УДК 681.142

L-КОДЫ В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Виктор Краснобаев[1], Сергей Кошман[2], Алина Янко[3]

[1] Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, Украина
krasnobaev@karazin.ua

[2] Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка, ул. Артема, 44 Харьков, Украина
s_koshman@ukr.net

[3] Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Первомайский проспект 24, г. Полтава, 36011, Украина
al9_yanko@ukr.net

Рецензент: Ирина Лисицкая, д-р тех. наук, проф., член-корреспондент Академии наук прикладной радиоэлектроники, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина
lisitska@karazin.ua

Поступила март 2017

Аннотация. *В статье разрабатывается метод коррекции ошибок данных в системе остаточных классов (СОК), основанный на применении корректирующих свойств L-кодов, которые образуются при использовании взаимно попарно не простых оснований. Данный метод позволяет расширить класс корректируемых ошибок, что расширяет корректирующие возможности L-кодов. Представлены примеры выполнения операции коррекции, а также описаны особенности реализации устройства для обнаружения ошибок данных.*

Ключевые слова*: система счисления, система остаточных классов, коррекция ошибок, компьютерная система, непозиционная кодовая структура.*

1 Введение

В настоящее время интенсивно исследуются возможности R-кодов для реализации арифметических операций, а также для коррекции ошибок в системе остаточных классов (СОК) [1,2]. Это объясняется простотой структуры R-кодов и хорошими корректирующими возможностями, а также сравнительной простотой их построения для любого заданного минимального кодового расстояния.

Представляется важным и интересным рассмотрение так называемых линейных кодов (L-кодов) в СОК. В литературе эти коды описываются скорее качественно, чем количественно. Дело в том, что до настоящего времени никто не занимался глубоким изучением свойств систем остаточных классов, основания которых не являются взаимно простыми числами. Подобная СОК также обладает определенными корректирующими свойствами, что обусловливает необходимость оценки возможности и целесообразности применения таких систем для повышения надежности компьютерных систем и компонент обработки целочисленных данных (КСКОЦД).

Цель статьи – разработка метода коррекции ошибок данных в СОК, расширяющего корректирующие возможности L-кодов.

2 Основная часть

Однако, если ограничить класс возможных ошибок в отдельных остатках кодовых слов, возможности L-кодов существенно расширяются.

Рассмотрим *лемму 1*. Для любого целого числа $A=(a_1, a_2, ..., a_n)$ в системе остаточных классов с основаниями m_i $(i=\overline{1, n})$ и для любой пары оснований m_i и m_j должно выполняться условие

$$(a_i - a_j) \equiv 0(\bmod d_{ij}),$$

где $d_{ij}(m_i, m_j)$ наибольший общий делитель оснований m_i и m_j, а $i,\ j = \overline{1, n}$; $i \neq j$.

Для определения необходимых и достаточных условий для обнаружения однократных ошибок с помощью L-кодов по результатам леммы 1 сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для обнаружения ошибок в остатке по произвольному основанию m_i $(i = \overline{1, n})$ числа $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, заданного в системе остаточных классов с основаниями $m_1, ..., m_n$, необходимо, чтобы основание m_i имело хотя бы один, отличный от единицы, общий делитель с остальными основаниями m_i $(i \neq j)$.

Доказательство. Пусть НОД $d_{ij}(m_i, m_j)$ определен для произвольных оснований МА $(i \neq j)$, и ошибка произошла по основанию m_i, т.е. $a_i = a_i + \Delta a_i$. Покажем, что выражение $(a_i - a_j) \bmod d_{ij}$ эквивалентно $\Delta a_i (\bmod d_{ij})$. Согласно лемме выполняется следующее равенство

$$(a_i - a_j) = 0(\bmod d_{ij}).$$

Запишем выражение

$$a_i + \Delta a_i = a_i (\bmod m_i)$$

в виде

$$a_i + \Delta a_i = m \cdot m_i + a_i,$$

где m – целое число. Из последнего выражения определим искаженный остаток

$$a_i = a_i + \Delta a_i - m \cdot m_i.$$

Тогда можно записать

$$a_i - a_j = \left[(a_i - a_j) + (-mkd_{ij}) + \Delta a_i \right].$$

Так как

$$(a_i - a_j) \equiv 0(\bmod d_{ij}) \text{ и } -mkd_{ij} \equiv 0(\bmod d_{ij}),$$

где $m_i = kd_{ij}$, а k – натуральное число, то

$$(a_i - a_j) \equiv \Delta a_i (\bmod d_{ij}).$$

Очевидно, что при отсутствии общих делителей, т.е. если $d_{ij} = 1$, тогда $\Delta a_i \equiv (\bmod d_{ij})$. Это и доказывает необходимое условие теоремы.

Необходимое условие теоремы является достаточным, если ошибка не кратна делителю d_{ij}.

Действительно,

$$(md_{ij} + a_{ij}) \neq 0(\bmod d_{ij}),$$

для $0 < a_{ij} < d_{ij}$.

Теорему 1 можно сформулировать еще следующим образом.

Для обнаружения ошибки в остатке по произвольному основанию m_i числа $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, заданного в СОК, необходимо и достаточно, чтобы ошибка Δa_i была не кратна делителям d_{ij} и $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$, где d_i – НОД делителей $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, ..., d_{in})$.

