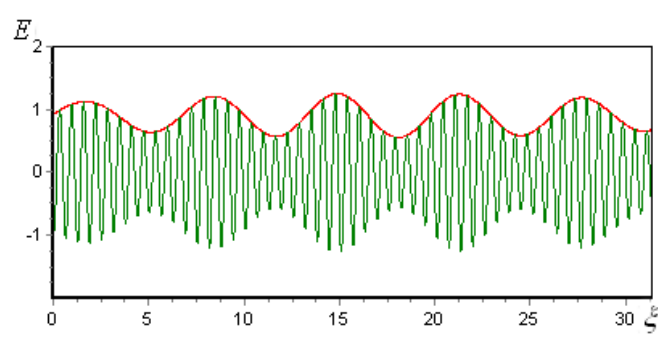


Рис. 2.2. Основная волна, промодулированная модами возбужденного спектра ($t \approx 50, \delta = 0,85$)

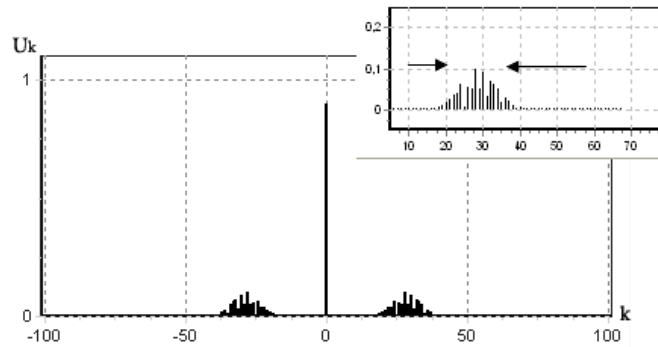


Рис. 2.3. Спектр неустойчивости на заключительной стадии развития ($t \approx 300, \delta = 0,80$)

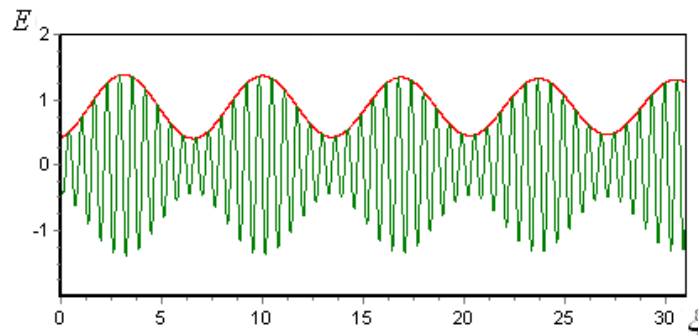


Рис. 2.4. Вид основной волны на заключительной стадии развития спектра неустойчивости ($t \approx 300, \delta = 0,80$)

Интегральные и локальные характеристики процесса неустойчивости. Рассмотрим детально процесс формирования спектра и выход системы на квазилинейную стадию в терминах интенсивности мод: Как видно из рис. 2.5, 2.6 интенсивность основной моды на начальных стадиях процесса заметно уменьшается и при значении $t \approx 100$ приближается к значению δ . Значения уровня надпороговости $(1-\delta)$ ограничивают снизу интенсивность основной моды. Во время уменьшения интенсивности основной моды начинает расти интенсивность спектра возбуждаемых мод, так же приближаясь к верхней границе, значение которой зависит от параметра δ .

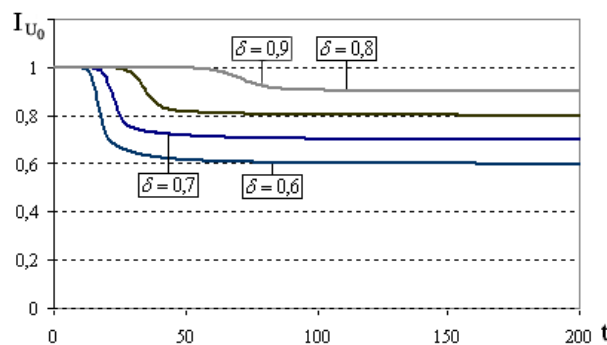


Рис. 2.5. Интенсивность основной моды $I_0 = u_0^2$ на линейной стадии процесса

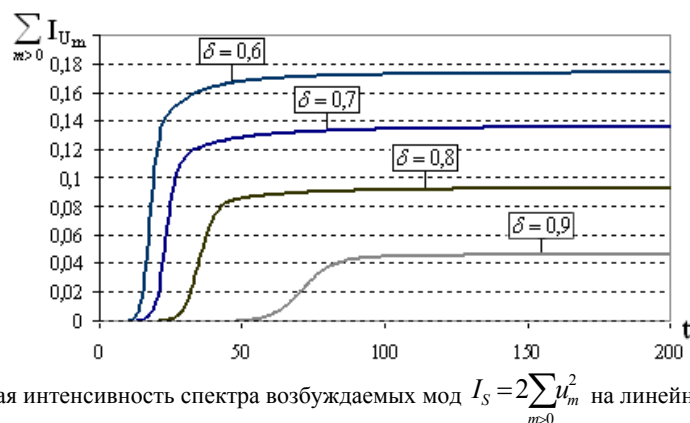


Рис. 2.6. Суммарная интенсивность спектра возбуждаемых мод $I_S = 2 \sum_{m>0} u_m^2$ на линейной стадии процесса

При этом суммарная интенсивность не превышает единицы (рис.2.7), и с развитием неустойчивости уменьшается, ограничиваясь снизу значениями, зависящими от параметра δ .

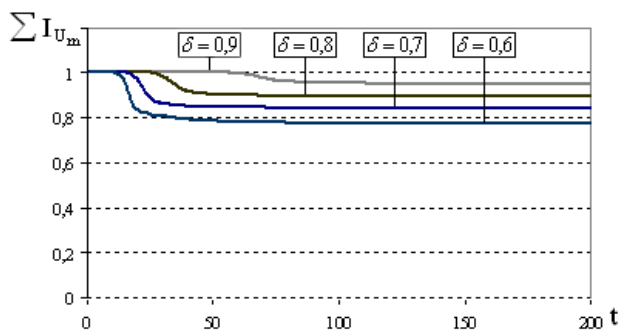


Рис. 2.7. Суммарная интенсивность структуры

При рассмотрении системы на временах перехода в квазилинейную стадию, можно получить зависимость интенсивности мод от значения параметра δ .

Формирование долгоживущего квазиустойчивого состояния. В режиме развитой неустойчивости дальнейшее изменение интенсивности не происходит. Можно считать, что нелинейная, а точнее квазилинейная стадия неустойчивости проявляет себя в условиях, когда интегральные характеристики процесса практически не меняются. При этом скорости изменения амплитуд мод резко уменьшаются. Неизменное значение общей интенсивности системы мод, при крайне медленном изменении внутренней её структуры на квазилинейной стадии процесса позволяет говорить о формировании квазиустойчивого долгоживущего физического состояния. Важно отметить, что монотонное уменьшение количества мод спектра, которое наблюдается на квазилинейной стадии процесса эволюции такого состояния фактически соответствует уменьшению возбужденных степеней свободы.

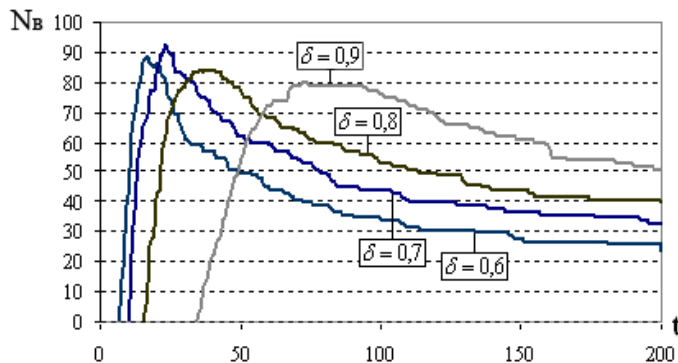


Рис. 2.8. Количество возбужденных мод спектра неустойчивости.

Из рис. 2.8 видно, что на начальной стадии возбуждается набор мод, состоящий более чем из 70% мод начального спектра, причем максимальное количество мод возбуждается в области перехода в квазилинейную стадию. Мода считалась возбужденной, если ее амплитуда превышала 0,1% от начального уровня основной моды. Скорость изменения амплитуды моды со временем уменьшается, но продолжает быть значимой. В результате конкуренции, амплитуда мод на периферии спектра уменьшается практически до нуля, а амплитуда части мод в центре спектра увеличивается. Таким образом, на квазилинейной стадии спектр в целом сужается,

количество степеней свободы - возбужденных мод уменьшается, то есть можно говорить об уменьшении значений характерных величин, связанных с энтропией системы в целом. Производная амплитуд периферийных мод спектров от времени принимает отрицательное значение, спектры как целое смещаются в сторону волнового числа основной моды. Далее скорость изменения амплитуды возбужденных мод уменьшается, и система выходит на квазилинейный режим неустойчивости.

При слабом превышении порога неустойчивости $\delta \geq 0,7$ интегральные показатели ведут себя аналогично соответствующим показателям простой модели, что подтверждает справедливость сделанных ранее допущений о возможности пренебрежения взаимодействием мод внутри спектра при слабом превышении порога неустойчивости, а также дает оценку границе применимости простой модели $\delta \geq 0,7$.

Увеличение амплитуды возбужденных мод приводит к более выраженному воздействию на основную волну. В результате такого воздействия всплески амплитуды последней могут превышать начальную амплитуду в 1,5-1,7 раза, а среднюю, более чем в 2,5 раза.

Моделирование нелинейной стадии модуляционной неустойчивости вдали от порога. В случае существенного превышения порога неустойчивости $\delta \leq 0,7$ модель (34)-(37), (50), (51) учитывающая взаимодействия, между симметричными по отношению к накачке модами спектра ($k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$), выявляет качественно новые эффекты в процессе развития спектра неустойчивости. Речь идет об осцилляторном характере обмена энергией между основной волной и развивающейся структурой при модуляционной неустойчивости.

