https://doi.org/10.26565/2074-8922-2026-86-21
УДК (UDC): 378.147:517.9:629.735

І. Л. ЯКУНІНА[1]**,** канд. техн. наук,
доцент кафедри інформаційних технологій та авіаційних робототехнічних систем
e-mail: yakunina_irina@sfa.org.ua , ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0327-2349
К. В. СУРКОВА[1], канд. пед. наук, доцент,
завідувачка кафедри інформаційних технологій та авіаційних робототехнічних систем
e-mail: eskirua@gmail.com , ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1388-7611
[1]*Українська державна льотна академія,*
вул. Добровольського, 1, м. Кропивницький, 25005, Україна

МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ БПЛА В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ АВІАЦІЙНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Мета. Метою статті є обґрунтування доцільності та розробка методичного підходу до впровадження прикладних задач, пов'язаних із моделюванням динаміки польоту безпілотних повітряних суден (БПЛА), у процес викладання розділу «Диференціальні рівняння» курсу вищої математики для здобувачів освіти спеціальності J6 «Авіаційний транспорт». Актуальність дослідження зумовлена зростанням ролі БПЛА у сучасній авіаційній галузі та необхідністю посилення прикладної спрямованості фундаментальної математичної підготовки майбутніх авіаційних фахівців.

Методи. Дослідження проводилось на базі кафедри інформаційних технологій та авіаційних робототехнічних систем Української державної льотної академії. Методологічну основу становлять компетентнісний підхід, принципи міждисциплінарної інтеграції та STEM-освіти. Здійснено порівняльний аналіз робочих програм навчальних дисциплін «Вища математика» та «Керування безпілотними літальними апаратами» за спеціальністю J6 «Авіаційний транспорт». Застосовано методи системного аналізу, математичного моделювання та педагогічного проєктування для встановлення міждисциплінарних зв'язків між математичним апаратом диференціальних рівнянь та задачами динаміки польоту безпілотного повітряного літального апарату (БПЛА).

Результати. Встановлено прямі відповідності між типами диференціальних рівнянь, що вивчаються в курсі вищої математики, та математичними моделями руху БПЛА. Побудовано три математичні моделі, адаптовані для навчального процесу. Показано, що диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними описують прямолінійний рух БПЛА з урахуванням аеродинамічного опору середовища, зокрема вертикальний зліт квадрокоптера; лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами моделюють поздовжню стійкість літального апарата через аналіз коренів характеристичного рівняння; лінійні неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною відтворюють реакцію БПЛА на зовнішні періодичні збурення, такі як пориви вітру або вібрації двигуна, включаючи аналіз резонансних явищ. Для кожної моделі виведено аналітичні розв'язки та надано їх фізичну інтерпретацію в контексті реальних параметрів БПЛА. Розроблено комплект прикладних задач професійного спрямування з конкретними числовими параметрами для практичних занять та самостійної роботи здобувачів освіти.

Висновки. Інтеграція задач моделювання динаміки польоту БПЛА у курс вищої математики підвищує мотивацію здобувачів освіти, формує загальні компетентності абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК 09), здатності проведення досліджень (ЗК 04) та навичок використання інформаційних технологій (ЗК 03), забезпечує практичну спрямованість математичної підготовки майбутніх авіаційних фахівців. Запропонований підхід є універсальним для всіх освітніх програм спеціальності J6 «Авіаційний транспорт» і може бути впроваджений у навчальний процес закладів вищої авіаційної освіти. Перспективним напрямком є розробка комп'ютерних симуляцій динаміки БПЛА для супроводу практичних занять.

Ключові слова: *вища математика, диференціальні рівняння, БПЛА, динаміка польоту, математичне моделювання, міждисциплінарні зв'язки, авіаційна освіта.*

Як цитувати: Якуніна І. Л., Суркова К. В. Методичні засади застосування задач динаміки БПЛА у курсі вищої математики для авіаційних спеціальностей. *Проблеми інженерно-педагогічної освіти*. 2026. Вип. 86. С. 267-281. https://doi.org/10.26565/2074-8922-2026-86-21

In cites: Yakunina I. L., Surkova K. V. (2026). Methodological foundations for applying UAV dynamics problems in higher mathematics course for aviation specialties. *Problems of Engineering Pedagogic Education*, (86), 267-281. https://doi.org/10.26565/2074-8922-2026-86-21 (in Ukrainian)

Вступ

Сучасний етап розвитку авіаційної галузі характеризується стрімким зростанням ролі безпілотних повітряних суден (БПЛА) як у цивільному, так і в оборонному секторах. В Україні підготовка фахівців з дистанційного пілотування набуває особливої актуальності в контексті реформування авіаційної освіти та впровадження нових освітніх програм [3, 6]. Українська державна льотна академія (УДЛА) здійснює підготовку здобувачів вищої освіти за спеціальністю J6 «Авіаційний транспорт», навчальний план якої включає як фундаментальну математичну підготовку, так і спеціалізовані дисципліни з експлуатації дистанційно пілотованих повітряних суден (ДППС).

Курс «Вища математика» є обов'язковою компонентою підготовки бакалаврів спеціальності J6 «Авіаційний транспорт» і є однаковим для всіх освітніх програм цієї спеціальності. Курс має обсяг 9 кредитів ЄКТС (270 годин), вивчається протягом трьох семестрів і містить три змістових модулі, зокрема розділ «Функціональні ряди. Диференціальні рівняння» (Тема 6), який передбачає засвоєння методів розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) різних типів. Водночас тема «Основи аеродинаміки польоту» дисципліни «Керування безпілотними літальними апаратами», безпосередньо пов'язана з математичним моделюванням динаміки польоту [12].

Проте аналіз сучасної практики викладання вищої математики у технічних закладах вищої освіти (ЗВО) свідчить про наявність суттєвого розриву між теоретичним вивченням математичного апарату та його практичним застосуванням у професійній діяльності [2, 10]. Здобувачі освіти авіаційних спеціальностей часто не усвідомлюють прикладного значення диференціальних рівнянь, що негативно впливає на мотивацію та якість засвоєння матеріалу. Це протиріччя є особливо гострим для спеціальності J6 «Авіаційний транспорт», де математичні моделі становлять основу інженерного проєктування та експлуатації літальних апаратів [10, 11].

Проблема прикладної спрямованості навчання вищої математики в технічних ЗВО є предметом численних досліджень. К.В. Власенко, В.В. Ачкан, Ю.В. Ботузова досліджували методичні аспекти реалізації прикладної спрямованості курсу вищої математики для інженерних спеціальностей, зокрема питання добору задач професійного спрямування та їх інтеграції у навчальний процес [2]. О. Семеніхіна, М. Друшляк, Ю. Бондаренко вивчали можливості застосування програмних засобів (зокрема GeoGebra) у навчанні математики майбутніх інженерів, що дозволяє візуалізувати математичні моделі та підвищити якість засвоєння матеріалу [14].

Міждисциплінарний підхід до організації освітнього процесу, зокрема у контексті STEM-освіти, досліджувався Н. Балик, О. Барною, Г. Шмигер, В. Олексюком, які розробили модель перепідготовки педагогічних працівників на основі формування STEM-компетентностей [5]. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) до 2027 року, затверджена Кабінетом Міністрів України, передбачає інтеграцію природничих наук, технологій, інженерії та математики, що безпосередньо стосується поєднання курсу вищої математики з дисциплінами авіаційного профілю [1, 8].