На основании результатов теоремы 1 составим алгоритм обнаружения ошибок. Проверяем остаток по основанию m_i. Для этого определим совокупность значений

$$a_1 - a_2 = a_{12} (\bmod d_{12}),$$
$$a_1 - a_3 = a_{13} (\bmod d_{13}),$$

$$a_1 - a_n = a_{1n} (\mathrm{mod}\, d_{1n}) .$$

Если $a_{1i} = (\mathrm{mod}\, d_{1i})$, то проверяется второй остаток и т. д.

2. Для получения значений a_{ij} $(i \neq j)$ составляем матрицу

$$G = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} \ldots & a_{23} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

При составлении матрицы G не обязательно указывать истинное числовое значение a_{ij}, достаточно представить его отличительный признак

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \textit{если } a_i - a_j = 0(\mathrm{mod}\, d_{ij}), \\ 1, \textit{если } a_i - a_j \neq 0(\mathrm{mod}\, d_{ij}). \end{cases}$$

Если определитель матрицы $|G| = 0$, то число $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ – правильное, а если $|G| \neq 0$, то число A – неправильное.

Рассмотрим соображения, позволяющие упростить вышеприведенный алгоритм.

Исходя из того, что

$$a_i - a_j \equiv [d_{ij} - (a_i - a_j)](\mathrm{mod}\, d_{ij}) ,$$

определитель $|G|$ можно не находить. Достаточно определить диагональные элементы матрицы G и добавить одно значение a_{n+1}, т.е.

$$a_{12}, a_{23}, a_{34}, ..., a_{n-1\,n}, a_{n1} .$$

Легко проверить, что при таких значениях a_{ij}, возможно, установить не только факт искажения кодового слова, но и определить номер искаженного остатка.

С целью определения необходимых и достаточных условий для исправления однократных ошибок с помощью L-кодов сформулирована и доказана следующая теорема.

<u>Теорема 2</u>. Для исправления ошибки в остатке по произвольному основанию m_i числа $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, заданного в системе остаточных классов с основаниями $m_1, m_2, ..., m_n$, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(d_{ik} - 1)(d_{ij} - 1) \geq m_i - 1 - (K_{d_{ik}} + K_{d_{ij}} - K_{[d_{ik}, d_{ij}]}) , \tag{1}$$

где $d_{ik} = (m_i, m_k)$, $d_{ij} = (m_i, m_j)$, $K_{d_{ik}}$ - количество делителей, кратных d_{ik}; $K_{d_{ij}}$ - количество делителей, кратных d_{ij};

$K_{[d_{ik}, d_{ij}]}$ - количество делителей, кратных наименьшему общему кратному (НОК) $[d_{ik}, d_{ij}]$ делителей d_{ik} и d_{ij}, $i \neq j$.

Доказательство. Вычислим значения a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}. Если ошибка произошла по основанию m_i, то $a_{ik} = 0$, а $a_{ij} \neq 0$ и $a_{jk} = 0$. Число различных комбинаций a_{ij}, a_{ik} равно $(d_{ij} - 1) \cdot (d_{ik} - 1)$, где $(d_{ij} - 1)$ – число возможных значений величины a_{ij} ($a_{ij} \neq 0$), $(d_{ik} - 1)$ – число возможных значений a_{ik} ($a_{ik} = 0$), а число возможных значений ошибок по основанию m_i равно $m_i - 1$ ($\Delta a_i \neq 0$) за вычетом числа необнаруженных ошибок. Число необнаруженных ошибок состоит из числа ошибок, кратных делителю $d_{ik} - K_{d_{ik}}$ и кратных делителю $d_{ik} - K_{d_{ik}}$. Таким образом, число возможных значений обнаруживаемых ошибок равно

$$m_i - 1 - (K_{d_{ik}} + K_{d_{ij}} - K_{[d_{ik}, d_{ij}]}).$$

Для обеспечения соответствия возможным значениям ошибок по основанию m_i необходимо выполнение неравенства (1). Что и требовалось доказать.

Необходимое условие теоремы 2 является достаточным, если различным значениям ошибок Δa_i соответствуют различные значения произведения $a_{ik} \cdot a_{ij}$, и наоборот.

Действительно, в этом случае между возможными значениями Δa_i и значениями произведения $a_{ik} \cdot a_{ij}$ существует взаимно однозначное соответствие, что и определяет возможность однозначно определить величину ошибки.

На основании теоремы 2 составим алгоритм коррекции ошибок по произвольному основанию m_i:

1. Определим номер искаженного остатка. Для этого вычислим значения

$$a_1 - a_2 = a_{12} (\bmod d_{12}),$$
$$a_2 - a_3 = a_{23} (\bmod d_{23}),$$
$$\dots$$
$$a_{n-1} - a_n = a_{n-1n} (\bmod d_{n-1n}),$$
$$a_n - a_1 = a_{n2} (\bmod d_{n1}).$$

Если все остатки $a_{ij} = 0 (\bmod d_{ij})$, то число A правильное. Если ошибка произошла по основанию m_i, то $a_{ij} \neq 0$ и $a_{ik} \neq 0$ и, таким образом, проверяемое число $A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n)$ является неправильным.

2. По значениям a_{ij} и a_{ik} обращаемся в блок констант ошибок, где выбираем соответствующее значение Δa_i.

3. Производим коррекцию числа A в остатке a_i, и получаем правильное число $A = A - \Delta A$, т.е.

$$A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n).$$

Если в сокращенной СОК за счет исключения основания, по которому произошла ошибка, можно однозначно представить число A, то вместо определения по значениям a_{ij} и a_{ik} величины ошибки Δa_i, непосредственно вычислим значения правильного остатка a_i.