Рассмотрим модуляцию основной волны при сильном превышении порога неустойчивости. Учет взаимодействий между модами возбуждаемого спектра позволяет рассмотрение модели в области сильного превышения порога неустойчивости $\delta = 0,4$. Результаты расчетов изображены на рис. 2.9 - рис. 2.11. В данной области параметров интенсивность развитого спектра неустойчивости выше в сравнении с областью слабой надпороговости ($\delta \geq 0,7$). Т.к. более интенсивный спектр сильнее воздействует на основную волну, то возможно появление более выраженных всплесков огибающей.

При многократном моделировании процесса было отмечено, что на начальной стадии развитой модуляционной неустойчивости возможно появление значительных всплесков амплитуды основной волны. При возбуждении спектров мод с неизбежностью возникают интерференционные эффекты, состоящие в реализации всплесков модуляции волнового движения и в появлении значительных амплитуд отдельных волн. Вопрос в том, являются ли эти эффекты проявлением случайного характера интерференции мод или они детерминированы.

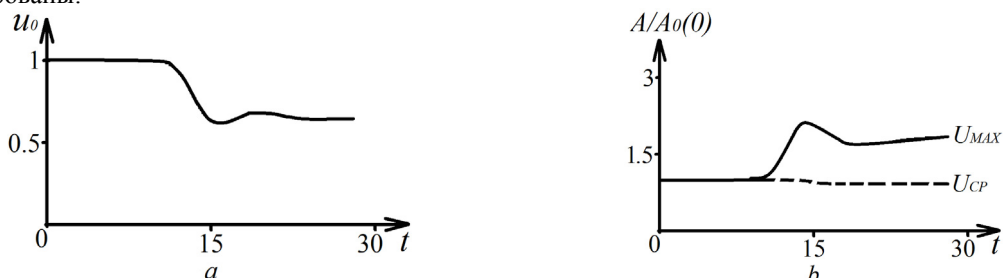


Рис. 2.9. Поведение амплитуды основной волны со временем (а), максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случая $\delta = 0,4$, $N = 200$

Выше отмечалось, что из-за развития неустойчивости поведение мод возбуждаемого спектра управляется накачкой, которой в данном случае является волна большой амплитуды. В большинстве случаев при реализации подобных многомодовых процессов, даже если взаимодействием неустойчивых мод можно пренебречь, влияние накачки на каждую отдельную моду спектра неустойчивости может оказаться велико. Поэтому интерференция в подобных случаях носит вынужденный характер, навязанный накачкой. Случайность проявляется лишь в той степени, насколько случайным было распределение фаз мод спектра неустойчивости в начальный момент.

При данных условиях также можно наблюдать сужение спектра неустойчивости

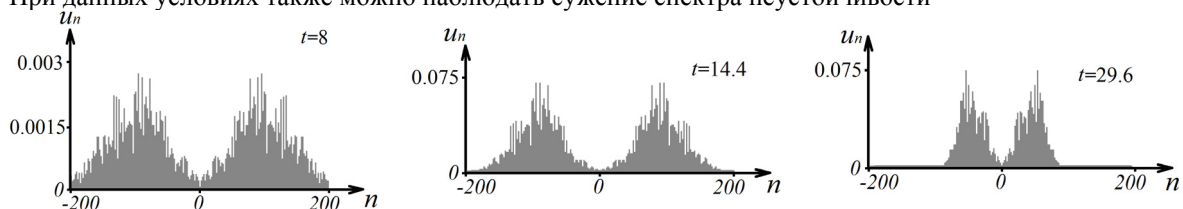


Рис. 2.10. Поведение спектра неустойчивости для трех моментов времени ($\delta = 0,4$, $N = 200$).

Представляют также интерес зависимости изменения энергии спектра мод $\sim \sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной

волны $\sim u_0^2$ от времени в процессе развития неустойчивости, представленные на рис. 2.11.

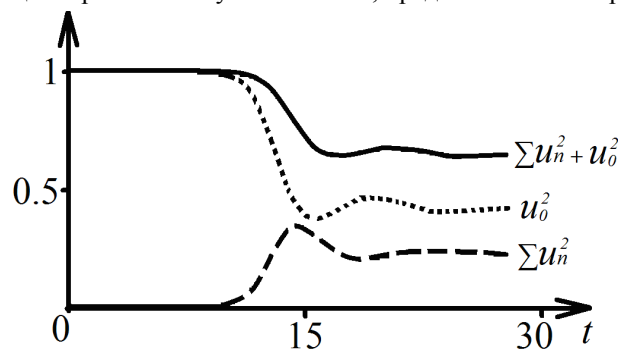


Рис. 2.11. Изменение энергии спектра мод $\sim \sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны $\sim u_0^2$ и их суммы от времени ($\delta=0,4, N=200$).

Неустойчивости волны большой амплитуды в 2D модели Лайтхилла [63]. В системе (57)-(63) разрешены возбуждение спектров мод с волновым вектором, составляющим ненулевой угол с волновым вектором основной волны.

Процесс возбуждения двумерного спектра неустойчивости представлен на рис. 2.12a) представляет спектр неустойчивости на начальной стадии развития - широкий, с небольшими ($u_k < 0,05$) значениями амплитуд мод. В процессе развития, спектр сужается, при этом амплитуда возбужденных мод увеличивается (рис. 2.12b)).

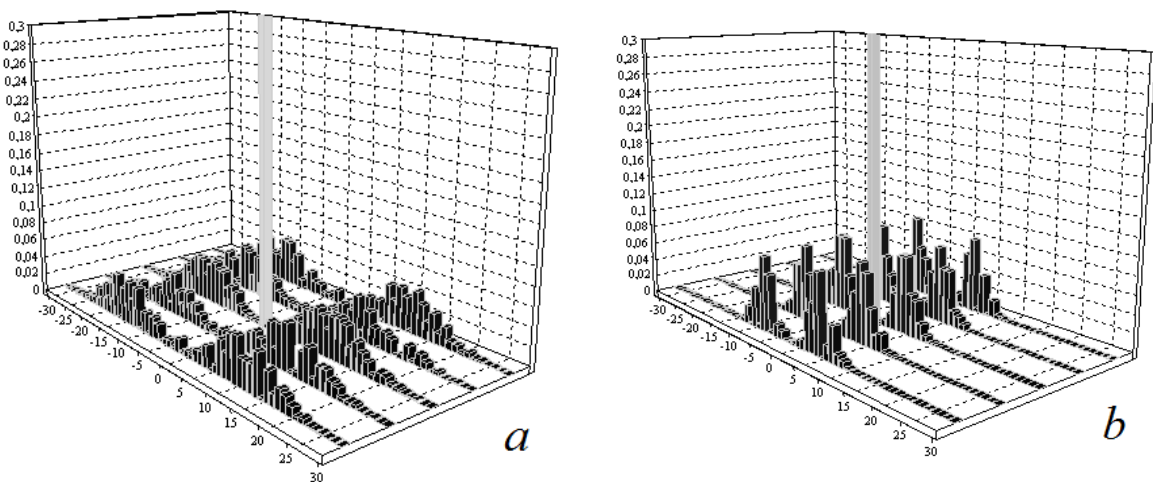


Рис. 2.12. Двумерный спектр неустойчивости квазимонохроматической волны

В результате численного моделирования получены трехмерные картины огибающей поля для значений параметров $N=100, \delta=0,5, t=15$. На рис. 2.13a) показана мелкомасштабная картина огибающей основной волны, рис. 2.13b) иллюстрирует всплески огибающей поля в более крупном масштабе. Трехмерная визуализация этого волнового поля представлена на рис. 2.14.

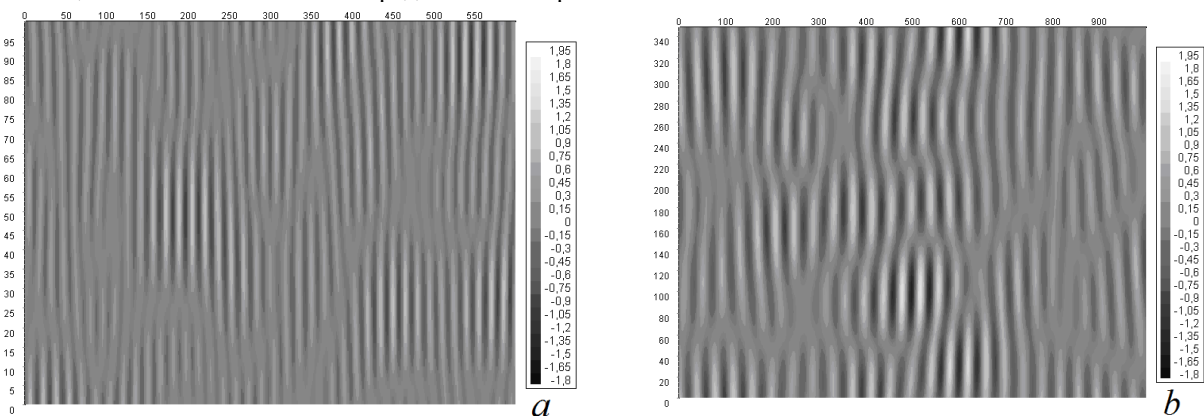


Рис. 2.13. Двумерная модуляция основной волны: а) мелкомасштабное представление, б) фрагмент

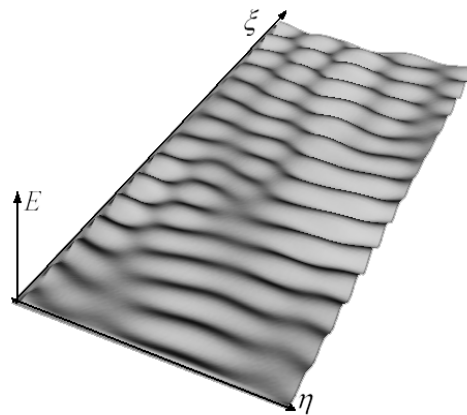


Рис. 2.14. Трехмерная визуализация поля огибающей, построенная на основании карты высот (рис. 2.13)

Можно убедиться в том, что учет даже малого угла между волновыми фронтами несколько увеличивает амплитуды больших волн, что было отмечено в работах [20-30].