Математичне моделювання динаміки польоту БПЛА є добре розробленим напрямком прикладної математики та механіки. Т. Лууконен у роботі [9] представив математичну модель динаміки квадрокоптера та вивів диференціальні рівняння руху на основі рівнянь Ньютона-

Ейлера та Ейлера-Лагранжа, а також розробив алгоритми стабілізації з використанням ПД-регулятора. А.Х. Абдулкарім та А.Х. Аль-Хуссайні [4] виконали комплексне дослідження нелінійного керування квадрокоптером для стабілізації та відстеження траєкторії, продемонструвавши виведення рівнянь стану системи з використанням рівнянь Ньютона-Ейлера. Р.А. Бхосале, Д. Падманабхан, С. Кадам [12] розробили математичну модель та симуляцію квадрокоптера-БПЛА з ПІД-регулятором, показавши ефективність лінеаризованих моделей для задач керування.

П. Фен, А. Ромеро, Д. Скарамуцца [7] досліджували прогнозувальне керування на основі машинного навчання для маневреного польоту БПЛА, використовуючи лінеаризовані моделі динаміки у формі диференціальних рівнянь. М. Болік, О. Міхайлова, К. Пост [6] досліджували інноваційні підходи до інтеграції БПЛА у STEM-освіту, зокрема розробку навчальних модулів із застосуванням безпілотних літальних апаратів для підготовки фахівців у вищій школі.

Разом із тим, аналіз літературних джерел свідчить про недостатню розробленість питання інтеграції конкретних типів диференціальних рівнянь з математичними моделями динаміки БПЛА у контексті робочих програм авіаційних спеціальностей. Зокрема, відсутні систематизовані методичні розробки, які б забезпечували прямий зв’язок між темами розділу «Диференціальні рівняння» курсу вищої математики для спеціальності J6 «Авіаційний транспорт» та прикладними задачами динаміки польоту БПЛА, що і зумовлює актуальність нашого дослідження.

Метою статті є обґрунтування та розробка методичного підходу до впровадження прикладних задач моделювання динаміки польоту БПЛА у процес викладання розділу «Диференціальні рівняння» курсу вищої математики для здобувачів спеціальності J6 «Авіаційний транспорт».

Методика

Дослідження проводилось на базі кафедри інформаційних технологій та авіаційних робототехнічних систем Української державної льотної академії протягом 2024–2025 навчального року. Об’єктом дослідження є процес формування математичних компетентностей здобувачів вищої освіти спеціальності J6 «Авіаційний транспорт». Предметом дослідження є міждисциплінарні зв’язки між розділом «Диференціальні рівняння» курсу вищої математики та дисципліною «Керування безпілотними літальними апаратами».

Методологічну основу дослідження становлять: компетентнісний підхід до організації освітнього процесу у вищій школі, що передбачає формування здатності застосовувати набуті знання у професійній діяльності [2, 11]; принципи міждисциплінарної інтеграції, які забезпечують системність знань через встановлення зв’язків між різними навчальними дисциплінами [8, 16]; концепція STEM-освіти, що акцентує на поєднанні природничих наук, технологій, інженерії та математики у єдиний освітній простір [1, 5]. Застосовано методи системного аналізу для виявлення структурних зв’язків між математичним апаратом та прикладними задачами, порівняльного аналізу для порівняння змісту робочих програм, математичного моделювання для побудови адаптованих навчальних моделей та педагогічного проєктування для розробки методичних рекомендацій.

На першому етапі здійснено порівняльний аналіз змісту робочих програм навчальних дисциплін. Детально проаналізовано робочу програму «Вища математика», яка є єдиною для всіх освітніх програм спеціальності J6 «Авіаційний транспорт» і має обсяг 9 кредитів ЄКТС (270 годин). Особливу увагу приділено Темі 6 «Функціональні ряди. Диференціальні рівняння. Паралельно проаналізовано програму дисципліни «Керування безпілотними літальними апаратами», зокрема теми «Основи аеродинаміки польоту» та «Польоти ДППС у зоні прямої видимості та поза межами прямої видимості. Системи керування та навігації ДППС». Порівняння здійснювалось за критеріями: математичний апарат, що застосовується; фізичні процеси, що моделюються; компетентності, що формуються.

На другому етапі побудовано математичні моделі руху БПЛА, адаптовані для навчального процесу. Принцип побудови моделей ґрунтувався на застосуванні лінеаризації – переходу від загальних нелінійних рівнянь динаміки шестиступеневої моделі БПЛА [12, 17] до лінійних диференціальних рівнянь для малих відхилень від рівноважного стану. Такий підхід є стандартним у теорії стійкості та керування літальними апаратами [4, 9] і дозволяє отримати рівняння, що відповідають типам ДР, передбаченим робочою програмою курсу вищої математики, зберігаючи при цьому фізичну адекватність моделей.

На третьому етапі розроблено комплект прикладних задач професійного спрямування з конкретними числовими параметрами, що відповідають характеристикам реальних БПЛА (маса, тяга двигунів, коефіцієнти опору та демпфування). Сформульовано методичні рекомендації щодо поетапного впровадження цих задач у лекційні та практичні заняття, а також у самостійну роботу здобувачів освіти відповідно до тематичного плану дисципліни.

Результати досліджень

1. Аналіз міждисциплінарних зв'язків. Порівняльний аналіз робочих програм дозволив встановити прямі взаємозв'язки між типами ДР, що вивчаються у Темі 6 курсу «Вища математика», та задачами дисципліни «Керування безпілотними літальними апаратами».

Перша група зв'язків стосується ДР першого порядку з відокремлюваними змінними та задач прямолінійного руху БПЛА. Рух безпілотного літального апарата вздовж вертикальної осі з урахуванням сили тяжіння, тяги двигунів та аеродинамічного опору описується рівнянням виду:

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg - kv \qquad (1)$$

де m – маса БПЛА, v – швидкість, F – сила тяги, g – прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт опору. Рівняння (1) є лінійним ДР першого порядку і безпосередньо відповідає тематиці практичних занять з розділу «Лінійні диференціальні рівняння першого порядку» [9, 13].

Друга група зв'язків пов'язує лінійні однорідні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами з моделюванням поздовжньої стійкості БПЛА. Малі відхилення кута тангажу θ від рівноважного положення описуються рівнянням:

$$I_y \cdot \theta'' + b \cdot \theta' + c \cdot \theta = 0 \qquad (2)$$

де I_y – момент інерції відносно поперечної осі, b – коефіцієнт демпфування, c – коефіцієнт відновлювального моменту. Ця задача прямо пов'язана з темою «Основи аеродинаміки польоту» дисципліни «Керування безпілотними літальними апаратами» [4, 7].

Третя група зв'язків стосується лінійних неоднорідних ДР зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Вплив поривів вітру або періодичних вібрацій двигуна на кутове положення БПЛА описується рівнянням:

$$I_y \cdot \theta'' + b \cdot \theta' + c \cdot \theta = M_0 \cdot sin(\omega t) \qquad (3)$$

де M_0 – амплітуда збурювального моменту, ω – частота збурення [12, 17].

2. Математичні моделі динаміки польоту БПЛА. Розглянемо детальніше математичну постановку задач, що можуть бути використані в навчальному процесі.