Рассмотрим этот алгоритм коррекции ошибок.

1. Вычислим значение остатков $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n1}$.

2. Определим номер искаженного остатка. Пусть ошибка произошла по m_i основанию. В этом случае это основание исключается, а число A представляется по основаниям $m_1, m_2, ..., m_n$, т.е.

$$A = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n).$$

3. Произведем свертку числа A в позиционный код.

4. Определим истинное значение искаженного остатка

$$a_i = A - \left[A / m_i \right] m_i,$$

где $[x]$ – целая часть x, не превосходящая x. Исправленное число

$$A_{исп} = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n).$$

Определим условия, при которых возможно исключение из СОК некоторых оснований. Для этого представим основания исходной СОК в каноническом виде

$$m_1 = \beta_{11}^{a_{11}} \beta_{12}^{a_{12}} \dots \beta_{1l_1}^{a_{1l_1}},$$

$$m_2 = \beta_{21}^{a_{21}} \beta_{22}^{a_{22}} \ldots \beta_{2l_2}^{a_{2l_2}} ,$$
$$\ldots$$
$$m_n = \beta_{n1}^{a_{n1}} \beta_{n2}^{a_{n2}} \ldots \beta_{nl_n}^{a_{nl_n}} ,$$
$$M = \beta_1^{a_1} \beta_2^{a_2} \ldots \beta_k^{a_k} .$$

Для однозначного определения числа A, заданного в СОК с основаниями $m_1, m_2, ..., m_n$, и лежащего в диапазоне $[0, M)$ можно исключить только те основания, для которых $\beta_m = \beta_{il_i}$, ($m = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n}$). При этом необходимо, чтобы $a_m \geq a_{il_i}$.

Таким образом, определены необходимые и достаточные условия коррекции ошибок методом исключения искаженного основания. Этими условиями является одновременное выполнение равенства и неравенства

$$\beta_m = \beta_{il_i} ,\ a_m \geq a_{il_i} \tag{2}$$

Пусть задана СОК основаниями $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 12$, $m_4 = 18$. При этом $M = [4, 6, 12, 18] = 36$. В соответствии с условием возможности коррекции ошибок (2) определим те основания СОК, которые можно исключить. Представим основания СОК в каноническом виде: $m_1 = 2^2$, $m_2 = 2 \cdot 3$, $m_3 = 2^2 \cdot 3$, $m_4 = 2 \cdot 3^2$ и $M = 2^2 \cdot 3^2$. Очевидно, что искомые основания - m_1, m_2, m_3. Произведем проверку, для чего составим частные значения НОК:

$$M_1 = [6, 12, 18] = 36 ,$$
$$M_2 = [4, 12, 18] = 36 ,$$
$$M_3 = [4, 6, 18] = 36 ,$$
$$M = [4, 6, 12] = 36 .$$

Частное значение НОК $M_4 < 36$, что подтверждает правильность определения исключаемых оснований из заданной СОК.

Выше был представлен алгоритм обнаружения и исправления ошибок в СОК посредством L-кодов. Пусть при вычислении значений $(a_k - a_{k+1}) \bmod d_{kk+1}$ определено, что $a_{i-1\,i} \neq 0$, $a_{i\ i+1} \neq 0$, а все остальные значения равны

$$a_{k\,k+1} = (a_k - a_{k+1}) \bmod d_{k\,k+1} = 0 .$$

Тогда утверждается, что число А неправильное, а ошибка присутствует в остатке по основанию m_i, т.е.

$$A = (a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) .$$

Обращаясь по значениям $a_{i-1\ i}$ и $a_{i\ i+1}$ в блок констант ошибок определим значение ошибки Δa_i и далее определим истинное значение остатка

$$a_{i\,исп} = a_i - \Delta a_i .$$

Исправленное число представится в виде

$$A_{исп} = (a_1, a_2, ..., a_{i\,исп}, ..., a_n) .$$

Для исправления ошибки с помощью разработанного метода, необходимо, чтобы ошибка Δa_i была одновременно не кратна двум делителям $d_{i-1\ i}$ и $d_{i\ i+1}$, что ограничивает класс корректируемых ошибок.

Таким образом, очевидна необходимость разработки эффективных методов и алгоритмов, позволяющих расширить класс возможных корректируемых ошибок.

Метод коррекции однократных ошибок, позволяющий исправлять ошибки, кратные одному из делителей $d_{i-1\ i}$ или $d_{i\ i+1}$, состоит в следующем.

Пусть задана СОК со взаимно не простыми основаниями, т.е. НОД

$$(m_1, m_2, ..., m_n) \geq 2\,.$$

И пусть задано число в СОК

$$A_{исп} = (a_1, a_2, ..., a_n)\,.$$

Определим все значения $a_{k\,k+1}$, т.е. $a_{12}, a_{23}, a_{34}, ..., a_{n-1\;n}, a_{n\;1}$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $a_{i\;\;i+1} \neq 0$, а все остальные значения $a_{k\;\;k+1} \neq 0$.

Так как

$$a_{i\;\;i+1} = (a_i - a_{i+1}) \bmod d_{i\;\;i+1} \neq 0\,,$$

то ошибка может присутствовать только в остатках по основаниям m_i или m_{i+1}. В связи с этим возможны две гипотезы:

- ошибка присутствует в остатке a_i;
- ошибка присутствует в остатке a_{i+1}.

