https://doi.org/10.32820/2074-8922-2018-60-110-121
**УДК 378.147**

# ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ НОВИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАГІСТРІВ ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

**© Нечуйвітер О.П.[1], Каргапольцева Г.В[1]., Ковальчук А.Г[2]., Чорний С.А.[1]**

*Українська інженерно-педагогічна академія[1]*

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна[2]*

**Інформація про авторів:**

**Нечуйвітер Олеся Петрівна:**ORCID: 0000-0003-2775-8471; olesia.nechuiviter@gmail.com; доктор фізико-математичних наук; завідувач кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики; Українська інженерно-педагогічна академія; вул. Університетська 16, м. Харків, 61003, Україна.

**Каргапольцева Ганна Вікторівна:**ORCID: 0000-0001-7608-2768; kargapoltseva@ukr.net; здобувач кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики; Українська інженерно-педагогічна академія; вул. Університетська 16, м. Харків, 61003, Україна.

**Ковальчук Анастасія Геннадіївна:** ORCID: 0000-0003-1404-2458; kovalchukanastasiia.ak@gmail.com; студентка групи ЯЕ-43; Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна; пл. Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна.

**Чорний Сергій Олександрович:**ORCID: 0000-0003-3983-3926;sergej131280@ukr.net;студент групи ДКІ-ПМ18мг; Українська інженерно-педагогічна академія; вул. Університетська 16, м. Харків, 61003, Україна.

Сучасний досвід багатьох країн свідчить про те, що прискорення переходу на новий виток розвитку неможливе без вітчизняних спеціалістів, які мають знання в галузі передових досягнень науки.

Використання новітніх наукових здобутків відповідає особливостям та характеру майбутньої роботи інженерів-педагогів, які виступають здобувачами освіти протягом всієї професійної діяльності. Це призводить до необхідності вдосконалення та доповнення теоретичного та практичного змісту курсів, що викладаються, з урахуванням загальнодидактичних принципів вищої школи, зокрема принципу науковості.

Із точки зору вимог принципу науковості, викладачу необхідно постійно слідкувати за новою науковою інформацією, систематизувати її в рамках робочої програми, знайомити з нею студентів. Значна кількість навчальних закладів України здійснює підготовку фахівців з інженерних спеціальностей, однак лише в деяких програмах підготовки фахівців відображається теорія нових інформаційних операторів. Однією з актуальних та найбільш часто вживаних інженерних задач є задачі чисельного інтегрування. Тому важливо розробити теоретичні основи викладання даних розділів, зокрема для магістрів, в таких курсах, як: «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевого знання», «Математичні методи опису процесів», «Інноваційні технології та управління ресурсами в галузі», «Технології чисельного моделювання», що в своїй основі використовують нові інформаційні оператори.

***Ключові слова:*** вдосконалення змісту дисциплін, принцип науковості, інтерлінація, інформаційні оператори, чисельне інтегрування, кубатурна формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів.

***Нечуйвитер О.П., Каргапольцева А.В., Ковальчук А.Г., Чорный С.А.***«Педагогические аспекты использования новых информационных операторов для задач численного интегрирования при подготовке магистров инженерно-педагогических специальностей»

Современный опыт многих стран свидетельствует о том, что ускорение перехода на новый виток развития невозможен без отечественных специалистов, которые имеют знания в области передовых достижений науки.

Использование новых научных достижений соответствует особенностям и характеру будущей работы инженеров-педагогов, которые обучаются на протяжении всей профессиональной деятельности. Это приводит к необходимости усовершенствования и дополнения теоретического и практического содержания преподаваемых курсов, с учетом обще дидактических принципов высшей школы, в частности, принципа научности.

С точки зрения требований принципа научности, преподавателю необходимо постоянно следить за новой научной информацией, систематизировать ее в рамках рабочей программы, знакомить с ней студентов. Большое количество учебных заведений Украины осуществляют подготовку специалистов по инженерным специальностям, но лишь в некоторых программах подготовки отображается теория новых информационных операторов. Одной из актуальных и наиболее часто используемых инженерных задач является задача численного интегрирования. Поэтому важно разработать теоретические основы преподавания данных разделов, в частности, для магистров, в таких курсах как: «Теоретические, физические и информационные основы отраслевого знания», «Математические методы описания процессов», «Инновационные технологии и управление ресурсами в отрасли», «Технологии численного моделирования», которые в своей основе используют новые информационные операторы.

***Ключевые слова:*** усовершенствование содержания дисциплины, принцип научности, интерлинация, информационные операторы, численное интегрирование, кубатурная формула приближенного вычисления интегралов.

***O. Nechuiviter*** , ***H. Karhapoltseva***, ***A. Kovalchuk, S. Chornyi*** "Pedagogical aspects of using new informative operators for the problems of numerical integration while training Masters of engineering-pedagogical specialties"

The experience of many countries indicates that faster proceeding to the new level of development is impossible without local specialists who have knowledge in the area of advanced scientific achievements.

The use of the newest scientific accomplishments complies with the features and nature of future professional activity of teachers-engineers who tend to study all through their professional life. It results in the necessity to improve and expand theoretical and practical maintenance of academic courses, taking into account general didactic higher education principles, in particular the principle of scientific nature.