Модель 1. Вертикальний зліт квадрокоптера.

Нехай квадрокоптер масою m здійснює вертикальний зліт. На нього діють: сила тяги F (постійна), сила тяжіння mg та сила аеродинамічного опору, пропорційна швидкості. За другим законом Ньютона отримуємо рівняння (1). Позначивши:

$$a = \frac{F - mg}{m}, \ \beta = \frac{k}{m} \qquad (4)$$

та розв'язуючи рівняння (1) з початковою умовою $v(0) = 0$, отримуємо:

$$v(t) = \frac{a}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) \qquad (5)$$

Фізична інтерпретація розв'язку (5): швидкість зростає від нуля до усталеного значення за експоненціальним законом. Усталена швидкість:

$$v_{\text{уст}} = \frac{F - mg}{k} \qquad (6)$$

Стала часу $\tau = m/k$ визначає тривалість перехідного процесу. Закон зміни висоти *h(t)* отримується інтегруванням виразу (5):

$$h(t) = \frac{a}{\beta} \cdot t + \frac{a}{\beta^2} \cdot \left(e^{-\beta t} - 1\right) \quad (7)$$

Приклад 1. Для квадрокоптера з масою m = 1,5 кг, сумарною тягою двигунів F = 20 Н та коефіцієнтом аеродинамічного опору k = 0,3 Н·с/м, розрахувати усталену швидкість, час досягнення 95% від усталеної швидкості і висоту підйому за цей проміжок часу. Прискорення вільного падіння g = 9,81 м/с².

Обчислимо параметри моделі за формулами (4):

$$a = \frac{20 - 1{,}5 \cdot 9{,}81}{1{,}5} = \frac{20 - 14{,}715}{1{,}5} = \frac{5{,}285}{1{,}5} \approx 3{,}52 \text{ м/с}^2$$

$$\beta = \frac{0{,}3}{1{,}5} = 0{,}2 \text{ с}^{-1}$$

За формулою (6) розрахуємо усталену швидкість:

$$v_{\text{уст}} = \frac{20 - 14{,}715}{0{,}3} = \frac{5{,}285}{0{,}3} \approx 17{,}6 \text{ м/с}$$

Стала часу системи τ = 1/β = 5 с. Час досягнення 95% від усталеної швидкості визначається з умови $v(t_{95}) = 0{,}95 \cdot v\text{уст}$:

$$0{,}95 = 1 - e^{-\beta t_{95}} \Rightarrow e^{-\beta t_{95}} = 0{,}05 \Rightarrow t_{95} = -\frac{ln(0{,}05)}{\beta} = \frac{3{,}0}{0{,}2} = 15 \text{ с}$$

Висота підйому за 15 секунд за формулою (7):

$$h(15) = \frac{3{,}52}{0{,}2} \cdot 15 + \frac{3{,}52}{0{,}04} \cdot (e^{-3} - 1) = 264 + 88 \cdot (-0{,}95) \approx 180{,}4 \text{ м}$$

Фізична інтерпретація: квадрокоптер досягає швидкості 16,7 м/с (95% від усталеної) за 15 секунд, піднявшись на висоту приблизно 180 м. Ця задача демонструє здобувачам освіти повний цикл математичного моделювання: від фізичної постановки через складання та розв'язання ДР до аналізу та інтерпретації результату [9, 12].

Модель 2. Поздовжня стійкість БПЛА.

Для малих відхилень від рівноважного горизонтального польоту кутова динаміка БПЛА по каналу тангажу описується рівнянням (2). Характеристичне рівняння має вигляд:

$$I_y \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0 \quad (8)$$

Корені характеристичного рівняння (8):

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{-b \pm}{2}\sqrt{b^2 - 4I_y \cdot c}}{I_y} \quad (9)$$

Залежно від знаку дискримінанта $D = b^2 - 4I_y c$ розрізняють три режими:

а) $D > 0$: два дійсних від'ємних кореня – аперіодичне загасання відхилення, БПЛА повертається до рівноважного положення без коливань;

б) $D < 0$: пара комплексно-спряжених коренів з від'ємною дійсною частиною – коливальне загасання, БПЛА здійснює згасаючі коливання навколо рівноваги (типовий випадок для більшості БПЛА);

в) $D = 0$: критичне демпфування – найшвидше повернення до рівноваги без коливань.

Загальний розв'язок рівняння (2) для випадку коливального загасання ($D < 0$):

$$\theta(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cdot cos(\omega t) + C_2 \cdot sin(\omega t)\right) \quad (10)$$

де $\alpha = -b/(2I_y) < 0$ – показник загасання, ω – частота власних коливань. Ця модель дозволяє здобувачам освіти наочно зв'язати поняття характеристичного рівняння, його коренів та поведінки розв'язку з фізичною картиною стійкості літального апарата [4, 7].

Приклад 2. Для БПЛА з параметрами: момент інерції I_y = 0,8 кг·м², коефіцієнт демпфування b = 0,4 Н·м·с/рад, коефіцієнт відновлювального моменту c = 2,0 Н·м/рад, визначити вид коливань повернення до рівноваги і розрахувати час повернення до рівноважного стану.

Обчислимо дискримінант характеристичного рівняння:

$$D = b^2 - 4I_y \cdot c = 0{,}16 - 4 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}0 = 0{,}16 - 6{,}4 = -6{,}24$$

Оскільки $D < 0$, маємо коливальний режим загасання. Показник загасання:

$$\alpha = -\frac{b}{2I_y} = -\frac{0{,}4}{2 \cdot 0{,}8} = -0{,}25 \text{ с}^{-1}$$

Частота власних коливань:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{|D|}}{2I_y} = \frac{\sqrt{6{,}24}}{1{,}6} = \frac{2{,}498}{1{,}6} \approx 1{,}56 \text{ рад/с}$$

Період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6{,}28}{1{,}56} \approx 4{,}03 \text{ с}$$

Час загасання коливань до 5% від

початкової амплітуди (час досягнення 95% стабілізації):

$$t_{95} = -\frac{ln(0{,}05)}{\alpha} = \frac{3{,}0}{0{,}25} = 12\ \text{с}$$

Фізична інтерпретація: після початкового збурення БПЛА здійснює згасаючі коливання з періодом близько 4 секунд і повертається до рівноважного положення (з точністю 95%) приблизно за 12 секунд, тобто за три періоди коливань.

Модель 3. Реакція БПЛА на періодичне збурення.

При наявності періодичного зовнішнього впливу (порив вітру, вібрації двигуна) рівняння руху набуває вигляду (3). Частинний розв'язок шукається методом невизначених коефіцієнтів у вигляді:

$$\theta_ч = A \cdot sin(\omega t) + B \cdot cos(\omega t) \quad (11)$$

Амплітуда вимушених коливань залежить від співвідношення частоти збурення ω та власної частоти системи:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I_y}} \qquad (12)$$

При наближенні ω до ω_0 виникає явище резонансу – різке зростання амплітуди коливань, що є критично небезпечним для БПЛА. Загальний розв'язок рівняння (3) є сумою загального розв'язку однорідного рівняння (10) та частинного розв'язку (11). Оскільки загальний розв'язок однорідного рівняння з часом загасає (при $\alpha < 0$), у сталому режимі залишаються лише вимушені коливання.