Прежде чем рассмотреть процесс коррекции ошибок предлагаемым методом, сформулируем и докажем теорему, результат доказательства которой используем при определении процесса сходимости совокупности чисел вида

$$A^{(k_i)} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{ik_i}, a_{i+1}, ..., a_n)$$

к правильному числу

$$A^{(\rho)} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i\rho}, a_{i+1}, ..., a_n)\,.$$

Предварительно рассмотрим лемму.

Лемма 2. Сумма, разность и произведение любых кодовых слов являются также кодовыми словами.

Теорема 3. Пусть в упорядоченной ($m_{i-1} < m_i\,; i = \overline{1, n}$) системе остаточных классов с основаниями $m_1, m_2, ..., m_n$ задано неправильное (искаженное в одном остатке) число

$$A = (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

и пусть

$$\Delta a_i = a_i - a_i = k_i d_{i-1\,i}\,.$$

Тогда в совокупности значений

$$a_{ik_i} = (a_i - k_i d_{i-1\,i}) \bmod m_i$$

существует такое единственное значение $a_{i\rho}$, при котором число

$$A^{(\rho)} = (a_1, a_2, a_{i\rho}, ..., a_n)$$

является правильным числом, где $d_{i-1\,i}(m_{i-1}, m_i)$, а k_i может принимать значения $k_i = 1, 2, ..., m_i / d_{i-1\,i} - 1$.

Доказательство. Покажем, что существует такое значение $a_{i\rho_1}$, при котором число

$$A = (a_1, a_2, ..., a_{i\rho}, ..., a_n)$$

является правильным. По условию теоремы ошибка Δa_i кратна делителю $d_{i-1\,i}$. Выражение $k_i d_{i-1\,i}$ содержит все возможные числа кратные $d_{i-1\,i}$.

Таким образом, найдется хотя бы одно значение $k_i = \rho_1$, при котором

$$\Delta a_{i\rho_1} = \rho_1 d_{i-1\,i}\,, \text{ а } a_{1\rho_1} = a_i - \Delta a_{i\rho_1}\,.$$

Покажем, что $A^{(\rho_1)}$ единственное правильное число из совокупности чисел вида $A^{(k_i)}$.

Предположим, что существует такое значение $a_{1\rho_2} = a_i - \rho_2 d_{i-1\,i}$, при котором число $A^{(\rho_2)}$ также является правильным. Тогда в соответствии с леммой 2 число

$$A^{(\rho_1)} - A^{(\rho_2)} = (0, ..., a_{i\,\rho_1} - a_{i\,\rho_2}, ..., 0)$$

является правильным.

Если число $A^{(\rho_1)} - A^{(\rho_2)}$ правильное, то в соответствии с леммой 1 имеем

$$(\rho_2 - \rho_1)d_{i-1\,i} \equiv 0(\mathrm{mod}\, d_{1-i}),$$
$$(\rho_2 - \rho_1)d_{i-1\,i} \equiv 0(\mathrm{mod}\, d_{2-i}),$$
$$\ldots$$
$$(\rho_2 - \rho_1)d_{i-1\,i} \equiv 0(\mathrm{mod}\, d_{n-i}).$$

Если $i \neq n$, то единственно правильным числом $A^{(\rho_1)} - A^{(\rho_2)}$ будет нулевое кодовое слово. Это обусловлено тем, что $d_{i-1\,i} \neq 0$ и $d_{i-1\,i}$ не равно НОК делителей $d_{1i}, d_{2i}, ..., d_{ni}$. Причем неравенство $d_{i-1\,i} \neq [d_{1i}, d_{2i}, ..., d_{ni}]$ противоречит условию произвольного выбора оснований $m_1, m_2, ..., m_n$. Следовательно, выполняется следующее равенство

$$A^{(\rho_1)} - A^{(\rho_2)} = (0, 0, ..., 0, ..., 0).$$

Т.о., $\rho_1 = \rho_2$, что подтверждает единственность существования ρ_1, при котором

$$A^{(\rho_1)} = (a_1, a_2, ..., a_{i\,\rho_1}, ..., a_n)$$

является правильным. Что и требовалось доказать.

Разработаем алгоритм коррекции ошибок, основанный на результате теоремы 3.

Рассмотрим первую гипотезу. Так как $a_{i-1\;i} = 0$, то ошибка кратна делителю $d_{i-1\;i}$. Поэтому ошибка по основанию может принимать значения

$$\Delta a_i = kd_{i-1\,i},$$

для $k_i = 1, 2, ..., m_i / d_{i-1\,i} - 1$.

Вычислим совокупность значений

$$a_{ik_1} = (a_i - k_i d_{i-1\,i}) \,\mathrm{mod}\, m_i.$$

Если в этой совокупности найдется такое значение a_{im}, при котором

$$A^{(m)} = (a_1, a_2, ..., a_{im}, ..., a_n)$$

правильное число, то первая гипотеза справедлива, т.е. ошибка присутствует в остатке по основанию m_i. В этом случае исправленным числом является,

$$A_{исп} = A^{(m)},$$

где

$$a_{im} = (a_i - md_{i-1\,i}) \,\mathrm{mod}\, m_i.$$

Если при всех значения a_{ik_i} число $A^{(k_i)}$ неправильное, то значение a_i истинно, а ошибка произошла в остатке по основанию m_{i+1}. Так как $a_{i+1\;i+2} = 0$, то ошибка по основанию m_{i+1} кратна делителю $d_{i+1\;i+2}$ т. е.

$$\Delta a_{i+1} = k_{i+1} d_{i+1\;i+2},$$

где $k_{i+1} = 1, 2, ..., m_{i+1} / d_{i+1\,i+2} - 1$.