Сравнение 1D моделей Лайтхилла в случаях применения S-теории и прямого вычисления уравнения (12). Рассмотрим систему уравнений (64) - (75), которая описывает оба обсуждаемых случая. Выше показано, что при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 0$ система уравнений отвечает случаю применения S-теории, при $\beta_{1L} = 1$ и $\beta_{2L} = 1$, система уравнений есть следствие модели (12), где нелинейное слагаемое вычисляется точно, без ограничений S-теории.

Вблизи порога неустойчивости характеристики процесса модуляции основной волны в двух случаях применения S-теории и прямого вычисления нелинейных слагаемых модели (12) практически идентичны.

На рис. 2.15 показаны зависимости изменения энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости.

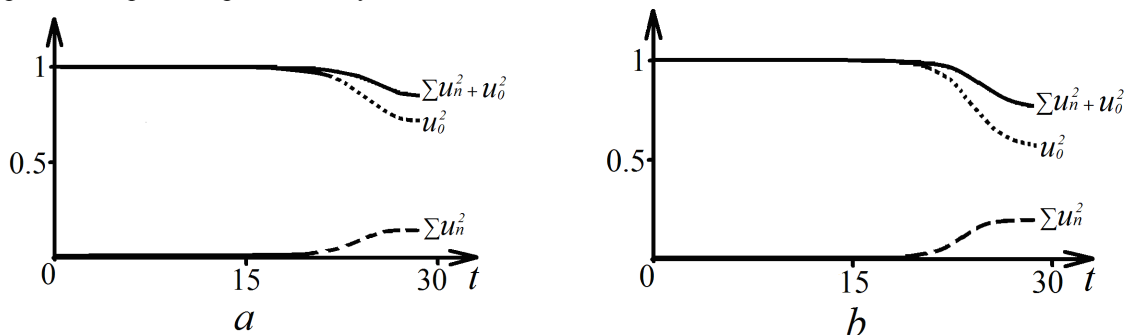


Рис. 2.15. Изменение энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени для

случаев применения S-теории (а) и прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,7, N = 200$

В случае применения S-теории (а) средняя амплитуда волн и максимальная амплитуда огибающей волнения несколько меньше, чем прямом вычислении модели (12) (b). Эта динамика представлена на рис. 2.16.

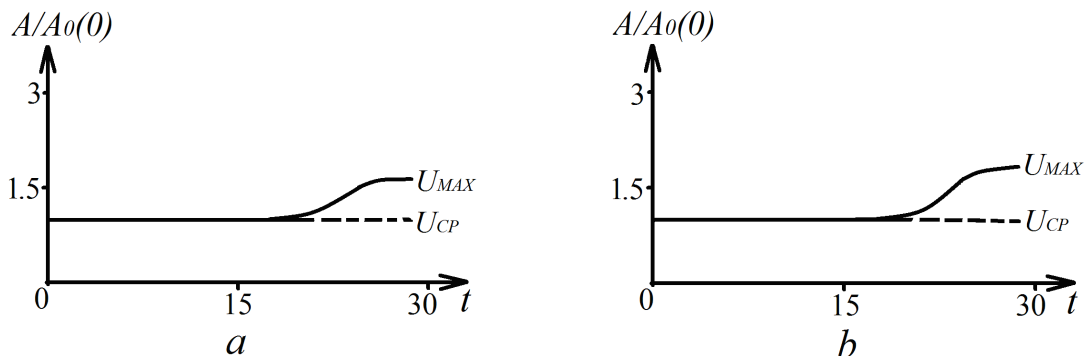


Рис. 2.16. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (а) и прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,7, N = 200$

Режим неустойчивости вдали от порога. Несколько больше отличий в развитии неустойчивости при описании в рамках S-теории (а) и в случае прямого вычисления модели (12) при малых уровнях поглощения, вдали от порога. Так, характерные времена модуляции амплитуды основной волны при уровне поглощения $\delta = 0,1$ при учете всех видов взаимодействия мод становятся менее регулярными (рис. 2.17).

Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ и энергии основной волны u_0^2 от времени в процессе развития неустойчивости, представлены на рис. 2.18. Уже явно заметен осцилляторный характер обмена энергией между основной волной и спектром неустойчивых мод.

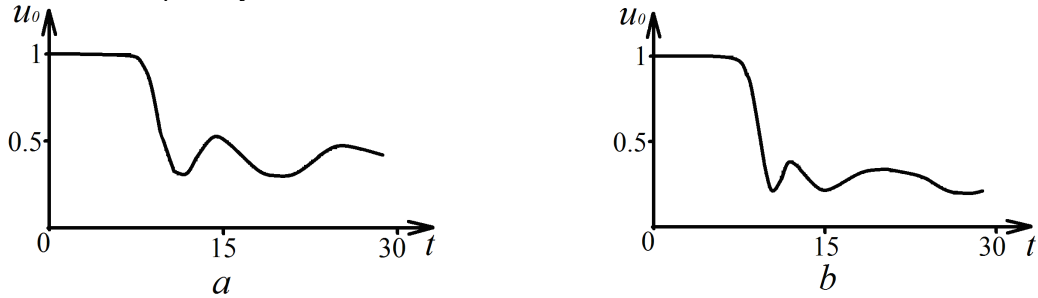


Рис.2.17. Поведение амплитуды основной волны со временем для случаев применения S-теории (а) и прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,1, N = 200$

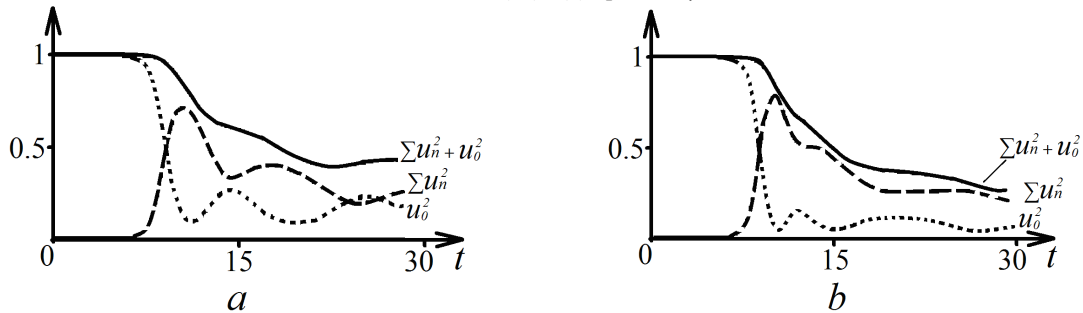


Рис. 2.18. Зависимости энергии спектра мод $\sum_{m \neq 0} u_m^2$, энергии основной волны u_0^2 и их суммы от времени для случаев применения S-теории (а) и прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,1, N = 200$

Максимумы амплитуды огибающей в обоих случаях достигаются практически в одно время и примерно равны друг другу, что можно увидеть на рис. 2.19.

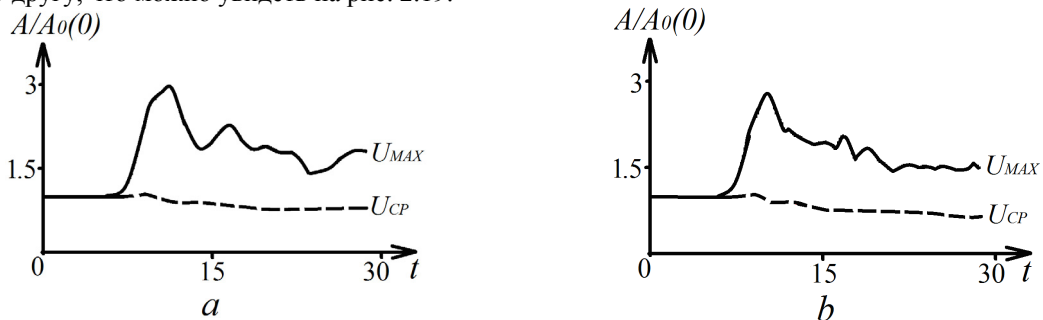


Рис. 2.19. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (а) и прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,1, N = 200$

Изменяется и поведение спектра неустойчивости. Характерный для модуляционной неустойчивости двугорбый спектр в случае описания в рамках S-теории (а) сужается, а при более общем описании, то есть в случае прямого вычисления модели (12) (b) наблюдается противоположная тенденция к расширению. Времена рассмотрения спектра выбраны на линейной по амплитудам возмущений стадии процесса, в момент достижения максимальной амплитуды огибающей волнового поля и в стадии развитой неустойчивости (рис. 2.20).

В условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Из рис. 2.19 видно, что на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. В дальнейшем происходит снижение амплитуды основной волны (рис. 2.18) и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется и их амплитуда заметно уменьшается.

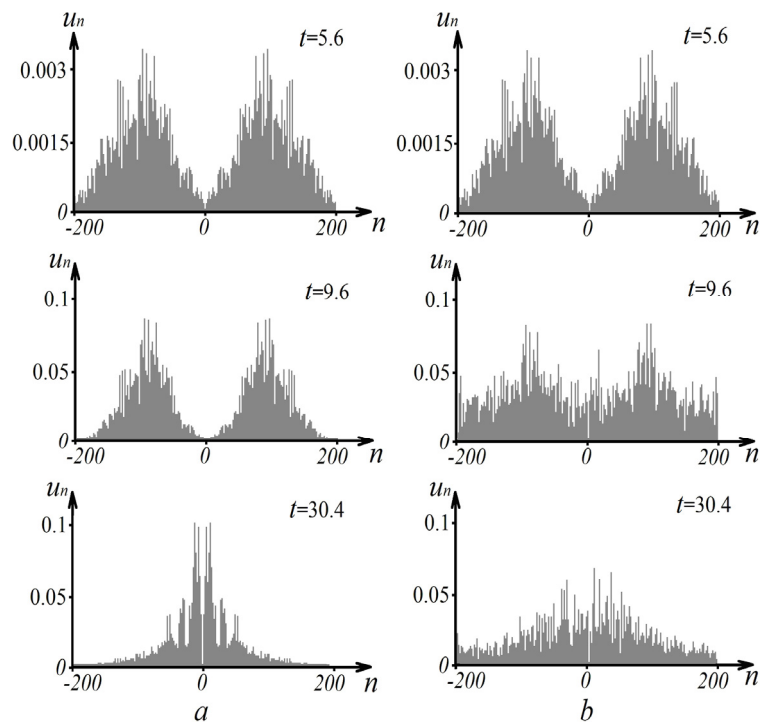


Рис. 2.20. Спектры неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и в случае прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,1$, $N = 200$

Характер модуляции основной волны в пространстве (фрагмент вблизи области с максимальной амплитудой огибающей) для тех же моментов времени для этих двух случаев описания неустойчивости, представленный на рис. 2.21.