The principle of scientific nature requires the teacher to know new scientific information, to systematize it in the curriculum, and to acquaint students with it. Many Ukrainian educational establishments carry out training of specialists in engineering; however, the theory of new informative operators is presented only in some programs. One of the topical and most often used engineering issues is a problem of numeral integration. Therefore, it is important to develop theoretical bases for teaching in these fields, in particular for Masters' training in such courses as "Theoretical, physical and informative bases of branch knowledge", "Mathematical methods of description of processes", "Innovative technologies and resource management in the industry", "Technology of numeral modeling", that are based on new informative operators.

***Keywords:*** improvement of maintenance of disciplines, principle of scientific nature, interlineation, informative operators, numeral integration, cubature formula of approximate calculation of double integrals.

**Загальна постановка проблеми та аналіз сучасних досліджень**. Сучасний досвід багатьох країн свідчить, що прискорення переходу на новий виток розвитку неможливе без вітчизняних спеціалістів, які мають знання в галузі передових досягнень науки. Високі технології обумовлюють виникнення складних інженерних задач і потребують додаткових математичних знань, умінь та навичок. Тому системі професійної освіти потрібні кадри, рівень підготовки та компетентності яких відповідав би вимогам сьогодення.

Саме використання новітніх наукових здобутків відповідає особливостям та характеру майбутньої роботи інженерів-педагогів, які виступають здобувачами освіти протягом всієї професійної діяльності. Це призводить до необхідності вдосконалення та доповнення теоретичного та практичного змісту курсів, що викладаються, з урахуванням загальнодидактичних принципів вищої школи, зокрема принципу науковості.

Студенти повинні засвоювати науково обґрунтовані факти, явища, процеси, розуміти науково обґрунтовані закони, особливості розвитку та становлення наукового відкриття, володіти методами наукових досліджень, знайомитися з різними напрямками наукових пошуків у відповідній галузі знань, знайомитись із перспективами розвитку наукових гіпотез. Необхідно формувати пізнавальний інтерес у студентів, навчити їх володіти сучасними методами досліджень, стимулювати інтерес до наукових пошуків.

Реалізація принципу науковості не обмежена лише орієнтацією на зміст підручників та навчальних посібників. В умовах стрімкого розвитку науки обсяг інформації збільшується дуже швидко. Найновіші навчальні посібники не завжди містять новітню наукову інформацію, оскільки їх підготовка та друк забирає чимало часу, і матеріал може бути «застарілим» на момент виходу книги. Тому з точки зору вимог принципу науковості, викладачу необхідно постійно слідкувати за новою науковою інформацією, систематизувати її в рамках робочої програми, знайомити з нею студентів, спрямовувати їх на самостійне опрацювання нових наукових джерел[1–3].

Одним із найбільших центрів математичної та комп’ютерної освіти в Україні є Харківщина. Значна кількість навчальних закладів України здійснює підготовку фахівців з інженерних спеціальностей, однак лише в деяких програмах підготовки фахівців відображається теорія нових інформаційних операторів. Теорія, яка створена доктором фізико-математичних наук, професором Литвином Олегом Миколайовичем, ефективно зарекомендувала себе в багатьох галузях науки. Її впровадження при викладанні дозволяє сучасному інженеру-педагогу мате чітке уявлення про:

- нові інформаційні оператори (інтерлінація, інтерфлетація, інтернстріпація, інтерлокація) при математичному моделюванні;
- Сучасні методи обробки інформації для вирішення соціальних проблем суспільства;
- Математичне моделювання соціально-економічних та природничих процесів;
- Спеціалізовані системи комп'ютерної математики;
- Методи розв’язання задач комп’ютерної та сейсмічної томографії;
- Методи розв’язання крайових задач;
- Методи розв’язання інтегро-диференціальних рівнянь.

Однією з актуальних та найбільш часто вживаних інженерних задач є задачі чисельного інтегрування. Тому важливо розробити теоретичні основи викладання цих розділів, зокрема для магістрів, у таких курсах, як: «Теоретичні, фізичні та інформаційні основи галузевого знання», «Математичні методи опису процесів», «Інноваційні технології та управління ресурсами в галузі», «Технології чисельного моделювання».

Питанню чисельного інтегрування функцій декількох змінних присвячено багато досліджень. До найбільш відомих методів, якими користуються сучасні інженери, можна віднести метод центральних прямокутників, метод трапецій, формулу Сімпсона та формулу Гаусса[4].

Якщо проводити класифікацію цих досліджень у багатовимірному випадку за типом задання інформації, то в основному при побудові кубатурних формул наближеного обчислення подвійних інтегралів, інформація про функцію задавалась значеннями в точках. У випадку, коли інформація про функцію задавалась слідами, були побудовані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних з використанням інтерлінації функцій[5]. Однак для подвійних інтегралів такий метод не було розглянуто.

Важливим питанням при побудові та вдосконаленні математичних моделей інженерних задач є питання тестування запропонованих методів, оскільки саме тестування виявляє потенційну спроможність алгоритмів.