Фізична інтерпретація резонансу. Власна частота ω_0 безпосередньо залежить від конструктивних параметрів БПЛА: коефіцієнта відновлювального моменту c (визначається аеродинамічною компоновкою та площею оперення) і моменту інерції I_y (залежить від розподілу мас конструкції). Для Прикладу 2: $\omega_0 = (2{,}0/0{,}8)^{0{,}5} \approx 1{,}58$ рад/с, що відповідає частоті $f_0 \approx 0{,}25$ Гц.

Якщо частота зовнішнього збурення ω наближається до власної частоти ω_0, виникає явище резонансу – різке зростання амплітуди вимушених коливань. Для БПЛА джерелами періодичних збурень можуть бути: вібрації двигунів (типові частоти 50-200 Гц для безколекторних моторів), турбулентність атмосфери (0,1-1 Гц), незбалансованість гвинтів (частота обертання).

Роль демпфування є критичною для безпеки польоту. Коефіцієнт b обмежує максимальну амплітуду коливань при резонансі: чим більше демпфування, тим менша амплітуда. При $b \to 0$ амплітуда резонансних коливань прямує до нескінченності (теоретично), що призвело б до втрати керування БПЛА. Проєктувальники забезпечують достатнє демпфування через аеродинамічну компоновку (стабілізатори, кілі) та системи автоматичної стабілізації. Ця модель демонструє здобувачам освіти практичне значення структури розв'язку неоднорідного ДР та пояснює, чому проєктувальники БПЛА прагнуть уникати резонансних режимів [7, 12, 14].

Приклад 3. Для БПЛА з параметрами Прикладу 2 ($I_y = 0{,}8$ кг·м², $b = 0{,}4$ Н·м·с/рад, $c = 2{,}0$ Н·м/рад) визначити амплітуду вимушених коливань кута тангажу при дії періодичного збурювального моменту з амплітудою $M_0 = 0{,}5$ Н·м та частотою $\omega = 1{,}0$ рад/с. Порівняти з випадком резонансної частоти $\omega = \omega_0$.

Підставивши частинний розв'язок (11) у рівняння (3) та прирівнявши коефіцієнти при $\sin(\omega t)$ та $\cos(\omega t)$, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A та B:

$$(c - I_y\omega^2) \cdot A + b\omega \cdot B = M_0$$
$$-b\omega \cdot A + (c - I_y\omega^2) \cdot B = 0$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо амплітуду вимушених коливань:

$$\Theta = \sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{M_0}{\sqrt{[(c - I_y\omega^2)^2 + (b\omega)^2]}}$$

Для заданих параметрів при $\omega = 1{,}0$ рад/с обчислимо:

$$c - I_y\omega^2 = 2{,}0 - 0{,}8 \cdot 1{,}0^2 = 2{,}0 - 0{,}8 = 1{,}2\ \text{Н} \cdot \text{м/рад}$$

$$b\omega = 0{,}4 \cdot 1{,}0 = 0{,}4\ \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад}$$

$$\Theta = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}2^2 + 0{,}4^2}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}44 + 0{,}16}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}6}} = \frac{0{,}5}{1{,}265} \approx 0{,}395\ \text{рад} \approx 22{,}6°$$

Тепер розглянемо випадок резонансу. Власна частота системи за формулою (12):

$$\omega_0 = \sqrt{(c/I_y)} = \sqrt{(2{,}0/0{,}8)} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58 \text{ рад/с}$$

При $\omega = \omega_0 = 1{,}58$ рад/с:

$$c - I_y\omega_0^2 = 2{,}0 - 0{,}8 \cdot 2{,}5 = 2{,}0 - 2{,}0 = 0$$

$$b\omega_0 = 0{,}4 \cdot 1{,}58 = 0{,}632 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад}$$

$$\Theta_{\text{рез}} = M_0/(b\omega_0) = 0{,}5/0{,}632 \approx 0{,}791 \text{ рад} \approx 45{,}3°$$

Фізична інтерпретація: при резонансній частоті збурення амплітуда вимушених коливань зростає вдвічі порівняно з нерезонансним випадком (45,3° проти 22,6°). Таке значне відхилення кута тангажу є критично небезпечним для стабільності польоту БПЛА і може призвести до втрати керування. Саме тому коефіцієнт демпфування b відіграє ключову роль у забезпеченні безпеки: він обмежує максимальну амплітуду при резонансі величиною $M_0/(b\omega_0)$. Цей приклад наочно демонструє здобувачам освіти практичне значення аналізу неоднорідних диференціальних рівнянь та їх частинних розв'язків для інженерних розрахунків.

Додатково можна побудувати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) системи – залежність амплітуди Θ від частоти збурення ω. АЧХ має характерний резонансний пік при $\omega \approx \omega_0$, висота якого обернено пропорційна коефіцієнту демпфування. Для БПЛА з Прикладу 3 максимум АЧХ досягається при частоті, дещо меншій за ω_0, і становить $\Theta_{max} \approx 0{,}79$ рад. Ширина резонансного піку визначається параметром $b/(2I_y) = 0{,}25$ с⁻¹: чим більше демпфування, тим ширший і нижчий резонансний пік, що забезпечує більшу стійкість БПЛА до збурень у широкому діапазоні частот.

3. Методичні рекомендації щодо впровадження. На основі проведеного аналізу розроблено рекомендації щодо впровадження прикладних задач з динаміки польоту БПЛА у навчальний процес з вищої математики для спеціальності J6 «Авіаційний транспорт».

По-перше, доцільним є поетапне введення прикладного контексту. На лекційних заняттях з теми «ДР першого порядку з відокремлюваними змінними» рекомендується додатково навести фізичну постановку задачі вертикального зльоту БПЛА як мотиваційний приклад перед викладенням теоретичного матеріалу. При вивченні теми «Лінійні однорідні ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами» модель поздовжньої стійкості БПЛА слугує ілюстрацією зв'язку між характером коренів характеристичного рівняння та фізичною поведінкою системи.

По-друге, на практичних заняттях пропонується розв'язувати задачі з конкретними числовими параметрами реальних БПЛА. Наприклад: «Квадрокоптер масою m = 1,5 кг здійснює вертикальний зліт із сумарною тягою двигунів F = 20 Н. Коефіцієнт аеродинамічного опору k = 0,3 Н·с/м. Знайти закон зміни швидкості $v(t)$ та висоти $h(t)$. Визначити усталену швидкість підйому та час досягнення 95% від усталеної швидкості».

По-третє, самостійна робота здобувачів освіти може включати дослідницькі завдання: побудову графіків розв'язків для різних значень параметрів БПЛА, порівняння моделей з квадратичним та лінійним опором, аналіз впливу маси та тяги на характеристики перехідного процесу.

На основі побудованих моделей розроблено комплект задач трьох рівнів складності.

Рівень 1 (базовий) – репродуктивні задачі:

Задача 1.1. Квадрокоптер масою 2 кг з тягою 25 Н і коефіцієнтом опору 0,4 Н·с/м здійснює вертикальний зліт. Знайти усталену швидкість підйому.

Очікуваний результат: $v_{\text{уст}} = (F - mg)/k \approx 13{,}5$ м/с; стала часу $\tau = m/k = 5$ с.

Задача 1.2. Записати характеристичне рівняння для системи з I_y = 0,5 кг·м², b = 0,3 Н·м·с/рад, c = 1,5 Н·м/рад та визначити тип коренів.