Определим совокупность значений

$$a_{i+1\,k_{i+1}} = (a_{i+1} - k_{i+1} d_{i+1\;i+2}) \,\mathrm{mod}\, m_{i+1}.$$

В соответствии с теоремой 3 в этой совокупности обязательно найдется такое единственное число $a_{i+1\,N}$, при котором $A^{(N)} = (a_1, a_2, ..., a_{i+1\,N}, ..., a_n)$ - правильное число.

Отметим, что очередность проверки гипотез произвольная и не влияет на вероятность коррекции ошибок. Однако с целью повышения быстродействия определения номера искаженного остатка, в первую очередь, необходимо проверить гипотезу, для которой значение $m_k / d_{k-1\;k}$ $(k = i, i+1)$ будет наименьшим.

Рассмотрим пример реализации разработанного алгоритма коррекции ошибок с помощью

L -кодов.

Пусть задана СОК основаниями $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 12$, $m_4 = 18$. При этом $M = 36$, $d_{12} = 2$, $d_{23} = 6$, $d_{34} = 6$, $d_{41} = 2$. Объем кодовых слов представлен в табл. 1.

Таблица 1 – Таблица кодовых слов

Число A в десятичном коде	Число A в СОК			
	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	0	4	4	4
5	1	5	5	5
6	2	0	6	6
7	3	1	7	7
8	0	2	8	8
9	1	3	9	9
10	2	4	10	10
11	3	5	11	11
12	0	0	0	12
13	1	1	1	13
14	2	2	2	14
15	3	3	3	15
16	0	4	4	16
17	1	5	5	17
18	2	0	6	0
19	3	1	7	1
20	0	2	8	2
21	1	3	9	3
22	2	4	10	4
23	3	5	11	5
24	0	0	0	6
25	1	1	1	7
26	2	2	2	8
27	3	3	3	9
28	0	4	4	10
29	1	5	5	11
30	2	0	6	12
31	3	1	7	13
32	0	2	8	14
33	1	3	9	15
34	2	4	10	16
35	3	5	11	17

Необходимо определить правильность числа $A = (3, 5, 7, 7)$, и в случае искажения исправить его.

1. Определим значения $a_{12} = 0$, $a_{23} = 2$, $a_{34} = 0$, $a_{41} = 0$. Так как $a_{23} \neq 0$, то число A неправильное, и ошибка произошла во втором либо в третьем остатках.

2. Так как $m_2 / d_{12} > m_3 / d_{34}$, то первая гипотеза состоит в том, что ошибка предполагается

в остатке по основанию m_3.

3. Вычислим значения $a_{3k_3} = a_3 - k_3 d_{23}$ для $k_3 = 1$.

Получим $a_{3k_3} = a_3 - k_3 d_{23} = 7 - 1 \cdot 6 = 1$. При этом полученное число $A^{(1)} = (3, 5, 1, 7)$ не являются кодовым словом (см. табл. 1), т. е. первая гипотеза не верна. Ошибка произошла в остатке по основанию m_2.

4. Исправим число A. Для этого по значениям $k_3 = 1, 2$ определим искомое значение $a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21}$

$$k_2 = 1,\ a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21} = 5 - 1 \cdot 2 = 3,$$

$$k_2 = 3,\ a_{2k_2} = a_2 - k_2 d_{21} = 5 - 2 \cdot 2 = 2.$$

В итоге, получим два кодовых слова: $A^{(1)} = (3, 3, 7, 7)$ и $A^{(2)} = (3, 1, 7, 7)$.

Из табл. 1 следует, что единственно правильным кодовым словом является значение $A^{(2)}$, т.е. $A_{исп} = A^{(2)} = (3, 1, 7, 7)$.

Таким образом, разработанный метод коррекции ошибок в СОК позволяет расширить класс корректируемых ошибок. Это существенно расширяет корректирующие возможности L-кодов в СОК.

Рассмотрим работу устройства для обнаружения ошибок с помощью L-кодов, в соответствии с рассмотренным выше алгоритмом. Это устройство содержит входной регистр, сумматоры по модулю m_i и d_{1i} ($i = \overline{2, n}$) и ($n - 1$) – входной элемент ИЛИ. Работа этого устройства соответствует описанному выше алгоритму обнаружения ошибок.

Пусть СОК задана основаниями $m_1 = 4$, $a_{23} = 2$, $m_3 = 12$. При этом

$$\prod_{t=1}^{3} m_i = 288,\ L = M = [4, 6, 12] = 12,\ d_{12} = 2,\ d_{13} = 4.$$

Определим правильность числа

$$A = ((11), (001), (0111)).$$

На выходе сумматора по модулю m_2 получим $\overline{a_2} = m_2 - a_2 = 0101$, на выходе сумматора по модулю $m_3 - \overline{a_3} = m_3 - a_3 = 0101$. На выходе сумматора по модулю d_{12} получим

$$(a_1 + \overline{a_2}) = 0 (\mathrm{mod}\, d_{12}),$$

на выходе сумматора d_{13}

$$(a_1 + \overline{a_3}) = 0 (\mathrm{mod}\, d_{13}).$$

На выходе устройства отсутствует сигнал, т. е. число A правильное (см. Табл. 2).

Пусть число A искажено по основанию m_2 и пусть $\Delta a_2 = 011$, т.е.

$$A = ((0011), (0100), (0111)).$$

На выходе сумматора по модулю m_2 получим число $\overline{a_2} = m_2 - a_2 = 010$, а на выходе сумматора по модулю m_3 число $\overline{a_3} = m_2 - a_3 = 0101$.