Таким образом, созданная авторами [58-62] и модифицированная в работах [46, 63-65] S-теория позволяет с достаточной степенью точности описывать начальную стадию нелинейного режима процесса модуляционной неустойчивости в модели Лайтхилла, позволяя количественно оценить максимальную амплитуду огибающей поля волн, время появления максимума огибающей и энергию, сосредоточенную в спектре возмущений.

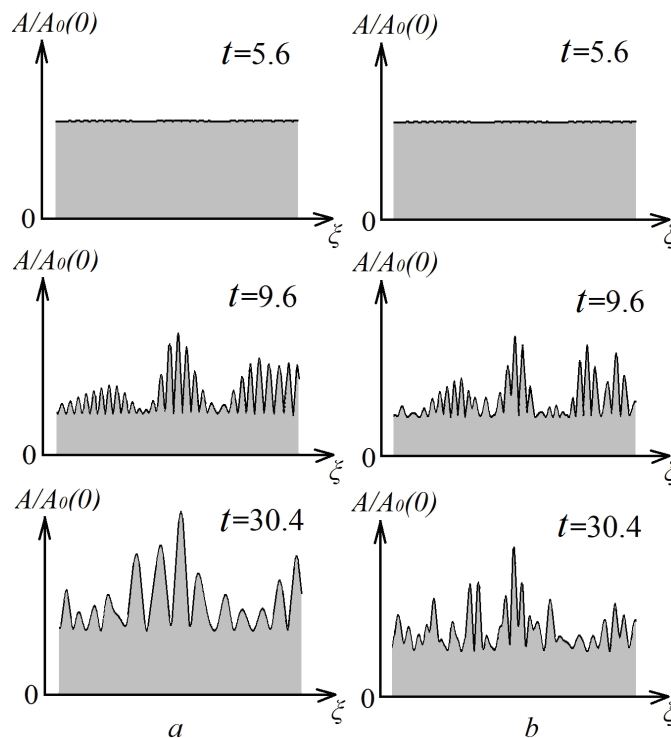


Рис. 2.21. Модуляция основной волны для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и в случае прямого вычисления модели (12) (b) при $\delta = 0,1$, $N = 200$

2.2. Численное моделирование модуляционной неустойчивости гравитационных волн на поверхности воды

Для анализа размахов волн (то есть, расстояния между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины), выделим из них треть наибольших. Найдем для каждого момента времени в области рассмотрения ($\zeta \subset L = 2\pi / (\Delta K / k_0) = \pi N / K_m = \frac{\pi N}{\sqrt{2} \cdot \alpha^{1/2}}$, где $\Delta K = \frac{2K_{Max}}{N}$, $\zeta = k_0 x$) средний размах всех волн

$H = U_{CP}$ и средние значения размаха трети самых больших $H = U_{SWH}$, а также самый большой размах волны из ансамбля $H = U_{Max}$.

Численный анализ динамики и статистические показатели при использовании S-теории. Расчеты проводились для 600 мод спектра, отношение декремента поглощения к величине максимального инкремента выбиралось равным δ . При этом для нормировки амплитуды основной волн на единицу на начальной стадии процесса был выбран уровень внешней накачки $G = \delta$. Для модели (100)-(104), построенной на основе S-теории, с уменьшением поглощения величина u_0^2 , определяющая энергию основной волны, уменьшается, а величина $\sum_{m \neq 0} u_m^2$, определяющая энергию спектров неустойчивости, растет. Это можно увидеть на рис. 2.22. и рис. 2.23.

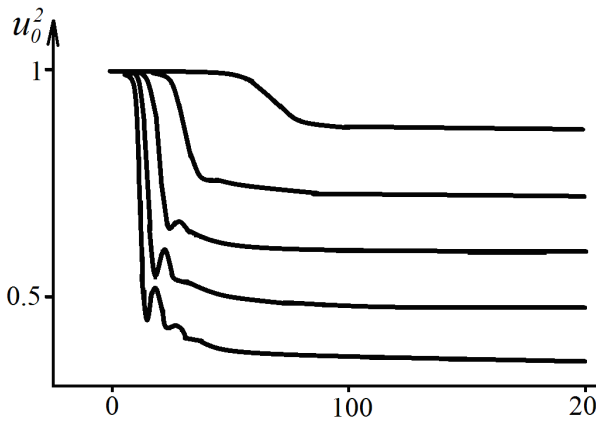


Рис. 2.22. Интенсивности основной волны u_0^2 при различных значениях параметра $\delta = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5$ сверху вниз ($N = 100$) как функции времени

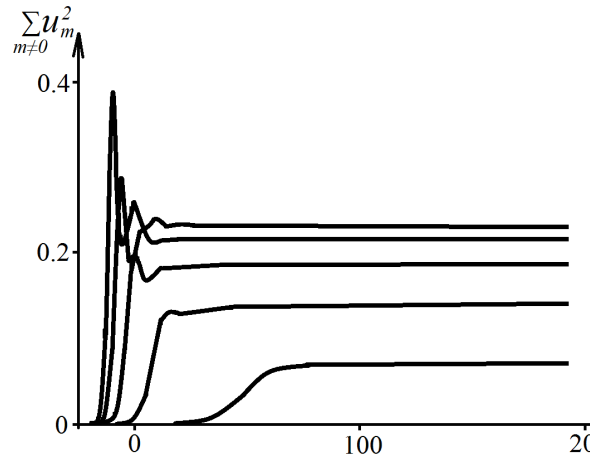


Рис. 2.23. Суммарные интенсивности мод спектра $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ неустойчивости при различных значениях параметра $\delta = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5$ снизу вверх ($N = 100$) как функции времени

Однако поскольку затухание гравитационных волн на поверхности океана мало, рассматривать случаи близкие к порогу неустойчивости не имеет смысла. Основное внимание уделим случаю, когда поглощение энергии волн достаточно мало: пусть отношение декремента поглощения к величине максимального инкремента выбиралось на уровне 0,1 (то есть $\delta = 0,1$). Результаты расчета для одной реализации начальных условий приведены на рис. 2.24. Прежде всего, следует отметить, что критерий, по которому выделяют anomalously большие волны, вида

$$U_{AG} > 2U_{SWH} \tag{116}$$

или подобный этому неоднозначен, ибо наибольшие амплитуды наблюдаются именно в начальной стадии развития неустойчивости, особенно при конечном затухании. Тем не менее, волны заметно меньших амплитуд или размахов в режиме развитой неустойчивости также подпадают под этот критерий, так как со временем наблюдается снижение как средних, так и больших амплитуд волн.

На рис. 2.25 приведен волновой пакет, амплитуда наибольшей волны которого соответствует критерию (2.1)

С уменьшением уровня поглощения δ процессы обмена энергией между спектром и основной волной усиливаются. Вид спектра при этом несимметричный (рис.2.26). Можно убедиться, что при уменьшении амплитуды основной волны на начальной стадии неустойчивости, происходит смещение максимума инкремента неустойчивости в сторону меньших значений K . При этом, так как максимуму инкремента соответствует значение суммарной фазы $2\phi_0 - \phi_K - \phi_{-K} = \Phi_K$, равное $\pi / 2$, то происходит синхронизация этих

фаз [64-65] для большинства мод с различными значениями K . Тот факт, что интегральные фазы Φ_K спектра неустойчивости сосредотачиваются вблизи $\pi/2$ создает условия практически однотипного взаимодействия многих пар мод с основной волной. Это коллективное взаимодействие мод спектра с основной волной и поясняет природу интенсивных осцилляций интенсивности основной волны и спектра в начальной стадии неустойчивости.

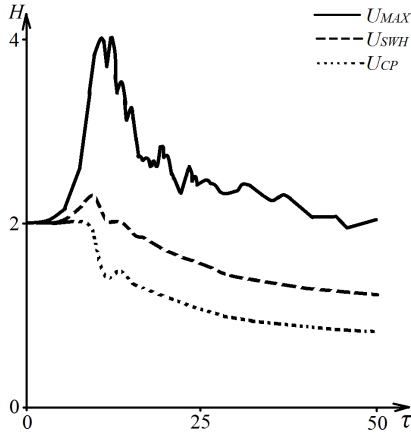


Рис. 2.24. Размах волн (расстояние между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины) как функция времени $\tau \propto 10$: средний для всех волн U_{CP} , средний для трети самых больших волн U_{SWH} , максимальный для каждого момента времени U_{Max} [45]

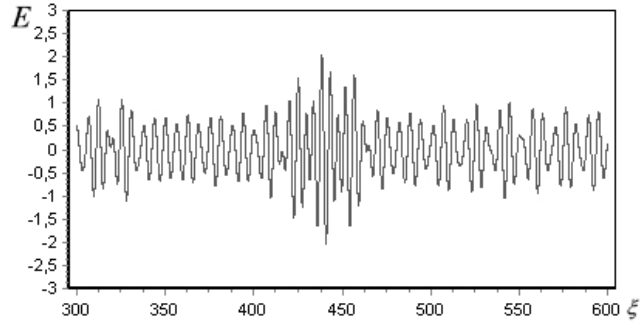


Рис.2.25. Локальный всплеск волнового поля E , превышающий средний размах трети самых больших волн более чем в 2 раза ($N = 300, \tau = 10.2$)

Позднее разброс интегральных фаз увеличивается и обмен энергией между основной волной и спектром ослабляется. Вследствие того, что фазы отдельных мод ϕ_K сохраняют случайное распределение (в частности, не имеют место симметрии вида $\phi_K = \phi_{-K}, \phi_K = -\phi_{-K}$), то в каждой реализации синхронизированный с основной волной спектр неустойчивости формирует различную интерференционную структуру. Тем не менее, интенсивность интерференции мод спектра в начальной стадии оказывается наибольшей. Кстати, фазовая синхронизация за счет выбора симметричных начальных фаз взаимодействующих мод спектра модуляционной неустойчивости интенсивной волны или симметризация самих уравнений, обычно приводили к режимам с обострением. Отсутствие же симметрии фаз в парах взаимодействующих волн способно ослабить интенсивность интерференционных всплесков и сократить время их существования. Рассматривая динамику спектра неустойчивости в проведенных в данной работе расчетах, можно обнаружить явление значительного его сдвига по отношению к спектральной области линейной неустойчивости.