Загального підходу до тестування кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від функцій багатьох змінних у випадку різних інформаційних операторів в різних системах комп’ютерної математики, зокрема MathCad, не було. Отже, провести таке дослідження є актуальною задачею.

**Постановка задач дослідження**

З метою розробки теоретичних основ використання нових інформаційних операторів для задач чисельного інтегрування, були сформульовані такі задачі:

1. Побудувати та дослідити кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів у випадку, коли інформація про функцію задана слідами на лініях.
2. Створити програму для тестування кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних у випадку різних інформаційних операторів в системі комп’ютерної математики MathCad.

**Основні матеріали дослідження**

Теорія інтерлінації функцій, а також і кубатурні формули наближеного обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій для випадків, коли інформація задана слідами $f(x,y)$ на лініях та значеннями функції $f(x,y)$ в точках на класі диференційовних функцій, є одним з новітніх напрямків обчислювальної математики, яка не достатньо, або зовсім, не представлена у сучасних посібниках.

**1. Інтерлінація функцій.** Дані гідролокації дна океану є перерізом поверхні океану площинами, що перпендикулярні до поверхні океану та дотикаються до ліній на поверхні (курс корабля, на якому знаходиться локатор). Для того, щоб побудувати рівняння поверхні $z = f\left(x,y\right)$ дна океану (тут $x, y$ – координати точки на поверхні океану в даній системі координат), $z$ – відстань від поверхні океану в точці з координатами $\left(x,y\right)$ до дна), використовуються сліди функції $\phi_k\left(x,y\right) = f\left(x,y\right)$ на лініях $\Gamma_k$ ($\phi_k$ – дані гідролокації, $\Gamma_k$ – курси корабля). Таким чином, задача побудови рельєфу дна океану (задача картографії) є задачею побудови інтерлінанта [5] по даним гідролокації.

У верстатах із програмним управлінням інтерлінація може використовуватися для опису широкого класу поверхонь, при умові, що за основу буде взятий лише каркас цієї поверхні, тобто сліди на деяких наперед вибраних напрямках.

За даними радіолокації можна описати за допомогою інтерлінанта рельєф поверхні частини Землі, Місяця або іншого достатньо віддаленого об'єкту (промінь локатору рухається вздовж деякої раніше підібраної системи ліній $\Gamma_k,\ k=1,\dots,K$ на об'єкті, що вивчається). Відбиття променя від об'єкту дозволяє отримати відстані від точки відображення, тобто значення функції $z=f\left(x,y\right)$ (у відповідно вибраній системі координат $x,y$; $z$ – відстань від точки з координатами $\left(x,y\right)$ до радіолокатора) на вказаних лініях – курсах променя локатору. Обробка такого роду інформації повинна проходити достатньо швидко, тобто використовувати математичний апарат, що найбільше пристосований до використання отриманих даних. Таким апаратом може бути інтерлінація.

**Означення 1.** Інтерлінацією функції $f\left(x,y\right)$ на декількох лініях $\Gamma_k,\ k=1,\dots,K$ будемо називати відновлення функції $f\left(x,y\right)$ за її слідами $\phi_k\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)$ на лініях $\Gamma_k$. Тобто розв'язати задачу інтерлінації за заданими слідами $\phi_k\left(x,y\right)$ – це означає побудувати деяку функцію $T_K f\left(x,y\right)$ (будемо називати їїінтерлінантом), яка має властивість $T_K f\left(x,y\right)=\varphi_k\left(x,y\right)$ на лініях $\Gamma_k$.

**Означення 2.** Під слідом функції $g(x,y)$ на лініях $x_k=k\Delta-\Delta/2,$ $y_j=j\Delta-\Delta/2,$ $k,j=\overline{1,l}$, $\Delta=1/l$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $g(x_k,y),\ 0\le y\le 1$, $g(x,y_j),\ 0\le x\le 1$ (див. Рис.1).

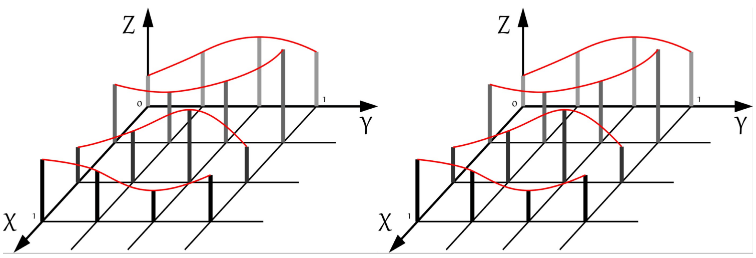


Рис. 1. Сліди функції $g(x,y)$.

**2. Побудова та дослідження кубатурної формули наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних у випадку, коли інформація задана слідами функції $f(x,y)$ на лініях.** Цей процес аналогічний викладеному в роботах про побудову та дослідження кубатурних формул наближеного очислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних із використанням інтерлінації функцій[6]-[9] та про побудову та дослідження кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних із використанням інтерфлетації функцій [10]-[14].