Очікуваний результат: характеристичне рівняння $0{,}5\lambda^2 + 0{,}3\lambda + 1{,}5 = 0$; дискримінант $D = -2{,}91 < 0$; корені комплексно-спряжені – коливальне загасання; власна частота $\omega_0 \approx 1{,}73$ рад/с.

Задача 1.3. БПЛА літакового типу масою m = 5 кг рухається горизонтально з початковою швидкістю v_0 = 20 м/с. При вимкненні двигуна на апарат діє лише сила аеродинамічного опору з коефіцієнтом k = 0,5 Н·с/м. Записати диференціальне рівняння руху та знайти закон зміни швидкості $v(t)$.

Очікуваний результат: $v(t) = 20 \cdot e^{-0,1\,t}$ м/с; стала часу $\tau = 10$ с.

Задача 1.4. Гексакоптер масою m = 3,5 кг має сумарну тягу шести двигунів F = 45 Н та коефіцієнт опору k = 0,35 Н·с/м. Обчислити усталену швидкість вертикального зльоту та порівняти з квадрокоптером із Прикладу 1.

Очікуваний результат: $v_{уст} \approx 30,3$ м/с (гексакоптер) проти 17,6 м/с (квадрокоптер); висновок про вплив співвідношення тяга/маса.

Задача 1.5. Для БПЛА літакового типу з моментом інерції I_y = 2,5 кг·м², коефіцієнтом демпфування b = 1,2 Н·м·с/рад та коефіцієнтом відновлювального моменту c = 8,0 Н·м/рад записати характеристичне рівняння та визначити тип стійкості.

Очікуваний результат: $D = -78,56$; коливальне загасання; власна частота $\omega_0 \approx$ 1,77 рад/с.

Рівень 2 (середній) – аналітичні задачі:

Задача 2.1. Для квадрокоптера з Прикладу 1 визначити час досягнення висоти 100 м та швидкість у цей момент.

Очікуваний результат: $t \approx 7,2$ с; $v(7,2) \approx 13,4$ м/с (76% від усталеної).

Задача 2.2. Дослідити вплив збільшення коефіцієнта демпфування вдвічі на час стабілізації БПЛА (Приклад 2). Побудувати графіки $\theta(t)$ для обох випадків.

Очікуваний результат: при b = 0,8 Н·м·с/рад: показник загасання $\alpha = -0,5$ с⁻¹; час стабілізації t_{95} = 6 с (зменшення вдвічі порівняно з 12 с); дискримінант $D = -5,76 < 0$ – коливальний режим зберігається, але коливання загасають швидше.

Задача 2.3. Порівняти динаміку вертикального зльоту квадрокоптера (m = 1,5 кг, F = 20 Н) та БПЛА літакового типу (m = 5 кг, F = 60 Н) при однаковому коефіцієнті опору k = 0,3 Н·с/м. Побудувати графіки $v(t)$ для обох апаратів на одній координатній площині та проаналізувати відмінності.

Очікуваний результат: квадрокоптер: $v_{уст} \approx 17,6$ м/с, $\tau = 5$ с; БПЛА літакового типу: $v_{уст} \approx 36,4$ м/с, $\tau \approx 16,7$ с. Літаковий БПЛА має вищу усталену швидкість, але довший перехідний процес через більшу масу.

Задача 2.4. Для квадрокоптера з Прикладу 2 визначити, як зміниться період власних коливань та час стабілізації, якщо встановити додаткове корисне навантаження масою 0,5 кг (що збільшить момент інерції до I_y = 1,1 кг·м²).

Очікуваний результат: період збільшиться з 4,03 с до 4,66 с; час стабілізації зросте з 12 с до 16,5 с. Висновок про негативний вплив збільшення маси на маневреність.

Задача 2.5. Розрахувати амплітуду вимушених коливань БПЛА літакового типу (I_y = 2,5 кг·м², b = 1,2 Н·м·с/рад, c = 8,0 Н·м/рад) при дії турбулентності з амплітудою збурювального моменту M_0 = 2,0 Н·м та частотою 0,5 Гц. Порівняти з квадрокоптером із Прикладу 3.

Очікуваний результат: амплітуда $\Theta \approx$ 0,26 рад ≈ 14,9° для літакового БПЛА; висновок про вищу стійкість до збурень порівняно з квадрокоптером завдяки більшому демпфуванню та моменту інерції.

Рівень 3 (підвищений) – дослідницькі задачі:

Задача 3.1. Визначити мінімальну тягу двигунів, необхідну для досягнення усталеної швидкості підйому 10 м/с для квадрокоптера заданої маси. Як зміниться час перехідного процесу?

Очікуваний результат: для m = 1,5 кг, k = 0,3 Н·с/м з умови $v_{уст} = (F - mg)/k$ = 10 м/с знаходимо $F = k \cdot v_{уст} + mg = 0,3 \cdot 10 + 1,5 \cdot 9,81 = 3 + 14,7 = 17,7$ Н; стала часу $\tau = m/k = 5$ с не змінюється (залежить лише від m та k); час досягнення 95% швидкості $t_{95} = 3\tau = 15$ с – також незмінний.

Задача 3.2. Для БПЛА з параметрами Прикладу 2 знайти діапазон частот зовнішнього збурення, при яких амплітуда вимушених коливань перевищує початкове відхилення більш ніж у 3 рази.

Очікуваний результат: з умови $\Theta/M_0 > 3/c$ (коефіцієнт динамічності > 3) та формули АЧХ знаходимо діапазон частот $1,35 < \omega < 1,82$ рад/с (або 0,21-0,29 Гц); максимальний коефіцієнт динамічності досягається при резонансній частоті $\omega_0 \approx$ 1,58 рад/с і становить $c/(b\omega_0) \approx 3,16$.

Задача 3.3. Провести порівняльний аналіз поздовжньої стійкості квадрокоптера та БПЛА літакового типу. Для квадрокоптера: I_y = 0,8 кг·м², b = 0,4 Н·м·с/рад, c = 2,0 Н·м/рад. Для літакового БПЛА: I_y = 2,5 кг·м², b = 1,2 Н·м·с/рад, c = 8,0 Н·м/рад. Побудувати графіки $\theta(t)$ для обох апаратів при однаковому початковому відхиленні θ_0 = 0,1 рад та сформулювати висновки щодо конструктивних особливостей.

Очікуваний результат: квадрокоптер: $T \approx 4{,}0$ с, $t_{95} \approx 12$ с; літаковий БПЛА: $T \approx 3{,}5$ с, $t_{95} \approx 12{,}5$ с. Висновок: літаковий БПЛА має вищу частоту коливань завдяки більшому відновлювальному моменту, але подібний час стабілізації.

Задача 3.4. Дослідити вплив квадратичної залежності сили опору від швидкості на динаміку вертикального зльоту квадрокоптера. Замість рівняння (1) розглянути модель $m(dv/dt) = F - mg - kv^2$ з параметрами: m = 1,5 кг, F = 20 Н, k = 0,02 Н·с²/м². Знайти усталену швидкість та порівняти з лінійною моделлю.

Очікуваний результат: для квадратичного опору $v_{уст} \approx 16{,}3$ м/с; порівняння з лінійною моделлю (17,6 м/с) та висновок про більш реалістичну поведінку при високих швидкостях.