На выходе сумматора по модулю d_{12} получим $a_1 + \overline{a_2} = 1 (\mathrm{mod}\, d_{12})$, а по модулю d_{13} - $a_1 + \overline{a_3} = 0 (\mathrm{mod}\, d_{13})$.

На выходе устройства получим операнд 0001, т.е. число неправильное.

Как следует из рассмотренных примеров выполнения операции коррекции ошибок, с помощью L-кодов достаточно просто реализуется процесс обнаружения ошибок. Время обнаружения ошибок для СОК, заданной любой системой оснований, всегда равно трем условным временным тактам и не зависит (как это наблюдается для R-кодов и помехоустойчивых кодов в позиционной системе счисления (ПСС)) от числа информационных оснований.

Таблица 2 - Таблица кодовых слов

A_i	Кодовые числа A в СОК		
	m_1	m_2	m_3
0000	00	000	0000
0001	01	001	0001
0010	10	010	0010
0011	11	011	0011
0100	00	100	0100
0101	01	101	0101
0110	10	000	0110
0111	11	001	0111
1000	00	010	1000
1001	01	011	1001
1010	10	100	1010
0101	11	101	1011

Приведем некоторые соображения, которые позволят упростить вышеприведенное устройство для обнаружения ошибок.

Вначале докажем соотношение $(a_1+\overline{a_i})=(\overline{a_1}+a_i)\bmod d_{1i}$, на основании которого составим алгоритм коррекции ошибок. Пусть в операнде $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ искажен остаток m_j, т. е. $a_j=(a_j+\Delta a_j)\bmod m_j$.

Запишем систему равенств:

$$k_1=a_i-a_j=a_i+(m_j-a_j)=(a_i-a_j+m_j-\Delta a_j)\bmod m_j,$$

$$k_2=a_j-a_i=a_j+\Delta a_j-a_i=(a_j-a_i+a_j)=\bmod m_j.$$

Сложим эти равенства и получим

$$k_1+k_2=m_j(\bmod m_j)$$

или

$$k_1+k_2=0(\bmod d_{ij}).$$

Таким образом, показано, что

$$(a_1+\overline{a_i})=(\overline{a_1}+a_i)\bmod d_{1i},$$

т. е. в устройстве для обнаружения ошибок вместо $n-1$ сумматоров по модулю m_i достаточно иметь всего один сумматор по модулю m_1.

Разработанный алгоритм реализация процесса обнаружения ошибок определяется следующими соотношениями:

$$a_2+m_1-a_1=(a_2+\overline{a_1})\bmod d_{12},$$

$$a_3+m_1-a_1=(a_3+\overline{a_1})\bmod d_{13}.$$

Вышерассмотренный вариант устройств для определения ошибок в СОК позволяет гарантировано обнаружить факт искажения числа A, однако при этом не определяется номер основания, по которому произошло искажение остатка.

Рассмотрим работу устройства, определяющего номер остатка, по которому произошло искажение числа A.

Пусть СОК задана основаниями $m_1=4$, $m_2=6$, $m_3=12$, $m_4=18$. При этом $L=M=[4,6,12,18]=36$, $d_{12}=2$, $d_{23}=6$, $d_{34}=6$, $d_{41}=2$, $A=(0,2,8,2)$.

Пусть число A искажено по основанию m_4, т.е.

$$a_4 = (a_4 - \Delta a_4) \bmod m_4 ,$$

и пусть $\Delta a_4 = 5$.

На выходе сумматора по модулю m_2 получим значение $\overline{a_2} = m_2 - a_2 = 4$; по модулю m_3 получим - $\overline{a_3} = m_3 - a_3 = 4$, на выходе сумматора по модулю – $m_4 - \overline{a_4} = m_4 - a_4 = 11$. На выходе сумматора по модулю d_{12} получим $(a_1 + \overline{a_2}) = 0(\bmod d_{12})$,

по модулю d_{23} - $(a_1 + \overline{a_3}) = 0(\bmod d_{23})$,

по модулю d_{34} - $(a_3 + \overline{a_4}) = 0(\bmod d_{34})$,

по модулю d_{41} - $(a_4 + \overline{a_1}) = 1(\bmod d_{41})$.

На входах сумматоров по модулю d_{34} и d_{41} присутствует ненулевой результат операции $(a_m + \overline{a_j}) \bmod d_j$, поэтому открыт четвертый элемент И, т.е. на 4-й выходной шине присутствует сигнал. Отсюда следует, что ошибка произошла в четвертом остатке a_4 (Табл. 3). Данная процедура может быть использована в некоторых системах обработки данных [3,4].

На основании доказанной теоремы 2 необходимым условием обнаружения ошибки в остатке по модулю m_i является условие (1). Данное условие является и достаточным, если ошибка $\Delta a_i = a_i - a_i$ не кратна одновременно делителям $d_{i-1\ i}$, d_{ii+1}, т.е. следующим двум делителям $d^{(i-1)}_{\Delta a_i} = (d_{i-1\ i}, \Delta a_i) = 1$, $d^{(i+1)}_{\Delta a_i} = (d_{ii+1}, \Delta a_i) = 1$.