Для класу $C^2_{2,L,L}$ на основі кусково-сталих інтерлінантів. Розглянемо клас функцій, що задовольняють умові Ліпшиця по кожній змінній:

$$\left|f\left(x_1,y\right)-f\left(x_2,y\right)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|,\ \left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,$$

та функція задана слідами на системі взаємноперпендикулярних прямих $f\left(x_k,y\right),\ k=\overline{1,l}$, $f\left(x,y_j\right),\ j=\overline{1,l}$ в області $G=\left[0,1\right]^2$.

В класі функцій виділимо підклас функцій $C^2_{2,L,\overset{\circ}{L}}$, що задовольняє додатковій умові:

$$\left| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2) \right| \le \overset{\circ}{L} |x_1 - x_2||y_1 - y_2|,\quad \overset{\circ}{L} = L^2.$$

Такий клас існує. Наприклад, якщо $f(x,y) = u(x)\,v(y)$, і $|u(x_1) - u(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$, $|v(y_1) - v(y_2)| \le L|y_1 - y_2|$, то

$$\left| f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2) \right| =$$

$$= |u(x_1)v(y_1) - u(x_2)v(y_1) - u(x_1)v(y_2) + u(x_2)v(y_2)| =$$

$$= |(u(x_1) - u(x_2))v(y_1) - (u(x_1) - u(x_2))v(y_2)| = |(u(x_1) - u(x_2))(v(y_1) - v(y_2))| \le$$

$$\le |u(x_1) - u(x_2)||v(y_1) - v(y_2)| \le L|x_1 - x_2|L|y_1 - y_2| = L^2|x_1 - x_2||y_1 - y_2| = \overset{\circ}{L}|x_1 - x_2||y_1 - y_2|.$$

**Означення 3.** Під слідом функції $f(x,y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \Delta/2,$ $y_j = j\Delta - \Delta/2,$ $k, j = \overline{1,\ell}$, $\Delta = 1/\ell$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $f(x_k, y),\ 0 \le y \le 1$, $f(x, y_j),\ 0 \le x \le 1$.

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ell}, \qquad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,\ell},$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}],\ Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2,\ k, j = \overline{1,\ell},\ \Delta = 1/\ell.$$

Розглянемо оператор-інтерлінант

$$Jf(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y)\,h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j)\,H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j)\,h_{0k}(x)\,H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралу

$$I_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy,$$

пропонуються формула

$$\Phi_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y)dxdy,$$

Підставимо в ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x,y)$ та отримаємо явний вигляд відповідних кубатурних формул:

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_0^1 f(x_k, y)dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j)dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy.$$

**Теорема 1.** Нехай $f(x,y)\in C^2_{2,L,\tilde{L}}$ та функція задана $N=2\ell$ слідами на системі взаємноперпендикулярних прямих $f\left(x_k,y\right),\ k=\overline{1,\ell}$, $f\left(x,y_j\right),\ j=\overline{1,\ell}$ в області $G=[0,1]^2$. Кубатурна формула $\Phi_1^2$ для обчислення інтегралу $I_1^2$ має таку оцінку похибки на класі

$$\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)dxdy\right|\le\frac{\tilde{L}}{16\ell^2}=\frac{\tilde{L}}{4N^2}.$$

**Доведення.** Введемо оператори:

$$J_1f(x,y)=\sum_{k=1}^{\ell}f\left(x_k,y\right)h_{0k}(x),\ k=\overline{1,\ell},\ J_2f(x,y)=\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,y_j\right)H_{0j}\left(y\right),\ j=\overline{1,\ell},$$

тоді для оператора-інтерлінанта $Jf\left(x,y\right)$ справедлива тотожність

$$Jf=\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f.$$

Для кожної функції $f\left(x,y\right)$ виконується оцінка

$$\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)dxdy\right|\le\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-Jf(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left|f(x,y)-\left(J_1+J_2-J_1J_2\right)f\left(x,y\right)\right|dxdy=$$

$$=\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|f\left(x,y\right)-f\left(x_k,y\right)-f\left(x,y_j\right)+f\left(x_k,y_j\right)\right|dxdy\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\tilde{L}\left|x-x_k\right|\left|y-y_j\right|dxdy=\tilde{L}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|x-x_k\right|dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|y-y_j\right|dy=$$

$$=\frac{\tilde{L}}{4}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\left(-\left(x_k-x\right)^2\Big|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\left(x-x_k\right)^2\Big|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)\left(-\left(y_j-y\right)^2\Big|_{y_{j-\frac12}}^{y_j}+\left(y-y_j\right)^2\Big|_{y_j}^{y_{j+\frac12}}\right)=$$

$$=\frac{\tilde{L}}{4}\frac{\Delta^2}{2}\frac{\Delta^2}{2}\ell^2=\tilde{L}\frac{\Delta^2}{16}\times\frac{1}{\Delta^2}\ \Delta^2=\tilde{L}\frac{\Delta^2}{16}=\frac{\tilde{L}}{16\ell^2}=\frac{\tilde{L}}{4N^2}.$$

Теорема 1 доведена.

Розглянемо $H_1^{2,1}\left(M,\tilde{M}\right)$ – клас дійсних функцій, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що наступні частинні похідні порядку обмежені, тобто $\left|f^{(1,0)}(x,y)\right|\le M$, $\left|f^{(0,1)}(x,y)\right|\le M$, $\left|f^{(1,1)}(x,y)\right|\le\tilde{M}$, $r=1,2$.