Задача 3.5. Побудувати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) для БПЛА з параметрами Прикладу 3 у діапазоні частот від 0,1 до 3,0 рад/с. Визначити резонансну частоту, максимальну амплітуду та смугу пропускання (діапазон частот, де амплітуда перевищує 0,707 від максимальної). Надати рекомендації щодо безпечних режимів польоту.

Очікуваний результат: резонансна частота $\omega_{рез} \approx 1{,}55$ рад/с; максимальна амплітуда $\Theta_{max} \approx 0{,}79$ рад; смуга пропускання $\Delta\omega \approx 0{,}5$ рад/с. Рекомендація: уникати польотів в умовах турбулентності з переважаючою частотою 0,2-0,3 Гц.

Упровадження зазначених задач сприяє формуванню загальних компетентностей, визначених навчальним планом спеціальності J6 «Авіаційний транспорт»: ЗК 03 (навички використання інформаційних і комунікаційних технологій), ЗК 04 (здатність проведення досліджень на відповідному рівні), ЗК 09 (здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу) [6].

У таблиці 1 наведено рекомендований розподіл навчального часу для інтеграції задач моделювання динаміки БПЛА у курс вищої математики відповідно до робочої програми дисципліни.

Таблиця 1

Тематичний план впровадження прикладних задач з динаміки БПЛА

Table 1

Thematic plan for the implementation of applied problems in UAV dynamics

Тема заняття	*Лекції, год*	*Практ., год*	*СРС, год*	*Прикладні задачі*
ДР 1-го порядку з відокремлюваними змінними / First-order differential equations with separable variables	2	2	4	1.1–1.4, 2.3
Лінійні ДР 1-го порядку / First-order linear differential equations	2	2	4	3.4
Лінійні однорідні ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами / Second-order linear homogeneous differential equations with constant coefficients	2	4	6	1.2, 1.5, 2.2, 2.4, 3.3
Лінійні неоднорідні ДР зі спеціальною правою частиною / Linear nonhomogeneous differential equations with a special right-hand side	2	4	6	2.5, 3.2, 3.5
Разом:	*8*	*12*	*20*	

Для забезпечення об'єктивності оцінювання розроблено систему критеріїв (табл. 2), що враховує як математичну коректність розв'язання, так і розуміння фізичного змісту задачі.

Таблиця 2

Критерії оцінювання прикладних задач з динаміки БПЛА

Table 2

Criteria for evaluating applied problems in UAV dynamics

Критерій	*Опис*	*Бали*
Математична коректність / Mathematical correctness	Правильність складання ДР, застосування методу розв'язання, обчислення / Correct formulation of the differential equation, application of the solution method, calculations	0–40
Фізична інтерпретація / Physical interpretation	Розуміння фізичного змісту параметрів, аналіз розмірностей, пояснення результату / Understanding of the physical meaning of parameters, dimensional analysis, explanation of the result	0–25
Графічне представлення / Graphical representation	Побудова графіків розв'язків, їх відповідність аналітичному розв'язку, підписи осей / Construction of solution graphs, their correspondence to the analytical solution, axis labeling	0–20
Практичні висновки / Practical conclusions	Формулювання висновків щодо поведінки БПЛА, рекомендації для практики / Formulation of conclusions regarding UAV behavior, practical recommendations	0–15
Максимум:		*100*

Шкала оцінювання: 90-100 балів – «відмінно» (A); 82-89 балів – «добре» (B); 75-81 балів – «добре» (C); 67-74 балів – «задовільно» (D); 60-66 балів – «задовільно» (E); менше 60 балів – «незадовільно» (FX).

Рекомендації щодо використання програмного забезпечення. Для підвищення ефективності навчання та візуалізації математичних моделей динаміки БПЛА рекомендується застосовувати такі програмні засоби:

MATLAB/Simulink – для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь та побудови графіків. Функції `ode45` та `dsolve` дозволяють отримати як аналітичні, так і чисельні розв'язки рівнянь (1)-(3). Simulink забезпечує візуальне моделювання динамічних систем та дослідження впливу параметрів у реальному часі. Рекомендовані задачі: 2.2, 2.3, 3.3, 3.5.

Python (SciPy, NumPy, Matplotlib) – безкоштовна альтернатива MATLAB з широкими можливостями для наукових обчислень. Бібліотека `scipy.integrate.odeint` забезпечує чисельне інтегрування ДР, а `sympy` – символьні обчислення. Matplotlib дозволяє створювати публікаційної якості графіки для АЧХ та перехідних процесів. Рекомендовані задачі: усі задачі рівнів 2 та 3.

GeoGebra – безкоштовне середовище для інтерактивної візуалізації математичних концепцій. Дозволяє будувати динамічні моделі з повзунками для зміни параметрів (маси, тяги, коефіцієнтів демпфування) та спостерігати вплив на розв'язок у реальному часі. Особливо ефективно для демонстрації на лекціях та самостійного дослідження здобувачами. Рекомендовані задачі: 1.1-1.5, 2.1, 2.2, 2.4.