В соответствии с результатами теоремы 2 построим алгоритм коррекции ошибок по произвольному основанию m_i:

1. Определим все возможные значения типа $(a_i - a_{i+1}) = a_{i\ i+1}(\bmod d_{i\ i+1})$,

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = a_{12}(\bmod d_{12}), \\ a_2 - a_3 = a_{23}(\bmod d_{23}), \\ \qquad \cdots \\ a_{n-1} - a_n = a_{n-1\ n}(\bmod d_{n-1\ n}), \\ a_n - a_1 = a_{n1}(\bmod d_{n1}) \end{cases} \tag{3}$$

2. Если все значения (3) равны нулю, то либо ошибки нет, либо она кратна каждому из делителей d_{i-1}, $d_{i\,i+1}$, (предполагается однократная ошибка).

3. Если $a_{i-1\ i} \neq 0$, $a_{i\ i+1} \neq 0$, а все остальные значения $a_{ij} = 0$, то ошибка произошла по модулю m_i, т.е. $a_i = a_i + \Delta a_i$ $(1 \le \Delta a_i \le m_i - 1)$.

В соответствии с доказанной теоремой 3 необходимым условием для исправления ошибки в остатке a_i является условие (4), записанное в общем виде

$$(d_{ik} - 1)(d_{ij} - 1) \ge \delta(\Delta a_i), \tag{4}$$

где

$$\delta(\Delta a_i) = m_i - 1 - (K_{d_{ik}} + K_{d_{ij}} - K_{[d_{ik}, d_{ij}]}),$$

$K_{d_{ik}}$ - число возможных делителей ошибки Δa_i по основанию m_i (т.е. число возможных делителей числа $m_i - 1$), кратных значению d_{ik};

$K_{d_{ikj}}$ - число возможных делителей ошибки Δa_i по основанию m_i, кратных значению d_{ij};

$K_{[d_{ik}, d_{ij}]}$ - число возможных делителей ошибки Δa_i по основанию m_i, кратных значению НОК чисел d_{ik} и d_{ij}.

Таблица 3 - Таблица кодовых слов для набора оснований СОК

A	Кодовые слова в СОК				A	Кодовые слова в СОК			
	m_1	m_2	m_3	m_4		m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	0	0	0	18	2	0	6	0
1	1	1	1	1	19	3	1	7	1
2	2	2	2	2	20	0	2	8	2
3	3	3	3	3	21	1	3	9	3
4	0	4	4	4	22	2	4	10	4
5	1	5	5	5	23	3	5	11	5
6	2	0	6	6	24	0	0	0	6
7	3	1	7	7	25	1	1	1	7
8	0	2	8	8	26	2	2	2	8
9	1	3	9	9	27	3	3	3	9
10	2	4	10	10	28	0	4	4	10
11	3	5	11	11	29	1	5	5	11
12	0	0	0	12	30	2	0	6	12
13	1	1	1	13	31	3	1	7	13
14	2	2	2	14	32	0	2	8	14
15	3	3	3	15	33	1	3	9	15
16	0	4	4	16	34	2	4	10	16
17	1	5	5	17	35	3	5	11	17

Условие (4) является и достаточным, если различным возможным значениям $\delta(\Delta a_i)$ ошибок по основанию m_i $(i=\overline{1,n})$ соответствуют различные пары величин a_{ik} и a_{ij}.

Рассмотрим пример конкретного выполнения операции коррекции ошибок в СОК, заданной основаниями $m_1=4$, $m_2=6$, $m_3=12$. В этом случае таблица кодовых слов $L=[4,6,12]=12$ представляется в виде табл. 2. Отметим, что $d_{12}=(4,6)=2$, $d_{23}=(6,12)=6$, $d_{31}=(4,12)=4$; $\delta(\Delta a_1)=2$ (табл. 4), $\delta(\Delta a_2)=3$ (табл. 5), $\delta(\Delta a_3)=8$ (Табл. 6), где

$$\delta(\Delta a_1)=m_1-1-(K_{d_{12}}+K_{d_{31}}-K_{[d_{12},d_{31}]}),$$
$$\delta(\Delta a_2)=m_2-1-(K_{d_{12}}+K_{d_{23}}-K_{[d_{12},d_{23}]}),$$
$$\delta(\Delta a_3)=m_3-1-(K_{d_{23}}+K_{d_{31}}-K_{[d_{23},d_{31}]}).$$

Пусть необходимо определить правильность числа $A=(11,100,0111)$. В первый и второй входные регистры заносится исходное число A. Первый сумматор первой группы определяет значение $\overline{a_1}=m_1-a_1=01$, второй – $\overline{a_2}=m_2-a_2=010$, а третий - $\overline{a_3}=m_3-a_3=0101$. Первый сумматор по модулю d_{ij} определяет значение $a_{12}=(a_1+\overline{a_2})\bmod_{12}$, второй - $a_{23}=(a_2+\overline{a_3})\bmod_{23}$, третий - $a_{31}=(a_3+\overline{a_1})\bmod_{13}$. Таким образом, с выходов соответствующих дешифраторов только на второй коммутатор поступают значения $a_{12}=1$, $a_{13}=3$, в соответствии с которыми (см. Табл. 6) он определяет значение инвертируемой по модулю m_2 ошибки, т.е. $\Delta\overline{a_2}=3$, которое через второй дешифратор в двоичном коде поступает на первый вход второго сумматора, на второй вход которого поступает значение $a_2=a_2+\Delta a_2=100$. Сумматор второй группы определяет результат операции

$$(\Delta\overline{a_2}+a_2)\bmod m_2=(m_2-\Delta a_2+a_2+\Delta a_2)\bmod m_2=001.$$