**Теорема 2.** Нехай $f(x,y) \in H_1^{2,1}\left(M, \pm\right)$ та функція задана $N = 2\ell$ слідами $f\left(x_k, y\right),\ k = \overline{1,\ell}$, $f\left(x, y_j\right),\ j = \overline{1,\ell}$ на системі взаємноперпендикулярних прямих в області $G = \left[0,1\right]^2$. Для кубатурної формули

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{\ell} \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int\limits_0^1 f(x_k, y)dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_0^1 f(x, y_j)dx \int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy,$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\ k, j = \overline{1,\ell},\quad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

справедливі наступні оцінки:

$$\rho\left(I_1^2, \Phi_1^2\right) = \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left( f(x,y) - Jf(x,y) \right) dxdy \right| \le \frac{\tilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\tilde{M}}{4N^2}.$$

**Доведення.** Використавши представлення залишку

$$f(x,y) - Jf\left(x,y\right) = \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{y_j}^{y} f^{(1,1)}\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta$$

наближення $f(x,y)$ оператором інтерлінантом через $f^{(1,1)}(x,y)$, маємо

$$\rho\left(I_1^2, \Phi_1^2\right) = \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left( f(x,y) - Jf(x,y) \right) dxdy \right| \le \left| \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[ f(x,y) - Jf\left(x,y\right) \right] dxdy \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{y_j}^{y} f^{(1,1)}\left(\xi,\eta\right) d\xi d\eta \right| dxdy \le$$

$$\le \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \left|x - x_k\right| dx \int\limits_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left|y - y_j\right| dy = \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \left( -\frac{\left(x - x_k\right)^2}{2} \Bigg|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{\left(x - x_k\right)^2}{2} \Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times$$

$$\times \left( -\frac{\left(y - y_j\right)^2}{2} \Bigg|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{\left(y - y_j\right)^2}{2} \Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) = \tilde{M} \ell^2 \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\tilde{M}}{16} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\tilde{M}}{4N^2}.$$

Теорема 2 доведена.

**3. Тестування кубатурної формули наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана на лініях.**

Перевірка відповідності між реальними та очікуваними результатами розв'язаних завдань, є однією з найважливіших задач висококваліфікованого інженера-педагога.

Найчастіше це виконується за допомогою тестування складених програм.

Розрізняють два види тестування [15]:

– тестування програм з метою виявлення помилок їх проектування і кодування обчислювальних алгоритмів розв'язання задач;
– тестування обчислювальних алгоритмів, реалізованих конкретними програмами, з метою дослідження їх функціональних можливостей при розв'язанні задач із даного класу.

Основним об'єктом уваги в даній роботі є другий вид тестування. До вузлових питань другого виду тестування відносяться:

– визначення набору характеристик обчислювального алгоритму;
– класифікація розв'язуваних задач і складання тестових наборів;
– розв'язання тестових задач, обчислення значень характеристик та їх оцінок;
– обробка, інтерпретація і використання результатів тестування;
– автоматизація процедур тестування.

Тестування запропонованих алгоритмів проводиться в системі комп'ютерної математики MathCad.

Предметом тестування в даному випадку є кубатурна формула обчислення інтегралів від функцій двох змінних виду

$$I_1^2 = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$$

,

що побудована на основі використання операторів інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$ задається різними інформаційними операторами – слідами функції $f(x,y)$ на взаємноперпендикулярних лініях.

Метою тестування є перевірка та виявлення на наборі тестових задач як функціональних можливостей запропонованої кубатурної формули.

Для тестування кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних розглядався наступний набір тестових задач:

$f(x,y)=const$ - , $f(x,y)=g(x)+h(y)$, $f(x,y)=g(x)h(y)$, $f(x,y)=g(x)+h(y)+v(x)w(y)$.

Даний набір тестових задач є відкритим для поповнення.

Для випадку, коли інформація задана слідами функції $f(x,y)$ на лініях. Метою тестування є перевірка теоретичних тверджень про похибку наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних у випадку, коли інформація про функцію $f(x,y)$ задана її слідами на системі взаємноперпендикулярних прямих (див. Таб. 1−3).

Про похибки наближення функцій операторами сплайн-інтерлінації. Наведемо деякі твердження про похибки наближення функцій операторами сплайн-інтерлінації, що є теоретичним підґрунтям тестування.