Приклад коду Python для візуалізації Моделі 1:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
m, F, g, k = 1.5, 20, 9.81, 0.3  # параметри квадрокоптера
a, beta = (F - m*g)/m, k/m
t = np.linspace(0, 25, 500)
v = (a/beta) * (1 - np.exp(-beta*t))
plt.plot(t, v); plt.xlabel('t, c'); plt.ylabel('v, м/с')
plt.title('Вертикальний зліт квадрокоптера'); plt.grid(); plt.show()
```

Використання програмного забезпечення сприяє формуванню компетентності ЗК 03 (навички використання інформаційних і комунікаційних технологій) та дозволяє здобувачам освіти зосередитися на аналізі фізичного змісту задач, а не на рутинних обчисленнях.

Обговорення

Отримані результати узгоджуються з сучасними тенденціями розвитку інженерної освіти та підтверджують ефективність міждисциплінарного підходу до викладання математики в технічних ЗВО. Порівняння з результатами інших дослідників дозволяє визначити місце запропонованого підходу в контексті світових тенденцій математичної освіти інженерів.

У [10] в систематичному огляді літератури з математики в інженерній освіті виділяють три ключові напрями інноваційних практик: використання цифрових технологій, моделювання реальних інженерних задач та міждисциплінарну інтеграцію. Запропонований нами підхід безпосередньо реалізує другий та третій напрями через побудову математичних моделей динаміки БПЛА, що є актуальними для спеціальності J6 «Авіаційний транспорт». На відміну від загальних рекомендацій [10], наше дослідження пропонує конкретні моделі (1)-(12), адаптовані до змісту робочої програми курсу вищої математики.

У [8] досліджували математику як інтегративний компонент STEM-освіти та показали, що ефективна міждисциплінарна інтеграція потребує чіткого встановлення зв'язків між математичним апаратом та предметним контекстом. Наше дослідження підтверджує цей висновок: побудовані моделі вертикального зльоту (1), поздовжньої стійкості (2) та реакції на збурення (3) забезпечують прямий зв'язок між типами диференціальних рівнянь та конкретними задачами динаміки польоту БПЛА. Водночас, на відміну від [8], ми акцентуємо увагу на кількісних розрахунках з реальними параметрами БПЛА, що підвищує достовірність моделей.

У [15] продемонстрували ефективність застосування програмного забезпечення GeoGebra у навчанні математики майбутніх інженерів для візуалізації математичних концепцій. Запропонований нами підхід є комплементарним до [15]: математичні моделі БПЛА можуть бути візуалізовані засобами GeoGebra або іншого програмного забезпечення, що створює синергетичний ефект поєднання прикладного контексту та комп'ютерної візуалізації.

Порівняно з традиційними прикладними задачами механіки (рух тіла у рідині, коливання пружини, електричні кола), задачі з динаміки БПЛА мають низку суттєвих переваг для здобувачів освіти авіаційних спеціальностей. По-перше, вони безпосередньо пов'язані з майбутньою професійною діяльністю, що підвищує внутрішню мотивацію навчання [11, 13]. По-друге, параметри задач мають чіткий фізичний зміст, зрозумілий здобувачам, які паралельно вивчають дисципліни з БПЛА: маса квадрокоптера, тяга двигунів, момент інерції є оперативними характеристиками реальних квадрокоптерів. По-третє, результати розв'язання мають практичну інтерпретацію: усталена швидкість зльоту (6), час перехідного процесу, умови стійкості безпосередньо впливають на експлуатаційні характеристики літальних апаратів [9, 17].

Водночас необхідно визнати певні обмеження запропонованого підходу. Побудовані моделі (1)-(3) є лінеаризованими: реальна динаміка БПЛА описується системами нелінійних диференціальних рівнянь із шістьма ступенями свободи [12, 17]. Модель вертикального зльоту (1) передбачає лінійну залежність сили опору від швидкості, тоді як при високих швидкостях більш точною є квадратична залежність $F_{\text{опору}} = kv^2$. Однак саме лінеаризовані моделі є оптимальними для навчальних цілей, оскільки вони зводяться до типів диференціальних рівнянь, передбачених робочою програмою, і водночас зберігають якісну фізичну адекватність [4, 7, 14].

Перспективними напрямками подальших досліджень є: розробка комп'ютерних симуляцій динаміки БПЛА у середовищі MATLAB або Python для супроводу практичних занять та візуалізації розв'язків; створення лабораторних робіт з використанням мікроконтролерів Arduino та датчиків для експериментальної верифікації математичних моделей; розширення міждисциплінарного підходу на інші розділи курсу вищої математики, зокрема векторна алгебра та просторова навігація БПЛА, інтегральне числення та обчислення аеродинамічних характеристик, теорія ймовірностей та оцінка надійності й безпеки польотів.

Висновки

1. На основі порівняльного аналізу робочих програм навчальних дисциплін «Вища математика» (спеціальність J6 «Авіаційний транспорт») та дисципліни «Керування безпілотними літальними апаратами» встановлено прямі міждисциплінарні зв'язки між типами диференціальних рівнянь та математичними моделями динаміки польоту БПЛА.

2. Побудовано три математичні моделі, адаптовані для навчального процесу: модель вертикального зльоту – рівняння (1), (5), (7); модель поздовжньої стійкості – рівняння (2), (8)-(10); модель реакції на збурення – рівняння (3), (11), (12).

3. Розроблено методичні рекомендації щодо поетапного впровадження прикладних задач з динаміки БПЛА у лекційні та практичні заняття з вищої математики, а також у самостійну роботу здобувачів освіти.

4. Запропонований підхід є універсальним для всіх освітніх програм спеціальності J6 «Авіаційний транспорт» та сприяє формуванню загальних компетентностей ЗК 03, ЗК 04, ЗК 09.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що конфлікту інтересів щодо публікації цього рукопису немає. Крім того, автори повністю дотримувались етичних норм, включаючи плагіат, фальсифікацію даних та подвійну публікацію.

Внесок авторів: усі автори зробили рівний внесок у цю роботу.

У роботі не використано ресурс штучного інтелекту.

Список використаної літератури

1. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) : розпорядження Кабінету Міністрів України від 05.08.2020 № 960-р. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p (дата звернення: 15.03.2026)
2. Кушмуротов, У. Навчання вищої математики на основі компетентнісного та тезаурусного підходів. *Фізико-математична освіта*. 2023. Вип. 38, № 1. С. 36-40. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-005
3. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19 (дата звернення: 15.03.2026)
4. Abdulkareem, A., Oguntosin, V., Popoola, O. M., Idowu, A. A. Modeling and nonlinear control of a quadcopter for stabilization and trajectory tracking. *Journal of Engineering*. 2022. Vol. 2022(1). Article 2449901. https://doi.org/10.1155/2022/2449901
5. Balyk, N., Barna, O., Shmyger, G., Oleksiuk, V. Model of professional retraining of teachers based on the development of STEM competencies. *CEUR Workshop Proceedings*. 2018. Vol. 2104. P. 318–331. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_157.pdf
6. Bolick, M. M., Mikhailova, E. A., Post, C. J. Teaching innovation in STEM education using an unmanned aerial vehicle (UAV). *Education Sciences*. 2022. Vol. 12, No. 3. Article 224. https://doi.org/10.3390/educsci12030224
7. Foehn, P., Romero, A., Scaramuzza, D. Time-optimal planning for quadrotor waypoint flight. *Science Robotics*. 2021. Vol. 6, No. 56. eabh1221. https://doi.org/10.1126/scirobotics.abh1221
8. Goos, M., Carreira, S., Namukasa, I. K. Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM – Mathematics Education*. 2023. Vol. 55, No. 7. P. 1199–1217. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z
9. Luukkonen, T. Modelling and control of quadcopter. *Independent Research Project in Applied Mathematics*. Espoo : Aalto University, 2011. 26 p. URL: https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf
10. Pepin, B., Biehler, R., Gueudet, G. Mathematics in engineering education: a review of the recent literature with a view towards innovative practices. *International Journal of Research in*

Undergraduate Mathematics Education. 2021. Vol. 7. P. 163–188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8
11. Saadati, F., Celis, S. Student motivation in learning mathematics in technical and vocational higher education: development of an instrument. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*. 2023. Vol. 11, No. 1. P. 156–178. https://doi.org/10.46328/ijemst.2194 URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1357187.pdf
12. Saif, E., Eminoğlu, İ. Modelling of quad-rotor dynamics and Hardware-in-the-Loop simulation. *The Journal of Engineering*. 2022. Vol. 2022. P. 937–950. https://doi.org/10.1049/tje2.12152
13. Schukajlow S., Rakoczy K., Pekrun R. Emotions and motivation in mathematics education: where we are today and where we need to go. *ZDM – Mathematics Education*. 2023. Vol. 55, No. 2. P. 249–267. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2
14. Semenikhina, O., Drushlyak, M., Bondarenko, Yu., Kondratiuk, S., Dehtiarova, N. Cloud-based service GeoGebra and its use in the educational process: the BYOD-approach. *TEM Journal*. 2019. Vol. 8, No. 1. P. 65–72. https://dx.doi.org/10.18421/TEM81-08