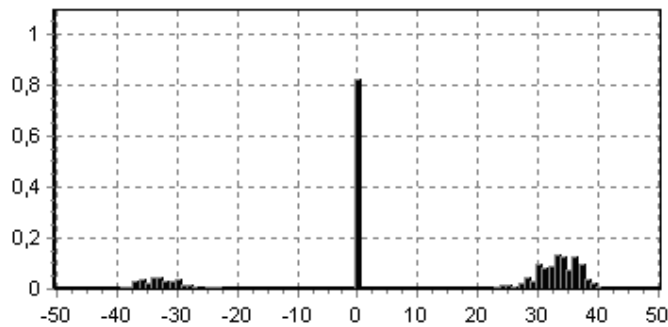


Рис. 2.26. Вид несимметричного спектра неустойчивости

Этот сдвиг обусловлен снижением амплитуды основной волны. Кроме этого следует отметить, что амплитуды отдельных мод спектра остаются много меньше амплитуды основной волны. Отметим также несимметричность спектра относительно основной волны, что обусловлено сильной дисперсией и достаточно большой величиной инкремента модуляционной неустойчивости для волн большой амплитуды. Из анализа спектров можно увидеть, что в режиме развитой неустойчивости в условиях конечного поглощения длина модуляции на больших временах увеличивается почти в 3,5 раза. Поведение относительной характерной длины модуляции представлено на рис. 2.27. Динамика двумерных волновых процессов оказывается подобной. Таким

образом, количество волн на длине модуляции в начальной стадии развитой неустойчивости значительно меньше, чем на поздних стадиях процесса.

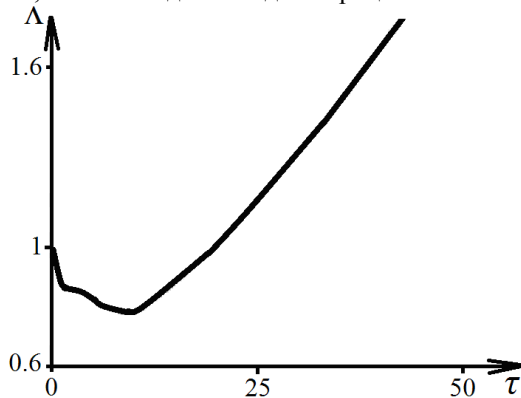


Рис. 2.27. Поведение относительной характерной длины модуляции $\Lambda \approx 2\pi / \Delta K$ в процессе неустойчивости

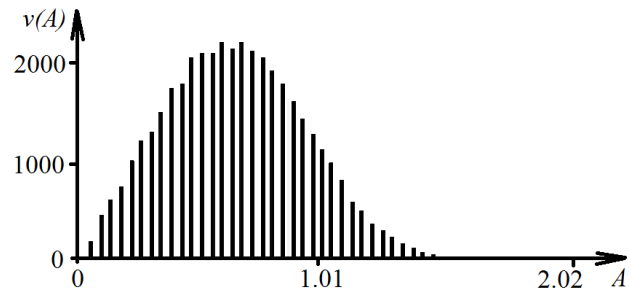


Рис. 2.28. Частота появления волн разной амплитуды $v(A)$ в численных экспериментах при разных реализациях процесса в момент времени $\tau \propto 10$

Анализируя частоту появления аномальных волн в разных реализациях процесса, найдем, что одна такая волна появляется среди 10^4 волн, что качественно соответствует известным наблюдениям и не противоречит статистическим оценкам (рис. 2.28). Однако в условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Легко видеть (рис. 2.24), что только на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. При развитии процесса происходит снижение амплитуды основной волны и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется. Амплитуды больших волн даже удовлетворяющих критерию (116), также заметно снижаются.

Таким образом, появление аномальных волн весьма большой амплитуды характерно для начальной стадии развитой модуляционной неустойчивости. С развитием неустойчивости средние и максимальные значения волн для данного уровня поглощения ($\delta = 0,1$) заметно убывают (рис. 2.24).

Однако, согласно принятому критерию (116), даже в этих условиях можно выделить аномально большие волны, хотя их амплитуда уже при $\tau \propto 30$ в полтора-два раза меньше, чем в наиболее интересном случае самых больших подобных волн при $\tau \propto 10$. На длине модуляции в начальной стадии процесса укладывается несколько волн, одна из которых может в отдельных реализациях оказаться аномально большой. В режиме развитой неустойчивости количество волн на длине модуляции возрастает в три-четыре раза. Частота появления волн (одна аномальная волна на 10^4 волн) в численном эксперименте качественно соответствует известным наблюдениям.

Сравнение 1D моделей в случаях применения S-теории и более общего описания, когда учитываются все виды взаимодействия мод в модели (77). В реальных условиях поглощение энергии гравитационных волн большой амплитуды весьма мало. Поэтому рациональным будет сравнение двух моделей описания проводить для более реалистичного случая малого поглощения $\delta = 0,01$ и значительной амплитуды

волнения $\Delta = \frac{0,566}{N}$; $\alpha = 0,01$. На рис. 2.29-3.34 приведем результаты расчетов, демонстрирующие развитие спектра неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае, когда учитываются все виды взаимодействия мод в уравнении (77) вида $\{|A|^2 A\}$ (b).

Легко видеть формирование характерного двугорбого спектра (рис. 2.29) модуляционной неустойчивости. Если в случае описания в рамках S-теории такая форма спектра сохраняется, то в общем случае описания, когда удерживаются все нелинейные слагаемые уравнения (77), спектр с развитием неустойчивости сглаживается. На рис. 2.30 показан характер изменения амплитуды основной волны в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае (b).

Можно видеть, что нерезонансные взаимодействия, для которых не выполнены соотношения S-теории, приводят к срыву осцилляторного режима поведения амплитуды основной волны, характерного для режима резонансного взаимодействия, описываемого S-теорией [64]. Динамика изменения средней амплитуды U_{CP} , средней амплитуды трети наибольших мод U_{SWH} и максимальных в текущий момент мод представлена на рис. 2.31. Кружками отмечено появление волн аномального размаха U_{AG} , которые удовлетворяют соотношению (116), то есть $U_{AG} > 2U_{SWH}$.

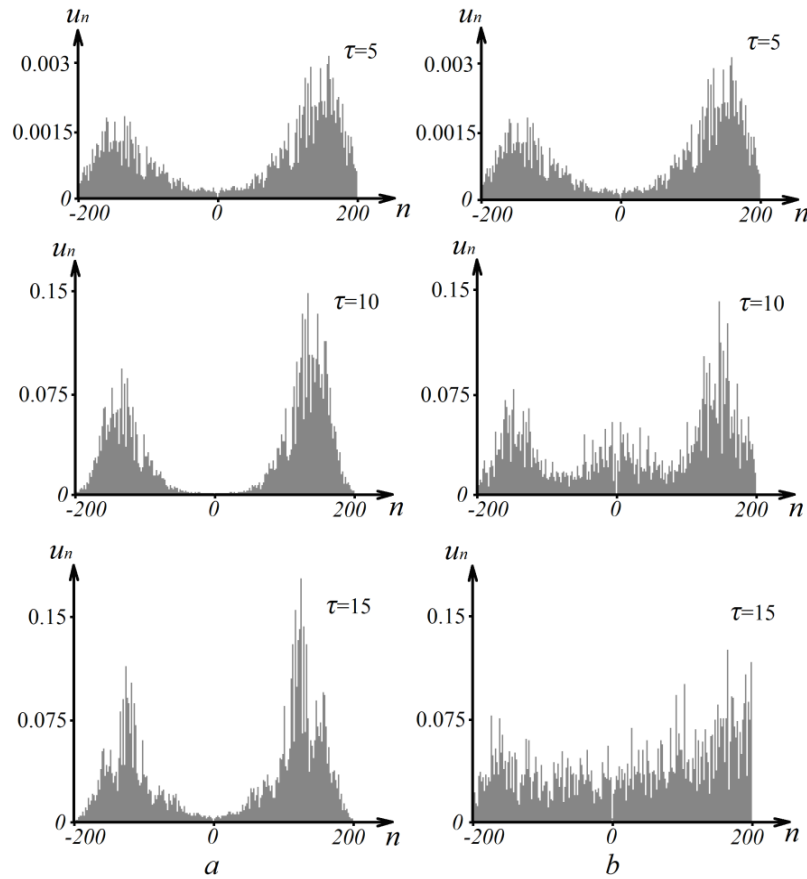


Рис. 2.29. Спектр неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (б), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{|A|^2 A\}$

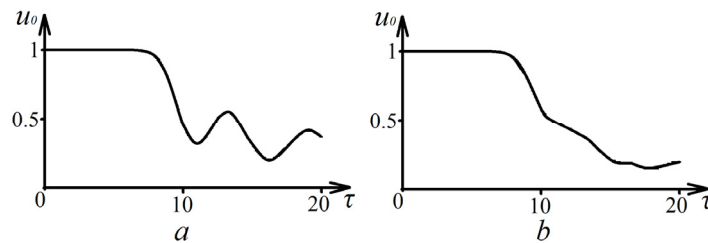


Рис. 2.30. Изменение амплитуды основной волны со временем. а) В случае описания в рамках S-теории и б) в общем случае, когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{|A|^2 A\}$

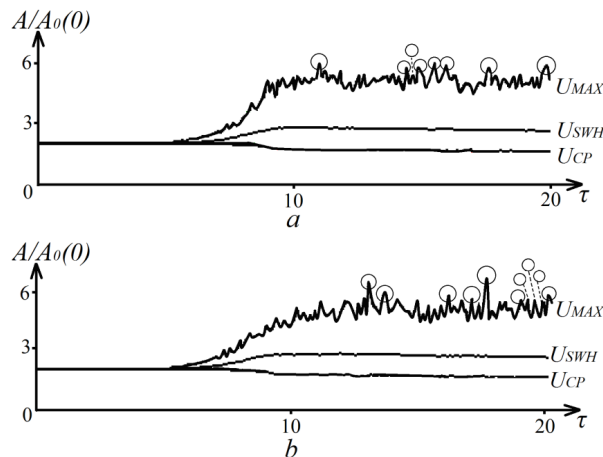


Рис. 2.31. Средняя амплитуда U_{CP} , средняя амплитуда трети наибольших мод U_{SWH} и самый большой размах волны из ансамбля U_{Max} , как функции времени. Кружками отмечено появление волн аномальной амплитуды U_{AG} в рамках S-теории (а) и в общем случае (б), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{|A|^2 A\}$

Распределения амплитуд размахов H , то есть расстояний между верхней точки гребня волны и нижней точкой впадины, в режиме развитой неустойчивости в один момент и за все время расчетов представлены на рис. 2.32 и рис. 2.33 в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (b), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{A^2 A\}$. Подсчет волн происходил в одном и том же варианте расчета через моменты времени, равные времени жизни аномально большой волны. То есть, в отличие от случая, представленного на рис. 2.24, где волны с разными амплитудами подсчитывались в многочисленных расчетах. Важно отметить, что в двух этих случаях частоты появления аномальных волн в статистике по ансамблям и по времени в обоих моделях описания океанского волнения практически не отличаются. Одна такая волна возникает среди 15-20 тысяч волн.

