

## ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ ОШИБОК ДАННЫХ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В КЛАССЕ ВЫЧЕТОВ

Сергей Кошман, Виктория Попенко, Анна Кононченко

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна  
[s.koshman@karazin.ua](mailto:s.koshman@karazin.ua), [vita.popenko@gmail.com](mailto:vita.popenko@gmail.com), [akononpro@gmail.com](mailto:akononpro@gmail.com)

Рецензент: Алексей Стахов, д.т.н., проф., академик Академии инженерных наук Украины, Международный Клуб Золотого Сечения, Онтарио, Канада  
[goldenmuseum@rogers.com](mailto:goldenmuseum@rogers.com)

Надійшло: Листопад 2019.

**Аннотация:** В статье рассмотрен метод исправления однократных ошибок в классе вычетов (КВ). Результаты анализа корректирующих возможностей арифметического кода показали высокую эффективность использования непозиционных кодовых структур в КВ. Для исправления однократных ошибок требуется проведение дополнительных процедур обработки данных, т.е. применение, дополнительно к информационному резервированию, еще и временного резервирования. Приведены примеры исправления однократных ошибок данных, представленных кодом КВ. Рассмотренные примеры подтверждают практическую реализуемость данного метода коррекции ошибок. Использование системы остаточных классов может быть полезно для реализации быстрых компьютерных вычислений с возможностью распараллеливания некоторых процессов. Кроме того, её можно использовать для создания надежных и отказоустойчивых компонентов компьютерных систем.

**Ключевые слова:** непозиционная система счисления в классе вычетов; исправление однократных ошибок данных; арифметическое непозиционное кодирование информации.

### 1 Введение

Известно, что для коррекции (исправления) ошибок данных необходимо, чтобы представленная кодовая структура обладала определенной (необходимой) корректирующей способностью [1-3]. Для этого, естественно, в кодовую структуру вводится информационную избыточность. Это в полной мере относится и к непозиционным кодовым структурам (НКС), представленным в классе вычетов (КВ) [4-11].

В общем случае процесс коррекции ошибок данных в КВ, как и в двоичной позиционной системе счисления (ПСС), состоит из трёх этапов. Первый этап – контроль данных (определение правильности или неправильности исходного числа  $A_{KB}$ ). Второй этап - это диагностика неправильного  $\tilde{A}_{KB}$  числа (определение одного искажённого остатка  $\tilde{a}_i$  по основанию  $m_i$  КВ числа  $\tilde{A}_{KB}$ ). И, наконец, третий этап. Это исправление неправильного остатка  $\tilde{a}_i$  на истинное  $a_i$  число, т.е. исправления неправильного  $\tilde{A}_{KB}$  числа (получение правильного числа  $A_{KB} = \tilde{A}_{исп.}$ ). Степень  $R$  информационной избыточности (корректирующая способность кода) оценивается величиной минимального кодового расстояния (МКР)  $d_{\min}^{(ПСС)}$ .

Известно, что в КВ значение МКР определяется соотношением  $d_{\min}^{(KB)} = k + 1$ , где  $k$  – количество контрольных оснований в упорядоченном КВ.

### 2 Основная часть

В рамках данной статьи рассмотрим примеры реализации метода коррекции ошибок НКС  $A_{KB} = (a_1 \parallel a_2 \parallel \dots \parallel a_{i-1} \parallel a_i \parallel a_{i+1} \parallel \dots \parallel a_n \parallel \dots \parallel a_{n+k})$  в КВ с минимальной ( $k=1$ ) дополнительной информационной избыточностью. В этом случае МКР равно  $d_{\min}^{(KB)} = 2$ .

Рассмотрим соотношение, с помощью которого можно исправить ошибку в данном остатке  $\tilde{a}_i$  [11-13].

Пусть в неправильном числе  $\tilde{A} = (a_1 \| a_2 \| \dots \| a_{i-1} \| \tilde{a}_i \| a_{i+1} \| \dots \| a_n \| a_{n+1})$ , где  $\tilde{A} \geq M$ , ошибка  $\tilde{a}_i = (a_i + \Delta a_i) \bmod m_i$  достоверно содержится в остатке  $a_i$  по модулю  $m_i$ . Очевидно, что

$$\tilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0. \quad (1)$$

С учетом того, что величину ошибки можно представить в виде  $\Delta A = (0 \| 0 \| \dots \| 0 \| \Delta a_i \| 0 \| \dots \| 0 \| 0)$ , тогда правильное ( $A < M$ ) число  $A$  можно определить в следующем виде:

$$A = (\tilde{A} - \Delta A) \bmod M_0 = [(a_1 \| a_2 \| \dots \| a_{i-1} \| \tilde{a}_i \| a_{i+1} \| \dots \| a_n \| a_{n+1}) - (0 \| 0 \| \dots \| 0 \| \Delta a_i \| 0 \| \dots \| 0 \| 0)] \bmod M_0 = [a_1 \| a_2 \| \dots \| a_{i-1} \| (\tilde{a}_i - \Delta a_i) \bmod m_i \| a_{i+1} \| \dots \| a_n \| a_{n+1}] \bmod M_0.$$