15. Shadiev, R., Yi, S. A systematic review of UAV applications to education. *Interactive Learning Environments*. 2023. Vol. 31, No. 10. P. 6165–6194. https://doi.org/10.1080/10494820.2022.2028858
16. Siller, H.-S., Günster, S., Geiger, V. Mathematics as a central focus in STEM – theoretical and practical insights from a special study program within pre-service (Prospective) teacher education. *Disciplinary and Interdisciplinary Education in STEM: Changes and Innovations*. Cham : Springer, 2024. P. 317–343. https://doi.org/10.1007/978-3-031-52924-5_15
17. Uspenskyi, V. B., Shyriaieva, N. Controlled flight model of hybrid multicopter for computer implementation. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*. 2022. P. 1–7. https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916487

Стаття надійшла до редакції 18.03.2026
Стаття рекомендована до друку 30.04.2026
Опубліковано 31.05.2026

I. L. YAKUNINA[1]**,** PhD (Technical Sciences),
Associate Professor at the Department of Information Technologies and Aviation Robotic Systems
e-mail: yakunina_irina@sfa.org.ua , ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0327-2349
K. V. SURKOVA[1], PhD (Pedagogy), Associate Professor,
Head of the Department of Information Technologies and Aviation Robotic Systems
e-mail: eskirua@gmail.com , ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1388-7611
[1]*Ukrainian State Flight Academy,*
1 Dobrovolskogo St., Kropyvnytskyi, 25005, Ukraine

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS FOR APPLYING UAV DYNAMICS PROBLEMS IN HIGHER MATHEMATICS COURSE FOR AVIATION SPECIALTIES

Purpose. The aim of this article is to substantiate the feasibility and develop a methodological approach to integrating applied problems related to unmanned aerial vehicle (UAV) flight dynamics modeling into the teaching of the "Differential Equations" section within the Higher Mathematics course for students of specialty J6 "Aviation Transport". The relevance of the study is determined by the growing role of UAVs in the modern aviation industry and the need to strengthen the applied orientation of fundamental mathematical training for future aviation professionals.

Methods. The study was conducted at the Department of Information Technologies and Aviation Robotic Systems of the Ukrainian State Flight Academy. The methodological basis comprises the competency-based approach, principles of interdisciplinary integration and STEM education. A comparative analysis of the syllabi for "Higher Mathematics" and "Unmanned Aerial Vehicle Control" within specialty J6 "Aviation Transport" was carried out. Methods of systems analysis, mathematical modeling, and pedagogical design were employed to establish interdisciplinary connections between the mathematical apparatus of differential equations and UAV flight dynamics problems.

Results. Direct correspondences were established between the types of differential equations studied in the Higher Mathematics course and mathematical models of UAV motion. Three mathematical models adapted for the educational process were developed. First-order differential equations with separable variables were shown to describe the rectilinear motion of a UAV with aerodynamic drag, in particular the vertical takeoff of a quadcopter. Second-order linear homogeneous differential equations with constant coefficients were used to model the longitudinal stability of the aircraft based on the roots of the characteristic equation. Non-homogeneous linear equations with a special right-hand side were applied to describe the UAV response to periodic external disturbances such as wind gusts or engine vibrations, including resonance analysis. Analytical solutions were derived for each model and interpreted in terms of real UAV parameters. A set of applied problems with specific numerical parameters was developed for practical sessions and independent study.

Conclusions. The integration of UAV flight dynamics modeling problems into the Higher Mathematics course enhances student motivation, develops general competencies of abstract thinking, analysis and synthesis (GC 09), research capability (GC 04) and information technology skills (GC 03), and ensures the practical orientation of mathematical training for future aviation professionals. The proposed approach is universal for all educational programs within specialty J6 "Aviation Transport" and can be implemented in the educational process of higher aviation education institutions. A promising direction is the development of computer simulations of UAV dynamics to support practical sessions.

KEY WORDS: *higher mathematics, differential equations, UAV, flight dynamics, mathematical modeling, interdisciplinary connections, aviation education*.

Conflict of interest

The authors declare that there is no conflict of interest regarding the publication of this manuscript. Furthermore, the authors has fully adhered to ethical standards, including those related to plagiarism, data falsification, and duplicate publication.

Authors Contribution: all authors have contributed equally to this work.

The work does not use artificial intelligence resources.

References

1. Concept for the Development of Natural Sciences and Mathematics Education (STEM Education): Decree of the Cabinet of Ministers of Ukraine No. 960-r, dated 05.08.2020. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p (in Ukrainian).
2. Kushmurotov, U. (2023). Teaching higher mathematics based on competence-based and thesaurus approaches. *Physical and Mathematical Education*, *38*(1), 36-40. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-1-005
3. On Education: Law of Ukraine No. 2145-VIII, dated 05.09.2017. https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19 (in Ukrainian).
4. Abdulkareem, A., Oguntosin, V., Popoola, O. M., Idowu, A. A. (2022). Modeling and nonlinear control of a quadcopter for stabilization and trajectory tracking. *Journal of Engineering*, *2022*(1), 2449901. https://doi.org/10.1155/2022/2449901
5. Balyk, N., Barna, O., Shmyger, G., & Oleksiuk, V. (2018). Model of professional retraining of teachers based on the development of STEM competencies. *TEM Journal*, *2104*, 318–331. http://ceur-ws.org/Vol-2104/paper_157.pdf (in Ukrainian).
6. Bolick, M. M., Mikhailova, E. A., Post, C. J. (2022). Teaching innovation in STEM education using an unmanned aerial vehicle (UAV). *Education Sciences*, 12(3), 224. https://doi.org/10.3390/educsci12030224
7. Foehn, P., Romero, A., Scaramuzza, D. (2021). Time-optimal planning for quadrotor waypoint flight. *Science Robotics*,6(56), eabh1221. https://doi.org/10.1126/scirobotics.abm6597
8. Goos, M., Carreira, S., Namukasa, I. K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM – Mathematics Education*, *55*(7), 1199–1217. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z
9. Luukkonen, T. (2011). *Modelling and control of quadcopter*. Espoo: Aalto University. https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf
10. Pepin, B., Biehler, R., Gueudet, G. (2021). Mathematics in engineering education: a review of the recent literature with a view towards innovative practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *7*, 163–188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8
11. Saadati, F., Celis, S. (2023). Student motivation in learning mathematics in technical and vocational higher education. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, *11*(1), 156–178. https://doi.org/10.46328/ijemst.2194

https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1357187.pdf
12. Saif, E., Eminoğlu, İ. (2022). Modelling of quad-rotor dynamics and Hardware-in-the-Loop simulation. *The Journal of Engineering*, 2022, 937–950. https://doi.org/10.1049/tje2.12152
13. Schukajlow, S., Rakoczy, K., Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM – Mathematics Education*, *55*(2), 249–267. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2
14. Semenikhina, O., Drushlyak, M., Bondarenko, Yu., Kondratiuk, S., Dehtiarova, N. (2019). Cloud-based service GeoGebra and its use in the educational process: the BYOD-approach. *TEM Journal*, 8(1), 65–72. https://dx.doi.org/10.18421/TEM81-08 (in Ukrainian).
15. Shadiev, R., Yi, S. (2023). A systematic review of UAV applications to education. *Interactive Learning Environments*, *31*(10), 6165–6194. https://doi.org/10.1080/10494820.2022.2028858
16. Siller, H.-S., Günster, S., Geiger, V. (2024). Mathematics as a central focus in STEM – Theoretical and Practical Insights from a Special Study Program Within Pre-service (Prospective) Teacher Education. In *Disciplinary and Interdisciplinary Education in STEM* (pp. 317–343). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-52924-5_15
17. Uspenskyi, V. B., Shyriaieva, N. (2022). Controlled flight model of hybrid multicopter for computer implementation. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology*, 1–7. https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916487

The article was received by the editors 18.03.2026
The article is recommended for printing 30.04.2026
Published 31.05.2026