Якщо $O_1 f(x,y) = \sum_{k=0}^{l_1} f(x_k,y)\, s_{\mu,k}(x)$, $O_2 f(x,y) = \sum_{j=0}^{l_2} f(x,y_j)\, s_{\nu,j}(y)$ - оператори сплайн-інтерполяції за змінними $x, y$ відповідно:

$$O_1 f(x_k,y) = f(x_k,y), \quad k=\overline{0,l_1}, \qquad O_2 f(x,y_j) = f(x,y_j), \quad j=\overline{0,l_2},$$

то оператор $Of(x,y) = (O_1+O_2-O_1O_2)\, f(x,y)$ є оператором інтерлінації функцій на системі взаємноперпендикулярних прямих $x=x_k,\quad k=\overline{0,l_1},\quad y=y_j,\quad j=\overline{0,l_2}$:

$$Of\left(x_k, y\right) = f\left(x_k, y\right), \quad k = \overline{0, l_1} \qquad Of\left(x, y_j\right) = f\left(x, y_j\right), \quad j = \overline{0, l_2}$$

, .

$$Rf\left(x, y\right) = (I - O) f(x, y)$$

Для похибки наближення неперервних та диференційовних $Of\left(x, y\right)$ функцій операторами сплайн-інтерлінації справедливе співвідношення $Rf\left(x, y\right) = R_1 R_2 f\left(x, y\right)$ $R_1 f\left(x, y\right) = (I - O_1) f(x, y)$ $R_2 f\left(x, y\right) = (I - O_2) f(x, y)$ , де , .

$$\varepsilon_{l_1, l_2} = \|Rf\|_{C(D)} \qquad \varepsilon_{l_1, l_2} = O\left(\varepsilon_1 \varepsilon_2\right)$$

Для оцінки похибки справедлива рівність , де $\varepsilon_1 = \|R_1 f\|_{C(D)}$, $\varepsilon_2 = \|R_2 f\|_{C(D)}$ $l_1 = l_2 = l$ $x_0 = y_0, x_1 = y_1, ..., x_l = y_l$ . Зокрема, якщо , , то $\varepsilon_{l, l} = O\left(\varepsilon^2\right), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \to 0, \quad l \to \infty$

.

$$H_1^{2,1}\left(M, \tilde{M}\right)$$

Для класу на основі інтерлінантів з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих.

$$f(x, y) = g(x) + h(y) \quad \left(x, y\right) \in D$$

**Лема 1.** Якщо функція , , то

$$f(x, y) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x_1, y_1) = 0 \qquad (x_1, y_1) \in D$$

, де .

**Доведення.**

$$f(x, y) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x_1, y_1) = g\left(x\right) + h(y) - g(x_1) - h(y) - g(x) -$$

$$-h(y_1) + g(x_1) + h(x_1) = 0$$

.

Лема 3.1. доведена.

$$f\left(x_k, y\right), \ k = \overline{1, l} \quad f\left(x, y_j\right), \ j = \overline{1, l}$$

**Приклад1.** Нехай функція задана слідами , на системі

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \ k, j = \overline{1, l} \quad \Delta = \frac{1}{l}$$

взаємноперпендикулярних прямих , ,

$$G = \left[0, 1\right]^2 \qquad I_1^2$$

в області . Для обчислення розглянемо кубатурну формулу

$$\Phi_1^2 = \sum_{k=1}^{l} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_0^1 f(x_k, y) dy +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} \int_0^1 f(x, y_j) dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy - \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} f(x_k, y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy$$

.

Використаємо наступні квадратурні формули

$$\Phi 1=\sum_{k=1}^{l} g(x_k)\int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \quad \Phi 2=\sum_{j=1}^{l} h(y)\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy,$$

для наближеного обчислення інтегралів

$$I1=\int_0^1 g(x)dx, \quad I2=\int_0^1 h(y)dy.$$

На класі $H_1^{2,1}\left(M,\tilde{M}\right)$ для функції

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2x-2y\right)-\cos\left(2x+2y\right)\right)=\sin 2x\times\sin 2y$$

справедливі наступні чисельні результати наближеного обчислення за кубатурою формулою $\Phi_1^2$. Обчислення проводились в СКМ MathCad.

*Таблиця 1*

Обчислення $I1$ за допомогою кубатурної формули $\Phi 1$ для $g(x)$.

| $l$ | $I1$ | $\Phi 1$ | $E1=\left\|I1-\Phi 1\right\|$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.708073418273571 | 0.715503321376845 | 0.007429903103274 |
| 6 | 0.708073418273571 | 0.711362190684827 | 0.003288772411256 |
| 10 | 0.708073418273571 | 0.709254918900011 | 0.00118150062644 |
| 15 | 0.708073418273571 | 0.708598189191786 | 0.000524770918215 |
| 20 | 0.708073418273571 | 0.708368534937797 | 0.000295116664225 |
| 25 | 0.708073418273571 | 0.708262273104046 | 0.000188854830475 |

*Таблиця 2*

Обчислення $I2$ за допомогою кубатурної формули $\Phi 2$ для $h(y)$

| $l$ | $I2$ | $\Phi 2$ | $E2=\left\|I2-\Phi 2\right\|$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.708073418273571 | 0.715503321376845 | 0.007429903103274 |
| 6 | 0.708073418273571 | 0.711362190684827 | 0.003288772411256 |
| 10 | 0.708073418273571 | 0.709254918900011 | 0.00118150062644 |
| 15 | 0.708073418273571 | 0.708598189191786 | 0.000524770918215 |
| 20 | 0.708073418273571 | 0.708368534937797 | 0.000295116664225 |
| 25 | 0.708073418273571 | 0.708262273104046 | 0.000188854830475 |

*Таблиця 3*

Порівняння добутку похибок $E1$, $E2$ з похибкою $E$.