Характер распределения размахов подобен обсуждаемому в работе [64] где их число подсчитывалось в разных реализациях, и величины усреднялись по ансамблю реализаций. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды в этих двух случаях представлены в табл. 2.1. Следует обратить внимание на наличие выраженных «хвостов» распределений в обоих случаях.

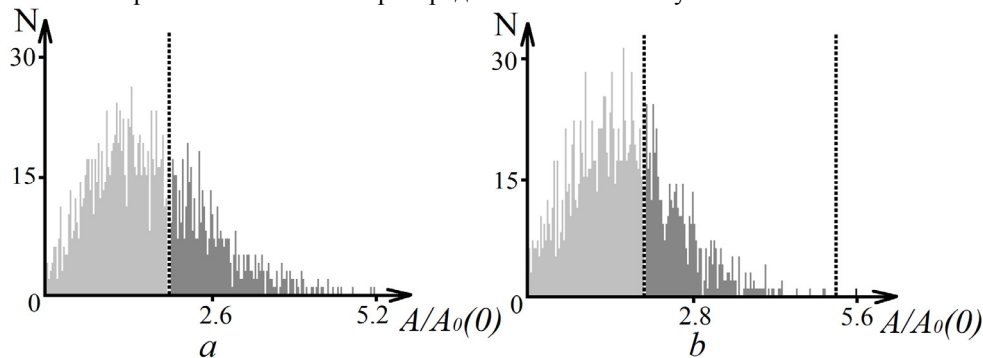


Рис. 2.32. Распределение амплитуд размахов в момент времени $\tau = 20$ в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (b), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{A^2 A\}$. Пунктирные линии определяют границу между модами малой амплитуды и третью самых больших мод и величиной, в два раза превышающей среднее значение от трети самых больших мод

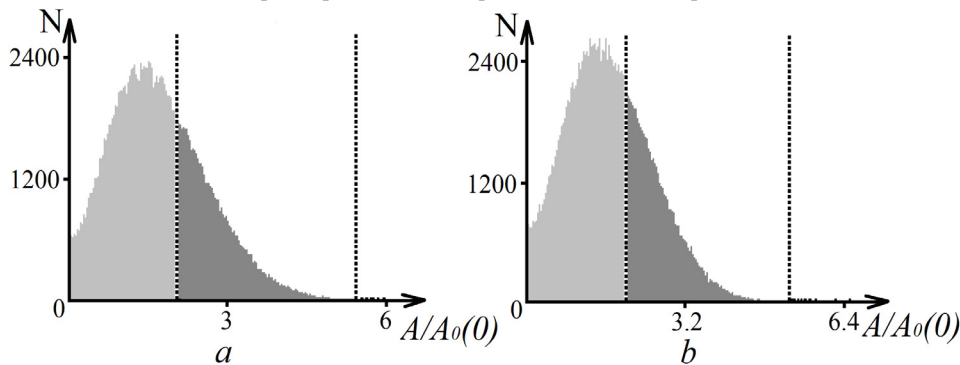


Рис. 2.33. Распределение амплитуд размахов за все время расчетов в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (b), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{A^2 A\}$, а) - всего размахов 173526, треть наибольших размахов 57842, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 8, б) - всего размахов 176386, треть наибольших размахов 58795, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 10

Таблица 2.1

Аномальные размахи		
значение $U_{AG} / 2U_{SWH}$	случай а: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$	случай б: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$
от 2 до 2,1	4	7
от 2,1 до 2,2	2	1
от 2,2 до 2,3	2	-
от 2,3 до 2,4	-	1
от 2,4 до 2,5	-	1
всего	8	10

Анализ наблюдений и численных экспериментов показывает [20-30], что аномальные волны часто возникают в составе группы волн, имеющих форму солитоноподобных образований. И в данном случае такие волны появляются именно в составе групп достаточно больших волн, причем в общем случае характерная длина модуляции оказывается меньше, чем при описании в рамках S-теории.

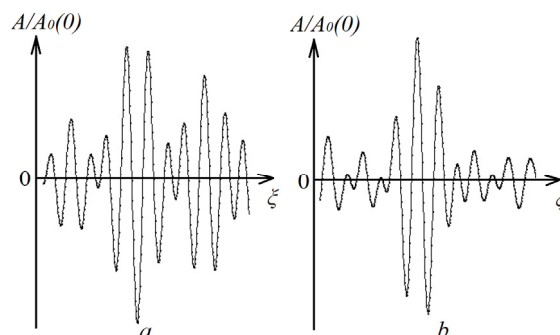


Рис. 2.34. Характерный вид аномальных волн в составе групп волн в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае (б), когда учитываются все виды взаимодействия мод в нелинейном слагаемом уравнения (77) вида $\{|A|^2 A\}$.

2.3. Применение моделей

Модуляционные неустойчивости колебаний со слабой дисперсией в частности в случае генерации мощных продольных и квазипоперечных волн в плазменных волноводах, способны формировать амплитуды огибающих волновых пакетов более чем в три раза превосходящие средние их значения. В условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой возможно в основном на начальной стадии нелинейного режима процесса. В дальнейшем происходит снижение амплитуды основной волны и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется.

Для описания процессов модуляционной неустойчивости вполне корректной является модель описания на основе S-теории, что подтверждено сравнением результатов, полученных в рамках этой модели и в случае более общего описания, учитывающего все виды (диаграммы) взаимодействия мод спектра. Тем более, что отличия этих двух подходов можно увидеть на больших временах развития процесса, где появление аномально больших амплитуд модуляции практически не наблюдается.

Одной из актуальных проблем безопасности судоходства и нефтегазодобычи в океанах и морях является определение условий появления интенсивных поверхностных волн, способных привести к крупным катастрофам и авариям. Ранее появление таких волн считалось достаточно редким, и учитывать их появление и воздействие не считали нужным. Однако с развитием судоходства и появления индустрии морской добычи полезных ископаемых на границах шельфа появились многочисленные свидетельства появления таких аномальных волн.

Первым надежным инструментальным свидетельством появления такой аномальной волны считаются показания приборов на нефтяной платформе "Дропнер", расположенной в Северном море. Первого января 1995 года при значимой высоте волн 12 метров внезапно возникла 26-метровая волна (высота было точно измерена лазерным радаром, установленным на платформе).

По внешнему виду аномально высокие волны (экстремальные волны, rogue waves, abnormal waves, exceptional waves, giant waves, steep wave events) на поверхности глубокой воды (это т.н. гравитационные поверхностные волны, длина такой волны много меньше глубины океана, кстати, с уменьшением глубины скорость волны замедляется) делятся на три основных типа: "белая стена", "три сестры" (группа из трех волн), одиночная волна ("одиночная башня"). Высота волны обычно указывается именно как расстояние от высшей точки гребня до низшей точки впадины. Ширина цуга гигантских волн может достигать нескольких сотен метров до километра, что намного больше длины таких волн. В ряде случаев направление распространения таких волн, часто сбивающихся в группы по две-три волны отличалось от основного направления движения волн вплоть до десятков градусов.

Аномально высокими волнами считаются волны, высота которых более чем в два раза превышает значимую высоту волн. Значимая высота волн рассчитывается для заданного периода в заданном регионе. Для этого отбирается треть всех зафиксированных волн, имеющих наибольшую высоту, и находится их средняя высота. Есть и иные способы определения аномальных волн.

Большинство современных судов может выдержать до 15 тонн на квадратный метр и в случае даже сильного волнения это соответствует более чем двукратному запасу прочности, однако аномально большие волны способны вызвать давление до сотни тонн на квадратный метр [68]. Все это внушает беспокойство работникам морского транспорта. Поэтому предпринимаются попытки выяснить области образования, определить частоту возникновения таких волн и разработать способы предупреждения об их появлении. В течение трех недель в августе-сентябре 2001 года два европейских спутника ERS-1 и ERS-2 делали радарные снимки поверхности на пространстве между Латинской Америкой и Южной Африкой в рамках проекта MaxWave [69]. Было получено 30 тыс. фотографий, каждая из которых охватывала поверхность океана $10\text{км} \times 5\text{ км}$. На расшифровку и анализ полученных изображений ушло два года. На этом пространстве океана в течение трех недель было зафиксировано десять аномальных волн высотой более 25 метров. Вслед за MaxWave стартовал другой европейский проект - WaveAtlas, завершившийся в 2005 году. Созданы международные

организации, занимающиеся проблемами безопасности судов и морских сооружений, такие как International Association of Classification Societies.