Количественно оценим значение  $A$ . Так как число  $A$  правильное, т.е. находится в числовом интервале  $[0, M)$ , тогда должно выполняться следующее неравенство

$$A = (\tilde{A} - \Delta A) \bmod M_0 < M. \quad (2)$$

С учетом того, что величина  $\Delta A$  ошибки равняется значению  $\Delta A = \Delta a_i \cdot B_i$ , то неравенство (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \Delta a_i \cdot B_i - r \cdot M_0 < M, \quad \text{или} \quad \tilde{A} - \Delta a_i \cdot B_i - r \cdot M_0 < M_0 / m_{n+1} (r = 1, 2, 3, \dots), \\ \tilde{A} - (\tilde{a}_i - a_i) \cdot B_i - r \cdot M_0 < M_0 / m_{n+1}, \quad \tilde{A} - (a_i - \tilde{a}_i) \cdot B_i - r \cdot M_0 < M_0 / m_{n+1}, \\ (a_i - \tilde{a}_i) \cdot B_i < M_0 / m_{n+1} - \tilde{A} + r \cdot M_0, \quad a_i - \tilde{a}_i < (M_0 / m_{n+1}) / B_i - \tilde{A} / B_i + r \cdot M_0 / B_i, \\ a_i < \tilde{a}_i + (M_0 / m_{n+1}) / B_i - \tilde{A} / B_i + r \cdot M_0 / B_i. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом того, что ортогональный базис для модуля  $m_i$  КВ представляется в виде  $B_i = \bar{m}_i \cdot M_0 / m_i$ , то выражение (3) примет вид:

$$\begin{aligned} a_i < \tilde{a}_i + (m_i + r \cdot m_i \cdot m_{n+1}) / (\bar{m}_i \cdot m_{n+1}) - \tilde{A} / B_i \quad \text{или} \\ a_i < \tilde{a}_i + m_i (1 + r \cdot m_{n+1}) / (\bar{m}_i \cdot m_{n+1}) - \tilde{A} / B_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как значение остатка  $a_i$  есть натуральное число, то значение  $m_i (1 + r \cdot m_{n+1}) / (\bar{m}_i \cdot m_{n+1}) - \tilde{A} / B_i$  в выражении (4) должно быть целым числом. Поэтому взяв целую часть последнего соотношения, получим формулу для исправления ошибки в остатке  $\tilde{a}_i$  числа  $\tilde{A}$  в виде

$$a_i = (\tilde{a}_i + [m_i \cdot (1 + r \cdot m_{n+1}) / (\bar{m}_i \cdot m_{n+1}) - \tilde{A} / B_i] \bmod m_i). \quad (5)$$

Рассмотрим примеры реализации процесса коррекции данных в КВ.

Пример 1. Осуществить контроль и, при необходимости, провести коррекцию числа  $A_{KB} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ , заданного в КВ с информационными  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 4$ ,  $m_3 = 5$ ,  $m_5 = 7$  и контрольным  $m_k = m_5 = 11$  основаниями.

При этом  $M = \prod_{i=1}^n m_i = \prod_{i=1}^4 m_i = 420$  и  $M_0 = M \cdot m_{n+1} = 420 \cdot 11 = 4620$ . Ортогональные базисы  $B_i$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ) КВ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Ортогональные базисы  $B_i$  КВ ( $l = 1$ )

$B_1 = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0) = 1540$ , $\bar{m}_1 = 1$
$B_2 = (0 \parallel 1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0) = 3465$ , $\bar{m}_2 = 3$
$B_3 = (0 \parallel 0 \parallel 1 \parallel 0 \parallel 0) = 3696$ , $\bar{m}_3 = 4$
$B_4 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 1 \parallel 0) = 2640$ , $\bar{m}_4 = 4$
$B_5 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 1) = 2520$ , $\bar{m}_5 = 6$

I. Контроль данных  $A_{KB} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . В соответствии с процедурой контроля [1, 4] определим значение

$$A_{ПСС} = \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot B_i \right) \bmod M_0 = \left( \sum_{i=1}^5 a_i \cdot B_i \right) \bmod M_0 = (a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + a_3 \cdot B_3 + a_4 \cdot B_4 + a_5 \cdot B_5) \bmod M_0 = (0 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 + 0 \cdot 2640 + 5 \cdot 2520) \bmod 4620 = (5 \cdot 2520) \bmod 4620 = 12600 \bmod 4620 = 3360 > 420.$$

Таким образом, в процессе контроля определено, что  $A_{KB} = 3360 > M = 420$ . В этом случае, при возможности возникновения только однократных ошибок, делается вывод о том, что рассматриваемое число  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  неправильное ( $3360 > M = 420$ ).

Для исправления числа  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  вначале необходимо провести диагностику данных, т.е. определить искажённый  $\tilde{a}_i$  остаток. После чего необходимо определить истинное значение  $a_i$  остатка по модулю  $m_i$  и после чего провести исправление искажённого  $\tilde{a}_i$  остатка.