| $l$ | $\Phi_1^2$ | $I_1^2$ | $E=\left\|I_1^2-\Phi_1^2\right\|$ | $E1\times E2$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.501312762205496 | 0.50136796566562 | 0.000055203460124 | 0.000055203460124 |
| 6 | 0.501357149641647 | 0.50136796566562 | 0.000010816023973 | 0.000010816023973 |
| 10 | 0.501366569721889 | 0.50136796566562 | 0.00000139594373 | 0.00000139594373 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 0.501367690281103 | 0.50136796566562 | 0.000000275384517 | 0.000000275384517 |
| 20 | 0.501367878571774 | 0.50136796566562 | 0.000000087093845 | 0.000000087093845 |
| 25 | 0.501367929999473 | 0.50136796566562 | 0.000000035666147 | 0.000000035666147 |

Таблиця 4

Порівняння добутку похибок $E1$, $E2$ з похибкою $E$.

| I | $\Phi_1^2$ | $I_1^2$ | $E = \left\| I_1^2 - \Phi_1^2 \right\|$ | $Eclas$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.501312762205496 | 0.50136796566562 | 0.000055203460124 | 0.010577037235677 |
| 6 | 0.501357149641647 | 0.50136796566562 | 0.000010816023973 | 0.004668200670297 |
| 10 | 0.501366569721889 | 0.50136796566562 | 0.00000139594373 | 0.001674574318242 |
| 15 | 0.501367690281103 | 0.50136796566562 | 0.000000275384517 | 0.000743428060258 |
| 20 | 0.501367878571774 | 0.50136796566562 | 0.000000087093845 | 0.000418015624301 |
| 25 | 0.501367929999473 | 0.50136796566562 | 0.000000035666147 | 0.000267481836891 |

**Висновки**

1. Удосконалення змісту дисциплін є актуальною задачею сучасності, що призводить до необхідності доповнення новітніми науковими досягненнями змістовної частини курсів.

2. Важливою умовою вдосконалення змісту є дотримання загальнодидактичних принципів, зокрема принципу науковості.

3. При опрацюванні теоретичних основ використання нових інформаційних операторів для задач чисельного інтегрування при підготовці магістрів інженерно-педагогічних спеціальностейбуло побудувано та досліджено кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів у випадку, коли інформація про функцію задана слідами на лініях, створено програму для тестування кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від функцій двох змінних в системі комп'ютерної математики MathCad.

4. Представлені теоретичні основи використання нових інформаційних операторів для задач чисельного інтегрування можуть бути застосовані при підготовці магістрів інженерно-педагогічних спеціальностей, з метою вдосконалення змісту дисциплін, що викладаються, та для найбільш повної реалізації загально дидактичного принципу науковості вищої школи.

**Перспективи подальших досліджень**

Із метою подальшого вдосконалення теоретичних та практичних основ дисциплін, що викладаються студентам інженерно-педагогічних спеціальностей, наповненням курсів новітньою науковою інформацією, розробити теоретичну основу для обчислення двовимірних інтегралів, використовуючи оператор-інтерполянт, побудований на основі оператора-інтерлінанта, у випадку, коли інформація про функцію задається в точках.

**Список використаних джерел**

1. Гладуш В. А. Педагогіка вищої школи: теорія, практика, історія: навч. посіб. / В. А. Гладуш, В. І. Лисенко. – Дніпропетровськ, 2014. – 416 с.

2. Алексюк А. М. Педагогіка вищої освіти України. Історія. Теорія: підруч. для студентів, аспірантів та молодих викладачів вищ. навч. закладів / А. М. Алексюк. – Київ : Либідь, 1998. – 560 с.

3. Лунячек В. Е. Аналіз освітніх ресурсів інтернету / В. Е. Лунячек // Комп'ютер у школі та сім'ї. – Київ : Преса України. – 2002. – № 1. – С. 17-20.

4. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином, 2007. – 636 с.

5. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1.: Алгоритми : монографія / І. В. Сергієнко [та ін.]; Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – Київ : Наук. думка, 2011. – 447 с.

6. Литвин О. М. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 1998. – № 1. – С. 23-28.

7. Литвин О. М. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D - коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічнінауки. – 2010. – № 3. – С. 24-29.

8. Литвин О. М. 2 D - коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51-61.

9. Литвин О. М. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – № 1. – С. 66-72.

10. Lytvyn O.N.3D fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline interflatation/ O. N. Lytvyn, O. P. Nechuiviter // Journal of Automation and Information Sciences. – 2012. – Vol. 44,Iss. 3.– Pp. 45-56.

11. Литвин О. Н. Обоснование точности кубатурных формул для приближенного вычисления 3D - интегралов от быстроосциллирующих функций с использованием интерфлетации / О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер // Электронное моделирование. – 2012. – Т. 34, № 5. – С. 206-217.

12. Литвин О. М. Наближене обчислення 3 D - коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Математичні машини та системи. – 2012. – № 4. – С. 127-113.

13. Литвин О. Н. Приближенное вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций трех переменных с использованием лагранжевойполиномиальнойинтерфлетации /О. Н. Литвин, О. П. Нечуйвитер // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 97-106.