Таблица 4 – Таблица решений

a_{31}	$a_{12}=1$
1	$\Delta\overline{a_1}=1$
2	–
3	$\Delta\overline{a_1}=3$

Таблица 5 – Таблица решений

a_{23}	$a_{12}=1$
1	$\Delta\overline{a_2}=5$
2	–
3	$\Delta\overline{a_2}=3$
4	–
5	$\Delta\overline{a_2}=1$

Таблица 6 – Таблица решений

a_{31}	a_{23}				
	1	2	3	4	5
1	$\Delta\overline{a_3}=7$	–	$\Delta\overline{a_3}=3$	–	$\Delta\overline{a_3}=11$
2	–	$\Delta\overline{a_3}=2$	–	$\Delta\overline{a_3}=10$	–
3	$\Delta\overline{a_3}=1$	–	$\Delta\overline{a_3}=9$	–	$\Delta\overline{a_3}=5$

На вход устройства поступает исправленное число (см. Табл. 2) $A=(11,001,0111)$. Рассмотренные выше алгоритмы и устройства могут быть использованы в [5,6].

3 Выводы

Предложенные алгоритмы коррекции ошибок в СОК с взаимно попарно не простыми основаниями позволяют относительно просто реализовать процедуру обнаружения и исправления однократных ошибок в КСКОЦД. Рассмотренные алгоритмы обнаружения и исправления однократных ошибок позволяют локализовать ошибочное основание и исправить ошибку в одном остатке за пять условных временных тактов для любого числа оснований СОК. Основные достоинства L - кодов в СОК заключаются в технической и временной простоте процедуры обнаружения места ошибки и ее локализации. При этом, по простоте декодирующих схем L - коды не имеют аналогов, как в ПСС, так и в СОК.

Ссылки

[1] Krasnobayev V.A. A method for increasing the reliability of verification of data represented in a residue number system / V.A. Krasnobayev, S.A. Koshman, M.A. Mavrina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol. 50. – Issue 6. – P. 969 – 976.

[2] Krasnobayev V.A. A method for arithmetic comparison of data represented in a residue number system / V.A. Krasnobayev, A.S. Yanko, S.A. Koshman // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – Vol.52. – Issue 1. – P. 145 – 150.

[3] Karpenko O. Discrete Signals with Multi-Level Correlation Function / O. Karpenko, A. Kuznetsov, V. Sai, Yu. Stasev // Telecommunications and Radio Engineering. – 2012. – Vol. 71. – Issue 1. – P. 91 – 98.

[4] Stasev Yu.V. Formation of pseudorandom sequences with improved autocorrelation properties / Yu.V. Stasev, A.A. Kuznetsov, A.M. Nosik // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – Vol.43. – Issue 1. – P. 1 – 11.

[5] Kuznetsov A.A. The statistical analysis of a network traffic for the intrusion detection and prevention systems / A.A. Kuznetsov, A.A. Smirnov, D.A. Danilenko, A. Berezovsky // Telecommunications and Radio Engineering. – 2015. – Vol.74 . – Issue 1. – P. 61 – 78.

[6] Naumenko N.I. Methods of synthesis of signals with prescribed properties / N.I. Naumenko, Yu.V. Stasev, A.A. Kuznetsov // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – Vol. 43. – Issue 3. – P. 321 – 326.

Рецензент: Ірина Лисицька, д-р тех. наук, проф., член-кореспондент Академії наук прикладної радіоелектроніки, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна
E-mail: lisitska@karazin.ua

Надійшло: Березень 2017.

Автори:
Віктор Краснобаєв, д-р тех. наук, проф., Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна.
E-mail: krasnobaev@karazin.ua

Сергій Кошман, к.т.н., доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка, Харків, Україна.
E-mail: s_koshman@ukr.net

Аліна Янко, к.т.н., ст. викладач кафедри комп'ютерної інженерії, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна.
E-mail: al9_yanko@ukr.net

L-коди у системі залишкових класів.

Анотація. У статті розроблено метод корекції помилок даних у системі залишкових класів, якій засновано на застосуванні коригувальних властивостей L-кодів, які утворюються при використанні взаємно попарно непростих основ. Даний метод дозволяє розширити клас коректованих помилок які коректуються, що розширює коригувальні можливості L-кодів. Наведені приклади виконання операції корекції, а також описані особливості реалізації пристрою для виявлення помилок даних.

Ключові слова: система числення, система залишкових класів, корекція помилок, комп'ютерна система, непозиційних кодова структура.

Reviewer: Irina Lisitska, Doctor of Sciences (Engineering), Full Prof., V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov, Ukraine.
E-mail: lisitska@karazin.ua

Received: March 2017.

Authors:
Viktor Krasnobayev, Doctor of Sciences (Engineering), Full Prof., V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov, Ukraine.
E-mail: krasnobaev@karazin.ua

Sergey Koshman, Ph.D., Associate Prof., Kharkov National Technical University of Agriculture named after Peter Vasylenko, Kharkov, Ukraine.
E-mail: s_koshman@ukr.net.

Alina Yanko, Ph.D., Senior Lecturer, Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, Poltava, Ukraine.
E-mail: al9_yanko@ukr.net.

L-codes in the system of residual classes.

Abstract. The method for correcting data errors in the residual class system, by applying the corrective properties of L-codes were developed in the article, which one are formed by using reciprocals pairwise not simple bases. This method allows you to extend the class of correctable errors, which expands the correcting possibilities of L-codes. The examples of the operation of correction were given, and features of the device to detect data errors were described.

Keywords: number system, the system of residual classes, error correction, the computer system, nonpositional code structure.