II. Диагностика данных  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . В соответствии с методом проекций [4], составим возможные проекции  $\tilde{A}_j$  числа  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ :  $\tilde{A}_1 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_2 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_3 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_4 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  и  $\tilde{A}_5 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0)$ .

Формула для вычисления значений  $\tilde{A}_{jПСС}$  проекций числа в ПСС имеет вид [1]

$$\tilde{A}_{jПСС} = \left( \sum_{\substack{i=1; \\ j=1, n+1.}}^n a_i \cdot B_{ij} \right) \bmod M_j = (a_1 \cdot B_{1j} + a_2 \cdot B_{2j} + \dots + a_n \cdot B_{nj}) \bmod M_j. \quad (6)$$

В соответствии с формулой (6) вычислим все значения  $\tilde{A}_{jПСС}$ . Далее проводим  $(n+1)$  сравнение: чисел  $\tilde{A}_{jПСС}$  с числом  $M = M_0 / m_{n+1}$ . Если среди проекций  $\tilde{A}_i$  есть числа не находящиеся внутри информационного  $[0, M)$  числового интервала (т.е.  $\tilde{A}_k \geq M$ ), содержащего  $k$  правильных чисел, то делается вывод о том, что эти  $k$  остатков числа  $A$  не искажены. Ошибочными могут быть только остатки, находящиеся среди остальных  $[(n+1) - k]$  остатков числа  $\tilde{A}_{KB}$ .

Набор частных рабочих оснований для заданного КВ и совокупность частных  $B_{ij}$  ортогональных базисов представлены соответственно в табл. 2 и табл. 3.

Таблица 2 – Набор частных рабочих оснований КВ ( $l=1$ )

$i$ $j$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$M_j$
1	4	5	7	11	1540
2	3	5	7	11	1155
3	3	4	7	11	924
4	3	4	5	11	660
5	3	4	5	7	420

Таблица 3 – Совокупность частных ортогональных базисов  $B_{ij}$  КВ ( $l=1$ )

$B_{ij}$	$i$	1	2	3	4
$j$					
1		385	616	1100	980
2		385	231	330	210
3		616	693	792	672
4		220	165	396	540
5		280	105	336	120

Итак, имеем, что (см. табл. 2)

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{1ПСС} &= \left( \sum_{i=1}^4 a_i \cdot B_{i1} \right) \bmod M_1 = (a_1 \cdot B_{11} + a_2 \cdot B_{21} + a_3 \cdot B_{31} + a_4 \cdot B_{41}) \bmod M_1 = \\ &= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 616 + 0 \cdot 1100 + 5 \cdot 980) \bmod 1540 = 280 < 420.\end{aligned}$$

Делаем вывод, что остаток  $a_1$  числа  $\tilde{A}_1$  – возможно  $\bar{a}_1$  искажённый остаток;

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{2ПСС} &= \left( \sum_{i=1}^4 a_i \cdot B_{i2} \right) \bmod M_2 = (a_1 \cdot B_{12} + a_2 \cdot B_{22} + a_3 \cdot B_{32} + a_4 \cdot B_{42}) \bmod M_2 = \\ &= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 231 + 0 \cdot 330 + 5 \cdot 210) \bmod 1155 = 1050 > 420.\end{aligned}$$

Таким образом, получим, что  $a_2$  достоверно не искажённый остаток;

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{3ПСС} &= \left( \sum_{i=1}^4 a_i \cdot B_{i3} \right) \bmod M_3 = (a_1 \cdot B_{13} + a_2 \cdot B_{23} + a_3 \cdot B_{33} + a_4 \cdot B_{43}) \bmod M_3 = \\ &= (0 \cdot 616 + 0 \cdot 693 + 0 \cdot 792 + 5 \cdot 672) \bmod 924 = 588 > 420.\end{aligned}$$

Получим, что  $a_3$  достоверно не искажённый остаток;

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{4ПСС} &= \left( \sum_{i=1}^4 a_i \cdot B_{i4} \right) \bmod M_4 = (a_1 \cdot B_{14} + a_2 \cdot B_{24} + a_3 \cdot B_{34} + a_4 \cdot B_{44}) \bmod M_4 = \\ &= (0 \cdot 220 + 0 \cdot 165 + 0 \cdot 369 + 5 \cdot 540) \bmod 660 = 60 < 420.\end{aligned}$$

Вывод: остаток  $a_4$  по модулю  $m_4$  числа  $\tilde{A}_4$  – возможно  $\bar{a}_4$  искажённый остаток;

$\tilde{A}_{5ПСС} = \left( \sum_{i=1}^4 a_i \cdot B_{i5} \right) \bmod M_5$ . Так как  $M_5 = M = 420$ , то остаток  $\bar{a}_5$  по контрольному модулю  $m_k = m_5$  всегда будет в совокупности возможных  $\bar{a}_i$  искажённых остатков числа в КВ.