14.Lytvyn O. N. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation/ O. N. Lytvyn, O. P. Nechuiviter // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50, Iss. 3. – Pp. 410-418.

15. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : монографія / І. В. Сергієнко [та ін.]; Ін-т кібернетикиім. В. М. Глушкова НАН України. – Київ : Наук.думка, 2011. – 348 с.

**References**

1. Hladush, VA & Lysenko, VI 2014, *Pedahohika vyshchoi shkoly: teoriia, praktyka, istoriia* [Pedagogics of higher school: theory, practice, history], Dnipropetrovsk.

2. Aleksiuk, AM 1998, *Pedahohika vyshchoi osvity Ukrainy. Istoriia. Teoriia* [Pedagogics of higher education of Ukraine. History. Theory], Lybid, Kyiv.

3. Luniachek, VE 2002, 'Analiz osvitnikh resursiv internetu', *Kompiuter u shkoli ta simi*, Presa Ukrainy, Kyiv, no. 1, pp. 17-20.

4. Bahvalov, NS, Zhidkov, NP & Kobelkov, GM 2007, *Chislennye metody* [Numeral methods], Binom, Moskva.

5. Serhiienko, IV et al. 2011, *Optymalni alhorytmy obchyslennia intehraliv vid shvydko ostsyliuiuchykh funktsii ta yikh zastosuvannia* [Optimal algorithms of calculation of integrals of fast oscillating functions and their application], vol. 1.Alhorytmy, Instytut kibernetyky imeni V. M. Hlushkova Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy, Naukova dumka, Kyiv.

6. Lytvyn, OM & Nechuiviter, OP 1998, 'Kubaturni formuly dlia obchyslennia koefitsiientiv Furie funktsii dvokh zminnykh z vykorystanniam splain-interlinatsii' [Cubature formulas for calculating Fouriercoefficientsoffunctionsoftvariablesusingspline-interlineation], *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichni nauky*, no 1, pp. 23-28.

7. Lytvyn, OM & Nechuiviter, OP 2010, 'Pro odnu kubaturnu formulu dlia obchyslennia 2 D - koefitsiientiv Furie z vykorystanniam interlinatsii funktsii' [About one cubature formula to calculation of 2-D Fourier coefficients with using interlineation of functions], *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy. Matematyka. Pryrodoznavstvo. Tekhnichninauky*, no. 3, pp. 24-29.

8. Lytvyn, OM & Nechuiviter, OP 2011, '2 D - koefitsiienty Furie na klasi dyferentsiiovnykh funktsii ta splain-interlinatsiia'[2D - Fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline-interlineation], *Tavrycheskyi vest nyk ynformatyky y matematyky*, no. 1, pp. 51-61.

9. Lytvyn, OM & Nechuiviter, OP 2012, 'Nablyzhene obchyslennia podviinykh intehraliv z vykorystanniam lahranzhevoi polinomialnoi interlinatsii'[Approximatecalculationof double integralsusingpolynomial Lagrange interlineation], *Tavriiskyi visnyk informatyky ta matematyky*, no. 1, pp. 66-72.

10. Lytvyn, ON &Nechuiviter, OP 2012, '3D fourier coefficients on the class of differentiable functions and spline interflatation', *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 44, iss. 3, pp. 45-56.

11. Litvin, ON & Nechujviter, OP 2012, 'Obosnovanie tochnosti kubaturnyh formul dlja priblizhennogo vychislenija 3D - integralov ot bystrooscillirujushhih funkcij s ispolzovaniem interfletacii'[Justification of accuracy of cubature formula for computing 3 D - integrals of fast oscillating functions using interflatation], *Jelektronnoe modelirovanie*, vol. 34, no. 5, pp. 206-217.

12. Lytvyn, OM & Nechuiviter, OP 2012, 'Nablyzhene obchyslennia 3 D - koefitsiientiv Furie na klasi Heldera z vykorystanniam kuskovo-staloi splain-interfletatsii' [Approximatecalculationof 3 D Fouriercoefficientsonthe Gelderclassoffunctions usingpiecewise spline-interflatation], *Matematychni mashyny ta systemy*, no. 4, pp. 127-113.

13. Litvin, ON & Nechujviter, OP 2014, 'Priblizhennoe vychislenie integralov ot bystrooscillirujushhih funkcij treh peremennyh s ispolzovaniem lagranzhevoj polinomialnoj interfletacii'[Approximate calculation of integrals of fast oscillating functions of three variables by using Lagrangian polynomial interflatation], *Kibernetika i sistemnyj analiz*, no. 3, pp. 97-106.

14. Lytvyn, ON &Nechuiviter, OP 2014, 'Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation',*Cybernetics and Systems Analysis*,vol. 50, iss. 3, pp. 410-418.

15. Serhiienko, IV et al. 2011, *Optymalni alhorytmy obchyslennia intehraliv vid shvydkoostsyliuiuchykh funktsii ta yikh zastosuvannia* [Optimal algorithms of calculation of integralsof fast oscillating functions and their application, vol. 2.Zastosuvannia, Instytut kibernetyky imeni.V. M. Hlushkova Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy, Naukova dumka, Kyiv.

*Стаття надійшла до редакції 02.09.2018р.*