На основании данных полученных со спутников удалось составить приблизительную карту, которая поможет судоводителям [70] избегать опасных районов. Европейцев волнует, прежде всего, восточное побережье Южной Африки, Бискайский залив и Северное море. Есть и другие опасные регионы – это южная часть побережья Латинской Америки. Сомневаясь в возможности раннего предупреждения, шведские специалисты рекомендуют создавать виртуальные карты Мирового океана с обозначением на них скользящих «треугольников смерти» - участков, где в определенное время года и при определенных условиях наиболее вероятно появление волн-убийц. Области морских течений рассматривались и ранее как области наиболее вероятного появления волн-убийц [71].

Авторы [29,70], полагали, что вероятность случайных возвышений морской поверхности $P(H)$ подчиняется Рэлеевскому распределению:

$$P(H) = \exp\left\{-2\frac{H^2}{H_s^2}\right\}, \quad (117)$$

где H_s - средняя высота-размах одной трети самых высоких волн. можно показать, что такие волны могут появляться довольно часто. Волной с амплитудой $2H_s$ по их расчетам будет примерно каждая из $3 \cdot 10^3 - 10^4$ волн (волны в океане вдали от берегов имеют длины вплоть до 100 метров и выше, а скорости порядка 10 м/с.), что не противоречило некоторым экспериментальным данным. Однако, если использовать значение этой вероятности, то для $3H_s$, получим, что волна такой высоты может наблюдаться один раз в 20 лет. Весьма часто появляющимися, в сравнении с оценкой (167) оказались волны с амплитудой превышающей $2H_s$. Однако по данным наблюдения проекта MaxWave морской поверхности из космоса наблюдалась волна с $A = H / H_s = 2,9$. За 793 часа наблюдений волн в Северном море зарегистрировано $A = 3,19$ [72]. Такая неожиданно частая регистрация экстремальных волн привела к необходимости серьезного пересмотра подходов к применимости классической статистической модели в области высоких волн.

Таким образом, чисто случайный механизм образования аномальных волн оказался не вполне корректным. Поэтому основное внимание было уделено другим механизмам, которые в большинстве своем основаны на результатах развития модуляционной неустойчивости гравитационных поверхностных волн на глубокой воде.

Преимущества данного описания в том, что оно не противоречит многим наблюдениям, поясняет формирование цугов волн в каждом из которых может быть несколько больших волн, объясняет короткое время жизни таких групп волн, и в целом показывает природу расширения масштаба и уменьшения амплитуды модуляции волнового движения в дальнейшем.

Полезным результатом данного исследования является выявление на начальной стадии модуляционной неустойчивости аномальных волн сверхвысокого размаха и амплитуды. Ибо в условиях слабого поглощения, энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. При этом только на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой значительно чаще, чем это следует из статистически обоснованных оценок. При развитии процесса происходит снижение амплитуды основной волны и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется. Снижаются также средние и максимально достижимые амплитуды волн. Согласно принятым критериям (превышения амплитудой аномальной волны в два раза средней амплитуды трети самых больших волн) на больших временах процесса можно также выделить аномально большие волны, хотя их амплитуда по абсолютной величине оказывается меньше, чем на начальной стадии развитой неустойчивости. При этом частота появления аномальных волн и их амплитуды в большей мере отвечают статистически оправданным оценкам.

Аномально большие волны ($U_{AG} > 15-20$ метров возникающие в результате интерференции сильного волнения моря (средняя высота-размах волн 4-6м., период 10-12 с., фазовая скорость – более 20 м/с, групповая – в два раза меньше, длины затухания волнения – тысячи километров) с непременным учетом нелинейного взаимодействия, представляют собой цуг (группу) обычно из трех волн, одна из которых наибольшая, частота появления (статистика по ансамблю и по времени) – одна такая волновая группа на 10-20 тысяч волн. Для таких длинных волн (200-250м) максимально достижимая амплитуда до обрушения - около 30 метров. Наиболее вероятно их появление в начале развития модуляционной неустойчивости (в интервале сотни километров от границы зоны ветрового возбуждения волн, время развития неустойчивости – 10 обратных инкрементов – около 2,5-3 часов). Кроме таких цугов волн возможно весьма редкое появление уединенных волн с размахом до 30 метров даже при небольшом волнении – результат обычной интерференции на больших расстояниях уже ослабленных таких длинноволновых ветровых волн.

Рекомендации для технического проекта космического мониторинга поверхности океана. Для определения зон мирового океана, где с большой вероятностью ожидается появление аномальных волн необходимо на базе разработанных математических моделей определить условия, частоту и значения аномальных волн, используя характеристики внешней среды. Мониторинг, который состоит в проверке ряда

критических показателей, должен быть основан на результатах моделирования, подобного моделированию, проведенному выше. Для наблюдаемых аномально больших волн с крутизной $(2 \div 3) \frac{2|A_0|}{2\pi} k_0 \propto 0,13$, при которой еще нет обрушения [67,72], средняя высота волн равна $2|A_0| \propto (0,07 \div 0,04) \cdot \lambda_0$. Длина волны связана с периодом колебаний соотношением $\lambda_0 \propto 1,6 \cdot T^2$ и для волн с периодом 10 сек., волнение океана отвечает высотам волн сравнимым с 10 м. Отношение максимального инкремента модуляционной неустойчивости к частоте колебаний порядка α , где $\alpha = k_0^2 |A_0|^2 \approx (0,04 \div 0,02)$ в обсуждаемых выше условиях. Другими словами, характерное время процесса (обратный инкремент) при этом можно оценить как 6-12 минут. За время менее часа можно будет наблюдать неустойчивость на её развитой нелинейной стадии. При ветровом возбуждении (скорость ветра должна превосходить фазовую скорость гравитационных поверхностных волн, равную примерно 10-15 м/с, но если есть встречное течение, то скорость ветра может быть даже меньше этой величины на значение скорости течения) зона развитой модуляционной неустойчивости находится в 50-100 км от границы зоны ветрового возбуждения.

Прежде всего, следует выявить зону океана с постоянной по направлению и величине большей пороговой скоростью ветра, с поправкой на течение. Внутри области ветрового возбуждения на расстояниях более 50 км начинается зона развитой модуляционной неустойчивости, причем именно на границе этой зоны ширина и интенсивность спектра модуляционной неустойчивости максимальна и возможны интенсивные всплески модуляции, которые могут содержать одну или несколько аномально больших волн. На расстояниях заметно больших 100 км от границы зоны ветрового возбуждения, даже в рамках этой зоны, максимальные амплитуды волн оказываются меньше их наибольших аномальных аналогов, хотя и сохраняют значительный разброс.

Авторы благодарны за полезные замечания В.М. Конторовичу и Е.Н. Пелиновскому и за внимание к работе Е.А. Кузнецову и Н.С. Ерохину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system // J.Inst. Math. Appl. - 1965. - Vol.1, No.2. - P.269-306.
2. Zakharov V.E. Stability of nonlinear waves in dispersive media // J Teor. Prikl.Fiz., - 1966. - Vol. 51. - P. 668-671; Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field //Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24(2). - P.455-459; The Instability of Waves in Nonlinear Dispersive Media // Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24. - P.740.
3. Silin V.P. Parametric resonance in plasma // JETP. - 1965. - Vol. 48, No.6. - P. 1679- 1691.
4. Aliev Ju.M., Silin V.P. Oscillations theory of plasma, which situated in HF electromagnetic field // JETP. - 1965. -Vol.48, No.3. - P.901-912.
5. Gorbunov L.M., Silin V.P. On the plasma instability in strong HF field // JETP. - 1965. - Vol.49, No.6. - P.1973- 1981.
6. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water // J. Fluid Mech. - 1967. - Vol.27. - P. 417-430.
7. Askar'jan G.A. Jeffect samofokusirovki // UFN. - 1973. - Vyp. 10. - T. 111. - S. 249-260.
8. Karpman V.I. Nelinejnye volny v dispergirujushhiih sredah. - M.: Nauka, 1973. - 175 s.
9. Valeo E.J., Olerman C.R. Model of Parametric Excitation by an Imperfect Pump // Phys. Rev. Lett. - 1973. - Vol.30. - No.21, P.1035- 1038.
10. Fajnberg Ja.B. Nekotorye voprosy plazmennoj jelektroniki // Fizika plazmy. - 1985. - T.11, vyp.11. - C.1398-1410.
11. Rabinovich M.S., Ruhadze A.A. Principy reljativistskoj plazmennoj elektroniki // Fizika plazmy. - 1976. - T.2. - Vyp.5. - S.715-722.
12. Armand N.A. Rasprostranenie decimetrovyh i santimetrovyh voln. - M.: IREAN, 1975, - 93s.
13. Jenciklopedija nizektemperaturnoj plazmy. Gazovye i plazmennye lazery. Tom HI-4 / Pod redakciej V. E. Fortova. -M.: Fizmatlit, 2005. - 822c.
14. Skanavi G.I. Fizika dijelektrikov (Oblast' slabyh polej). - M.: Fizmatgiz, 1949.
15. Skanavi G.I. Fizika dijelektrikov (Oblast' sil'nyh polej). - M.: Fizmatgiz, 1958.
16. Hippel' A. R. Dielektriki i volny, per. s angl. - M. - 1960.
17. Knol' M., Jehmejer I. Tehnicheskaja elektronika, per. s nem., - M. - 1971. - T.1.
18. Kondratenko A.N., Kuklin V.M. Osnovy plazmennoj elektroniki. - M.: Energoatomizdat, 1988. - 320 s.
19. Makarov G.I., Novikov V.V., Rybachek S.T. Rasprostranenie radiovoln v volnovodnom kanale Zemlja-ionosfera i v ionosfere. - M.: Nauka, 1994. - 150 s.
20. Zakharov V.E. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. Three-dimensional aspects of air-sea interaction // Eur. J. Mech. B Fluids. - 1999. - Vol.18(3). - P.327-344.
21. Schwartz L.W., Fenton J.D. Strongly nonlinear waves // Ann. Rev. Fluid. Mech. - 1982. - Vol.14. - P.39-60.
22. Debnath L. Nonlinear Water Waves. - Boston: Academic Press, 1994.
23. Kurkin A.A., Pelinovskij E.N. Volny-ubijcy: fakty, teorija i modelirovanie. - Nizhnij Novgorod: NNGU, 2004.
24. Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Modulation instability of stokes wave - Freak wave // JETP Lett. - 2005. - Vol.81(6). - P. 255-259.
25. Kharif C., Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon // Eur. J. Mech. B-Fluid. - 2006. - Vol.22(6). - P.603-633.
26. Yeom D.-I., Eggleton B.J. Photonics: rogue waves surface in light // Nature. - 2007. - Vol.450. - P.953-962.
27. Solli D.R., Ropers C., Koonath P., Jalali B. Optical rogue waves // Nature. - 2007. - Vol.450. - P.1054- 1064.