**Общий вывод.** В процессе диагностики данных, представленных НКС  $\tilde{A} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ , определились точно не искажённые остатки:  $a_2 = 0$  и  $a_3 = 0$ . Ошибочными могут быть остатки по основаниям  $m_1$ ,  $m_4$  и  $m_5$ , т.е. остатки  $\bar{a}_1 = 0$ ,  $\bar{a}_4 = 0$  и  $\bar{a}_5 = 5$ . В этом случае необходимо провести исправление остатков  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_4$  и  $\bar{a}_5$ .

III. Исправление ошибок данных  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . Используя известную [1] формулу

$$a_i = \left( \bar{a}_i + \left[ \frac{m_i \cdot (1+r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_i} - \frac{\tilde{A}}{B_i} \right] \right) \bmod m_i, \quad (7)$$

проведём исправление  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_4$  и  $\bar{a}_5$  искажённых остатков  $a_1$ ,  $a_4$  и  $a_5$ , где  $r = 1, 2, 3, \dots$

В результате получаем, что:

$$a_1 = \left( \bar{a}_1 + \left[ \frac{m_1 \cdot (1+r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_1} - \frac{\tilde{A}}{B_1} \right] \right) \bmod m_1 = \left( 0 + \left[ \frac{3 \cdot (1+r \cdot 11)}{11 \cdot 1} - \frac{3360}{1540} \right] \right) \bmod 3 = (0 + [3, 27 - 2, 18]) \bmod 3 = (0 + [1, 09]) \bmod 3 = (0 + 1) \bmod 3 = 1;$$

$$a_4 = \left( \bar{a}_4 + \left[ \frac{m_4 \cdot (1+r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_4} - \frac{\tilde{A}}{B_4} \right] \right) \bmod m_4 = \left( 0 + \left[ \frac{7 \cdot 12}{11 \cdot 4} - \frac{3360}{2640} \right] \right) \bmod 7 = (0 + [1, 9 - 1, 27]) \bmod 7 = (0 + [0, 63]) \bmod 7 = (0 + 0) \bmod 7 = 0;$$

$$a_5 = \left( \bar{a}_5 + \left[ \frac{m_{n+1} \cdot (1+r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_{n+1}} - \frac{\tilde{A}}{B_5} \right] \right) \bmod m_{n+1} = \left( 5 + \left[ \frac{11 \cdot (1+11)}{11 \cdot 6} - \frac{3360}{2520} \right] \right) \bmod 11 = (5 + [2 - 1, 3]) \bmod 11 = (5 + [0, 7]) \bmod 11 = (5 + 0) \bmod 5 = 0.$$

По полученным остаткам  $a_1 = 1$ ,  $a_4 = 0$  и  $a_5 = 0$  восстанавливаем (исправляем) искажённое число  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ , т.е. правильное число, будет иметь следующий вид:

$$\tilde{A}_{исп.} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5).$$

Для проверки правильности исправления данных, по известной формуле, определим значения числа  $\tilde{A}_{исп.} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{исп.ПСС} &= \left( \sum_{i=1}^5 a_i \cdot B_i \right) \bmod M_0 = (a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + a_3 \cdot B_3 + a_4 \cdot B_4 + a_5 \cdot B_5) \bmod M_0 = \\ &= (1 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 + 0 \cdot 2640 + 5 \cdot 2520) \bmod 4620 = 14140 \bmod 4620 = 280. \end{aligned}$$

Так как  $280 < M = 420$ , то число  $\tilde{A}_{280} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  является правильным.

С целью уточнения верности процедуры коррекции числа  $\tilde{A}_{3360}$ , проведём расчёт и сравнение значений и правильных остатков  $a_2 = 0$  и  $a_3 = 0$ . В этом случае:

$$a_2 = \left( 0 + \left[ \frac{4 \cdot (1+11)}{11 \cdot 3} - \frac{3360}{3465} \right] \right) \bmod 4 = 0 \text{ и } a_3 = \left( 0 + \left[ \frac{5 \cdot (1+11)}{11 \cdot 4} - \frac{3360}{3696} \right] \right) \bmod 5 = 0.$$

Полученные результаты  $a_2 = 0$  и  $a_3 = 0$  расчётов остатков по модулям  $m_2$  и  $m_3$  КВ, подтверждают правильность коррекции неправильного числа  $\tilde{A}_{3360} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ .

Таким образом, исходное число  $\tilde{A}_{КВ} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  является неправильным  $\tilde{A}_{3360}$ , в котором однократная ошибка  $\Delta a_1 = 1$  произошла по модулю  $m_1$ . Данная ошибка перевела правильное число  $A_{280}$  в неправильное  $\tilde{A}_{3360}$ .

Для того, чтобы выяснить является ли правильное число  $A_{280}$  истинным проведём дополнительные исследования процессов искажения и коррекции числа  $A_{280}$  по основанию  $m_1 = 3$ . Количество  $N_{НС}$  возможных неправильных (искажённых)  $\tilde{A}_{КВ}$  кодовых слов (только при однократной ошибке) для каждого правильного  $A_{КВ}$  числа равно  $N_{НС} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i - (n+1)$ .

Результаты анализа показали, что искажение остатка  $a_1$  по модулю  $m_1 = 3$  правильного числа  $A_{280}$  может привести только к двум неправильным числам  $\tilde{A}_{3360} = (\tilde{0} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  и  $\tilde{A}_{1820} = (\tilde{2} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ .

Этот факт говорит о том, что исправленное число  $A_{исп.} = A_{280} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ , является не только правильным (*лежащем в интервале  $[0, 420)$* ), но и истинным.

Истинность полученного  $A_{280} = (\hat{1} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  числа подтверждается тем, что только однократная ошибка  $\Delta a_1 = 2$  по основанию  $m_1 = 3$  переводит это число

$$\begin{aligned} (\tilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0 = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5) + (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0) = [(1+2) \bmod 3 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5] = \\ = (\tilde{0} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)), \end{aligned}$$

в единственно неправильное число  $\tilde{A}_{3360} = (\tilde{0} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ .

Пример 2. Пусть правильное число равно  $A_{280} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  и пусть  $\Delta a_1 = 1$ .

Тогда  $\tilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0 = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5) + (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0) = [(1+1) \bmod 3 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5] = (\tilde{2} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . Данному числу в КВ соответствует число 1820 в ПСС, т.е. число  $\tilde{A}_{1820}$  неправильное. Проведём исправление числа  $\tilde{A}_{1820}$ .

Перед исправлением числа  $\tilde{A}_{1820}$  проведём диагностику данных. Для этого предварительно составим проекции  $A_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) числа  $\tilde{A}_{1820} = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . Это будут следующие кодовые структуры в КВ:  $\tilde{A}_1 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_2 = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_3 = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ ,  $\tilde{A}_4 = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  и  $\tilde{A}_5 = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0)$ .

Далее определим все значения проекций  $\tilde{A}_{jПСС}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1ПСС} &= (5 \cdot 980) \bmod 1540 = 280 < 420 = M; \\ \tilde{A}_{2ПСС} &= (2 \cdot 385 + 5 \cdot 231) \bmod 1155 = 1925 \pmod{1155} = 770 > 420 = M; \\ \tilde{A}_{3ПСС} &= (2 \cdot 616 + 5 \cdot 672) \bmod 924 = 4592 \pmod{924} = 896 > 420 = M; \\ \tilde{A}_{4ПСС} &= (2 \cdot 220 + 5 \cdot 540) \bmod 660 = 3140 \pmod{660} = 500 > 420 = M; \\ \tilde{A}_{5ПСС} &= 2 \cdot 280 \pmod{420} = 560 \pmod{420} = 140 < 420 = M. \end{aligned}$$

Так как  $\tilde{A}_{2ПСС}$ ,  $\tilde{A}_{3ПСС}$  и  $\tilde{A}_{4ПСС} > 420$ , тогда делается вывод о том, что остатки  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$  и  $a_4 = 0$  числа  $\tilde{A}_5 = (2 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  не искажены. Искаженными  $\bar{a}_1 = 2$  и  $\bar{a}_5 = 5$  могут быть только остатки  $a_1$  и  $a_5$ . Вначале проведём исправление остатка  $\bar{a}_1 = 2$ .

Получаем, что

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \bar{a}_1 + \left[ \frac{m_1 \cdot (1 + r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_1} - \frac{\tilde{A}}{B_1} \right] \right) \bmod m_1 = \left( 2 + \left[ \frac{3 \cdot (1+11)}{11 \cdot 1} - \frac{1820}{1540} \right] \right) \bmod 3 = \\ &= (2 + [3, 27 - 1, 18]) \bmod 3 = (2 + [2, 09]) \bmod 3 = (2 + 2) \bmod 3 = 4 \pmod{3} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, исправленный остаток по модулю  $m_1$  равен  $a_1 = 1$ .

Аналогичным путём получим значение  $a_5 = 5$ . По полученным остаткам  $a_1$ ,  $a_5$  исправляем неправильное число  $\tilde{A}_{1820} = (\tilde{2} \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$ . В конечном итоге в процессе коррекции получим правильное  $A_{280} = (1 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 5)$  число.

Пример 3. Осуществить контроль числа  $A_{KB} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ . В случае его искажения, провести диагностику и коррекцию данных.

I. Контроль данных  $A_{KB} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ . В соответствии с известной процедурой контроля определим  $A_{ПСС}$  по формуле

$$A_{ПСС} = \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot B_i \right) \bmod M_0 = (0 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 + 2 \cdot 2640 +$$

$+ 1 \cdot 2520) \bmod 4620 = 7800 \pmod{4620} = 3180 > 420$ . Данное число неправильное  $\tilde{A}_{3180}$ .

II. Диагностика данных  $\tilde{A}_{3180} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ . Составим все возможные проекции  $\tilde{A}_j$  числа  $\tilde{A}_{3180}$ :  $\tilde{A}_1 = (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ ,  $\tilde{A}_2 = (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ ,  $\tilde{A}_3 = (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$ ,  $\tilde{A}_4 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 1)$  и  $\tilde{A}_5 = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2)$ .

Определим значения величин всех пяти проекций  $\tilde{A}_j$  в ПСС:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1KB} &= (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1) = \tilde{A}_{1ПСС} = (a_1 \cdot B_{11} + a_2 \cdot B_{21} + a_3 \cdot B_{31} + a_4 \cdot B_{41}) \bmod M_1 = \\ &= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 616 + 2 \cdot 1100 + 1 \cdot 980) \bmod 1540 = 100 < M = 420; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2KB} &= (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1) = \tilde{A}_{2ПСС} = (a_1 \cdot B_{12} + a_2 \cdot B_{22} + a_3 \cdot B_{32} + a_4 \cdot B_{42}) \bmod M_2 = \\ &= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 231 + 2 \cdot 330 + 1 \cdot 210) \bmod 1155 = 870 > M = 420; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3KB} &= (0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1) = \tilde{A}_{3ПСС} = (a_1 \cdot B_{13} + a_2 \cdot B_{23} + a_3 \cdot B_{33} + a_4 \cdot B_{43}) \bmod M_3 = \\ &= (0 \cdot 616 + 0 \cdot 693 + 2 \cdot 792 + 1 \cdot 672) \bmod 924 = 418 < M = 420; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{4KB} &= (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 1) = \tilde{A}_{4ПСС} = (a_1 \cdot B_{14} + a_2 \cdot B_{24} + a_3 \cdot B_{34} + a_4 \cdot B_{44}) \bmod M_4 = \\ &= (0 \cdot 220 + 0 \cdot 165 + 2 \cdot 396 + 1 \cdot 540) \bmod 660 = 540 > M = 420; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{5KB} &= (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2) = \tilde{A}_{5ПСС} = (a_1 \cdot B_{15} + a_2 \cdot B_{25} + a_3 \cdot B_{35} + a_4 \cdot B_{45}) \bmod M_5 = \\ &= (0 \cdot 280 + 0 \cdot 105 + 2 \cdot 336 + 1 \cdot 120) \bmod 420 = 240 < M = 420. \end{aligned}$$

В результате расчётов значений  $\tilde{A}_{jПСС}$  и сравнения их с величиной  $M = 420$  длины интервала  $[0, 420)$  обработки правильных чисел  $A_{KB}$  в КВ получим следующее. Совокупность остатков  $a_2 = 0$ ,  $a_4 = 0$  является правильной (*остатки не искажены*), а остатки  $\bar{a}_1 = 0$ ,  $\bar{a}_3 = 0$  и  $\bar{a}_5 = 1$  неправильного числа  $\tilde{A}_{3180} = (0 \parallel 0 \parallel 0 \parallel 2 \parallel 1)$  могут быть искажены (*могут быть неправильными*).

III. Исправление возможно искажённых  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_3$  и  $\bar{a}_5$  остатков числа  $\tilde{A}_{3180}$ .

Необходимо исправить, возможно, искажённые остатки  $\bar{a}_1 = 0$ ,  $\bar{a}_3 = 0$  и  $\bar{a}_5 = 1$  по формуле

муле  $a_i = \left( \tilde{a}_i + \left[ \frac{m_i \cdot (1 + r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_i} - \frac{\tilde{A}}{B_i} \right] \right) \bmod m_i$ . Тогда имеем, следующее:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \bar{a}_1 + \left[ \frac{m_1 \cdot (1 + r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_1} - \frac{\tilde{A}}{B_1} \right] \right) \bmod m_1 = \left( 0 + \left[ \frac{3 \cdot (1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 1} - \frac{3180}{1540} \right] \right) \bmod 3 = \\ &= (0 + [3, 27 - 2, 06]) \bmod 3 = (0 + [1, 21]) \bmod 3 = (0 + 1) \bmod 3 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом  $a_1 = 1$ . Соответственно, для значения  $\bar{a}_3$  имеем

$$a_3 = \left( \tilde{a}_3 + \left[ \frac{m_3 \cdot (1 + r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_3} - \frac{\tilde{A}}{B_3} \right] \right) \bmod m_3 = \left( 0 + \left[ \frac{5 \cdot (1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 4} - \frac{3180}{3696} \right] \right) \bmod 5 =$$



$$= (0 + [1, 36 - 0, 86]) \bmod 5 = (0 + [0, 5]) \bmod 5 = (0 + 0) \bmod 5 = 0.$$

В этом случае  $a_3 = 0$ .

Для значения остатка  $\bar{a}_5$  получим

$$a_5 = \left( \tilde{a}_5 + \left[ \frac{m_5 \cdot (1 + r \cdot m_{n+1})}{m_{n+1} \cdot \bar{m}_5} - \frac{\tilde{A}}{B_5} \right] \right) \bmod m_5 = \left( 1 + \left[ \frac{11 \cdot (1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 6} - \frac{3180}{2520} \right] \right) \bmod 11 =$$

$$= (1 + [2 - 1, 26]) \bmod 11 = (1 + [0, 74]) \bmod 11 = (1 + 0) \bmod 11 = 1.$$

В итоге имеем, что  $a_5 = 1$ .

Таким образом, по полученным значениям  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = 0$  и  $a_5 = 1$  восстановленных остатков исправляем искажённое число  $\tilde{A}_{KB} = (0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1)$  на правильное  $A_{KB} = (1 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1)$  число. Проверка:  $-100 < 420$ .