28. Burlaga L.F., Ness N.F., Acuna M.H. Linear magnetic holes in a unipolar region of the heliosheath observed by Voyager 1 // *J. Geophys. Res.* – 2007. – Vol.112. – P.A07106.
29. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. *Rogue Waves in the Ocean.* - Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
30. Ruderman M.S. Freak waves in laboratory and space plasmas // *Eur. Phys. J. Special Topics.* - 2010. - Vol.185. - P.57-66.
31. Vasil'ev V.A., Romanovskij Ju.M., Jahno V.G. *Avtovolnovye processy, pod red. D.S.Chernavskogo.* - M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1987. - 240 s.
32. *Avtovolnovye processy v sistemah s diffuziej, pod redakciej M.T. Grehovoj.* – Gor'kij: IPF AN SSSR, 1981. - 246 s.
33. *Teorija solitonov: metod obratnoj zadachi, pod red. S.P. Novikova.* - M.: Nauka, 1980.- 327s.
34. Ovsjannikov L.V. *Grupповoj analiz differencial'nyh uravnenij.* - M.: Nauka, 1978.- 240s.
35. Tappert F.D., Cole W.J., Hardin R.H., Zabusky N.J. Wave kinetic equation emulation by numerical particle-in-cell simulation method // *Preprint PCP-70- 29, Comp.Phys.Res.Dep. Bell.Tel.Lab., 1970.*
36. Klimontovich Ju.L. *Statisticheskaja teorija neravnovesnyh processov v plazme.* - M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1964. - 308 s.
37. Klimontovich Ju.L., Vil'hemson H., Jakimenko I.P., Zagorodnij A.G. *Statisticheskaja teorija plazmenno-molekuljarnyh sistem.* - M.: Iz-vo MGU, 1990. - 220s.
38. Zaslavskij G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. *Slabyj haos i kvazireguljarnye struktury.* - M.: Nauka, 1991. - 320s.
39. Cytovich V.N. *Teorija turbulentnoj plazmy.* - M.: Atomizdat, 1971.- 423s.
40. Kljackin V.N. *Statisticheskoe opisanie dinamicheskikh sistem s fluktuirujushhimi parametrami.* - M.: Nauka, 1975. - 240s.
41. Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P., Vorob'ev V.M. *Space dissipative structures // Nonlinear World.* - 1990. - Vol. 2 (IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, 1989, Singapore). - R.776-803.
42. Kuklin V.M. *Rol' poglyannja ta disipaciyi energiyi u formuvanni prostorovih nelinejnyh struktur u nerivnovaznyh seredovyshhah // UFZh. Oglyady.* - 2004. - T. 1, No.1. - S. 49-81.
43. Kuklin V.M., Kirichok A.V., Kuklina O.V. *O mehanizmah obrazovaniya samopodobnyh struktur v neravnovesnoj sploshnoj srede // Voprosy atomnoj nauki i tehniki. (VANT).* - Ser. Plazmennaja elektronika i novye metody uskoreniya. - 2000. - No.1. - S. 222-224.
44. Kuklin V.M. *Obrazovanie samopodobnyh prostranstvennyh struktur v moduljacionno-neustojchivyh sredah // Elektromagnitnye yavleniya.* - 2001. - T. 4, No.1 (13). - S. 85-100.
45. Belkin E.V., Gushhin I.V. *Analiz chislennoj modeli moduljacionnoj neustojchivosti volny konechnoj amplitudy v nelinejnoj srede // Visnik HNU im. V.N. Karazina.- Ser. Matematichne modeljuvannja. Informacijni tehnologii. Avtomatizovani sistemi upravlinnja.* - 2008 - No.809 (9). - S. 20-31.
46. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. *Ob interferencii v mnogomodovyh rezhimah moduljacionnyh neustojchivostej // Voprosy atomnoj nauki i tehniki (VANT) Ser. «Plazmennaya elektronika i novye metody uskoreniya.* - 2008. – No. 4 (6). - S. 222-227.
47. Kuklina O.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. *Dinamika formirovaniya samopodobnyh struktur v nelinejnyh volnovyh dissipativnyh sredah s nerazpadnym spektrom // The Journal of Kharkiv National University, physical series “Nuclei, Particles, Fields”.* – 2001. - №541. – Iss.4(16). - S.73-76.
48. Kuklin V.M., Panchenko I.P. *Vozbuzhdenie korotkovolnovogo spektra poverhnostnyh voln v plazme moshhnyim elektromagnitnym izlucheniem // Pis'ma v ZhJeTF.* - 1986. - T. 43, vyp. 5. - S. 237-239.
49. Kuklin V.M., Sevidov S.M. *K nelinejnoj teorii ustojchivosti intensivnyh kolebanij holodnoj plazmy // Fizika plazmy.* - 1988. - T. 14, vyp. 10. - S. 1180-1185.
50. Zemlyanaya E.V., Alexeeva N.V. *Oscillation solitons of the driven, damped nonlinear Schrödinger equation // Theoretical and Mathematical Physics.* - 2009. – Vol.159. –P. 870-876.
51. Segur H., Henderson D., Carter J. et al. *Stabilizing the Benjamin-Feir instability // J. Fluid Mech.* - 2005. - Vol.539. - P.229-271.
52. Wu G., Liu Y., Yue D.K.P. *A note on stabilizing the Benjamin-Feir instability // J. Fluid Mech.* - 2006. - Vol.556. - P. 45-54.
53. Kharif C., Touboul J. *Under which conditions the Benjamin-Feir instability may spawn an extreme wave event: A fully nonlinear approach // Eur. Phys. J. Special Topics.* - 2010. - Vol.185 - P.159- 168.
54. Kuklin V.M. *Ob interferencionnoj prirode formirovaniya tonkoj struktury lazernyh impul'sov i anomal'nyh vspleskov amplitudy kolebanij v modeli Lajthilla / VIII Haritonovskie nauchnye chteniya. 21-24 marta, 2006 g. Sarov, Rossija, Sb. dokladov.* - Carov, 2006. - S. 450-456; Kuklin V.M. *Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system // Voprosy atomnoj nauki i tehniki (VANT) Ser. «Plazmennaya elektronika i novye metody uskoreniya.* - 2006. - No.5 (5). - S. 63-68.
55. Bogoljubov N.N., Mitropol'skij Ju.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij.* - M.: Nauka, 1974.- 503c.
56. Gaponov V.A., Ostrovskij L.A Rabinovich M.I. *Odnomernye volny v nelinejnyh sistemah s dispersiej // Izv. VUZov. Radiofizika.* – 1970. - T.13, No.2. - C.163-175.
57. Sedov L.I. *Metody podobiya i razmernosti v mehanike - izd. VIII pererabotannoe.* - M., 1977. – 440s.
58. Suhl H. *Effective Nuclear Spin Interactions in Ferromagnets // Phys Rev.* - 1958. - Vol.109. – No.2. - P.606.
59. Schlomann E, Saunder J.H., Sirvets M.H. *L-Band Ferromagnetic Resonance Experiments at High Peak Power Levels // J. Appl. Phys.* - 1960. - Vol.31, Suppl. - P.386S-395S.
60. Zaharov V.E., L'vov V.S., Starobinec S.S. *Novyj mehanizm ogranichenija amplitudy SV pri paralel'noj nakachke // FTT.* – 1969. - T.11. - C.2047- 2055.
61. Zaharov V.E., L'vov V.S., Starobinec S.S. *Turbulentnost' spinovyh voln za porogom ih parametricheskogo vozbuzhdeniya // UFN.* – 1974. - T.114. – No.4. – C.609-654.
62. L'vov V.S. *Nelinejnye spinovye volny.* – M.: Nauka. Gl. red. fiz-mat. lit., 1987. – 272 s.
63. Belkin E.V. *The mathematical models of modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity / Manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 – Mathematical modeling and computational methods. V.N. Karasin Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. – 150P.*

64. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. Moduljacionnaja neustojchivost' voln, podderzhivaemyh vneshnim istochnikom v crede s pogloshheniem // VANT, Ser. «Plazmennaja jelektronika i novye metody uskorenija. – 2010. – No.4(68)). - C.291-295.
65. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. Development of modulation instabilities in media with damping and forcing / High-Power pulsed electrophysics. International conference XIV Khariton's topical scientific readings. Digest of technical papers - Sarov, Russia: FGUP «RFYATS-VNIIEF», 2013. – P.14-20.
66. Vorob'ev V.M., Kuklin V.M. O mehanizme vozniknovenija prostranstvennyh struktur v dissipativnyh neravnovesnyh sredah // Pis'ma v ZhTF. – 1987. – T.13. – No.22. - S. 1354-1360.
67. Schwartz L.W., Fenton J.D. Strongly nonlinear waves // Ann. Rev. Fluid. Mech. – 1982. - Vol.14. - P.39-60.
68. Berdichevskij A. Gigantskie volny-ubijcy vse eshhe predstavljajut opasnost' dlja sudohodstva. - RIA novosti, 2007. - Rezhim dostupa: <http://transbez.com/info/sail/wave-killer.html>.
69. The research project supported by the European Commission under the Fifth Framework Programme contributing to the implementation of the Key Action 3: Sustainable Marine Ecosystems within the Energy, Environment and Sustainable Development (Project N°: EVK:3- 2000-00544), 2001 – 2003.
70. Badulin S., Ivanov A., Ostrovskij A. Vlijanie gigantskih voln na bezopasnost' morskoy dobychi i transportirovki uglevodorodov // Tehnologii, TJeK. - 2005, No.2.
71. Lavrenov I.V. The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa // Natural Hazards. – 1998. – Vol.17. – P.117- 127.
72. Stansell P. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea // Ocean Engineering. – 2005. - Vol.32. – No.8-9. – P.1015- 1036.