### 3 Выводы

В представленной статье рассмотрены примеры коррекции ошибок данных в классе вычетов (КВ). Показано, что в некоторых случаях, непозиционное кодирования в КВ может обеспечить возможность исправления однократных ошибок при МКР равном  $d_{\min}^{(KB)} = 2$ .

Отмечено, что для исправления однократных ошибок требуется проведение дополнительных процедур обработки данных, то есть, применение, дополнительно к информационному резервированию, еще и временного резервирования.

Приведенные примеры конкретной реализации процедур коррекции однократных ошибок, показывают практическую реализуемость метода коррекции ошибок данных, представленных в классе вычетов.

### Ссылки

- [1] F. MacWilliams, N. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*. Elsevier, 1977.
- [2] J. Proakis, *Digital communications*, McGraw Hill, 2001.
- [3] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Techno, Pearson Education, 2016.
- [4] F. Barsi and P. Maestrini, "Error Correcting Properties of Redundant Residue Number Systems," in *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-22, no.3, pp. 307-315, March 1973.
- [5] V.Krasnobayev, A.Kuznetsov, S.Koshman, S. Moroz, "Improved Method of Determining the Alternative Set of Numbers in Residue Number System", in *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 836. Springer, Cham, pp. 319-328, 05 August 2018. doi: 10.1007/978-3-319-97885-7\_31.
- [6] Y. N. Kocherov, D. V. Samoylenko and A. I. Koldaev, "Development of an Antinoise Method of Data Sharing Based on the Application of a Two-Step-Up System of Residual Classes", *2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)*, Vladivostok, pp. 1-5, 2018.
- [7] V. Krasnobayev, A. Kuznetsov, S. Koshman, S. Moroz, "Improved Method of Determining the Alternative Set of Numbers in Residue Number System", in *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 836. Springer, Cham, pp. 319-328, 05 August 2018. doi: 10.1007/978-3-319-97885-7\_31.
- [8] M. Kasianchuk, I. Yakymenko, I. Pazdriy, A. Melnyk and S. Ivasiev, "Rabin's modified method of encryption using various forms of system of residual classes", *14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, Lviv, 2017, pp. 222-224. doi: 10.1109/CADSM.2017.7916120.
- [9] V. Krasnobayev, A. Kuznetsov, A. Kononchenko, T. Kuznetsova, "Method of data control in the residue classes", in *Proceedings of the Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019)*, Zaporizhzhia, Ukraine, April 15-19, 2019, pp. 241-252.
- [10] M. Karpinski, S. Ivasiev, I. Yakymenko, M. Kasianchuk and T. Gancarczyk, "Advanced method of factorization of multi-bit numbers based on Fermat's theorem in the system of residual classes", *16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, Gyeongju, 2016, pp. 1484-1486.
- [11] V. Krasnobayev, A. Kuznetsov, I. Lokotkova and A. Dyachenko, "The Method of Single Errors Correction in the Residue Class", *3rd International Conference on Advanced Information and Communications Technologies (AICT)*, Lviv, Ukraine, 2019, pp. 125-128. doi: 10.1109/AIACT.2019.8847845.



- [12] V. Krasnobayev, A. Kuznetsov, M. Zub, K. Kuznetsova, "Methods for comparing numbers in non-positional notation of residual classes", in *Proceedings of the Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019)*, Zaporizhzhia, Ukraine, April 15-19, 2019., pp. 581-595.
- [13] V. Krasnobayev, A. Kuznetsov, V. Babenko, M. Denysenko, M. Zub and V. Hryhorenko, "The Method of Raising Numbers, Represented in the System of Residual Classes to an Arbitrary Power of a Natural Number", *IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Lviv, Ukraine, 2019, pp. 1133-1138. doi: 10.1109/UKRCON.2019.8879793
- [14] K. Tao, L. Peng, K. Liang and B. Zhuo, "Irregular repeat accumulate low-density parity-check codes based on residue class pair", *IEEE 9th International Conference on Communication Software and Networks (ICCSN)*, Guangzhou, 2017, pp. 127-131. doi: 10.1109/ICCSN.2017.8230092.
- [15] G. Harman and I. E. Shparlinski, "Products of Small Integers in Residue Classes and Additive Properties of Fermat Quotients", in *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 5, pp. 1424-1446, Jan. 2016. doi: 10.1093/imrn/rnv182.
- [16] C. Fan and G. Ge, "A Unified Approach to Whiteman's and Ding-Helleseth's Generalized Cyclotomy Over Residue Class Rings", in *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 60, no. 2, pp. 1326-1336, Feb. 2014. doi: 10.1109/TIT.2013.2290694.
- [17] A. Wang, A. Zhang and Sh. Chen, "Study On simulation and design of data links human computer interface," *International Conference on Computer Science and Service System (CSSS)*, Nanjing, 2011, pp. 4066-4069. doi: 10.1109/CSSS.2011.5974893.
- [18] S. Irfan and S. Ghosh, "Optimization of information retrieval using evolutionary computation: A survey", *International Conference on Computing, Communication and Automation (ICCCA)*, Greater Noida, 2017, pp. 328-333. doi: 10.1109/ICCA.2017.8229837.
- [19] S. Shu, Y. Wang and Y. Wang, "A research of architecture-based reliability with fault propagation for software-intensive systems", *Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, Tucson, AZ, 2016, pp. 1-6.
- [20] S. S. Gokhale, M. R. Lyu and K. S. Trivedi, "Reliability simulation of component-based software systems", *Proceedings Ninth International Symposium on Software Reliability Engineering (Cat. No.98TB100257)*, Paderborn, Germany, 1998, pp. 192-201.
- [21] Tiwari, K. Tomko, "Enhanced Reliability of Finite State Machines in FPGA Through Efficient Fault Detection and Correction", *IEEE Transaction on Reliability*, vol. 54, no. 3, pp. 459-467.
- [22] Singh and A. Sprintson, "Reliability assurance of cyber-physical power systems", *IEEE PES General Meeting*, Providence, RI, 2010, pp. 1-6.
- [23] M. Reddy and N. Nalini, "FT2R2Cloud: Fault tolerance using time-out and retransmission of requests for cloud applications", *International Conference on Advances in Electronics Computers and Communications*, Bangalore, 2014, pp. 1-4.
- [24] Braun and H. Wunderlich, "Algorithm-based fault tolerance for many-core architectures", *15th IEEE European Test Symposium*, Praha, 2010, pp. 253-253.
- [25] M. Radu, "Reliability and fault tolerance analysis of FPGA platforms", *IEEE Long Island Systems, Applications and Technology (LISAT) Conference 2014*, Farmingdale, NY, 2014, pp. 1-4.

**Reviewer:** Alexey Stakhov, Doctor of Sciences (Engineering), Full Prof., Academicians of the Academy of Engineering Sciences of Ukraine, International Club of the Golden Section, 6 McCreary Trail, Bolton, Ont., L7E 2C8, Canada.  
E-mail: [goldenmuseum@rogers.com](mailto:goldenmuseum@rogers.com)

Received on November 2019.

#### Authors:

Serghii Koshman, Doctor of Sciences (Eng.), V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.  
E-mail: [s.koshman@karazin.ua](mailto:s.koshman@karazin.ua)

Victoria Popenko, Computer Science Student, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.  
E-mail: [vita.popenko@gmail.com](mailto:vita.popenko@gmail.com)

Anna Kononchenko, Computer Science Student, V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine.  
E-mail: [akononpro@gmail.com](mailto:akononpro@gmail.com)

#### Examples of usage of method of data errors correction which are presented by the residual classes.

**Abstract.** The article discusses a method for correcting single errors in the residue class. The results of the analysis of the corrective capabilities of the arithmetic code showed the high efficiency of using non-position code structures in the class of residues. To correct single errors, additional data processing procedures are required, i.e. the use, in addition to the information reservation, also temporary reservation. Examples of correction of one-time data errors represented by code in the residue class are given. The considered examples confirm the practical feasibility of this error correction method. Using a system of residual classes can be useful for implementing fast computer calculations with the possibility of parallelizing some processes. In addition, it can be used to create reliable and fault-tolerant components of computer systems.

**Keywords:** Residual class system; Data errors correction; Non-positional code structure; Computational process.

**Рецензент:** Алексей Стахов, д.т.н., проф., академик Академии инженерных наук Украины, Международный Клуб Золотого Сечения, Онтарио, Канада. E-mail: [goldenmuseum@rogers.com](mailto:goldenmuseum@rogers.com)

Поступила: Ноябрь 2019.

#### Автори:

Сергій Кошман, д.т.н., Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна.  
E-mail: [s.koshman@karazin.ua](mailto:s.koshman@karazin.ua)

Вікторія Попенко, студентка факультету комп'ютерних наук, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна.

E-mail: [vita.popenko@gmail.com](mailto:vita.popenko@gmail.com)

Анна Кононченко, студентка факультету комп'ютерних наук, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна.

E-mail: [akononpro@gmail.com](mailto:akononpro@gmail.com)

**Приклади використання методу корекції помилок даних, що представлені в класі лишків.**

**Анотація.** У статті розглянуто метод виправлення однократних помилок у класі лишків (КЛ). Результати аналізу коректуючих можливостей арифметичного коду показали високу ефективність використання непозиційних кодових структур у КЛ. Для виправлення однократних помилок потрібно проводити додаткові процедури обробки даних, тобто застосування, додатково до інформаційного резервування, ще й часового резервування. Наведені приклади виправлення однократних помилок даних, що представлені кодом КЛ. Розглянути приклади підтверджують практичну реалізованість даного методу корекції помилок. Використання системи залишкових класів може бути корисно для реалізації швидких комп'ютерних обчислень з можливістю розпаралелювання деяких процесів. Крім того, її можна використовувати для створення надійних і стійких до відмов компонентів комп'ютерних систем.

**Ключові слова:** непозиційних система числення в залишковому класі; виправлення одноразових помилок даних; арифметичне непозиційне кодування інформації.