

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ МЕТОДІВ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ РЕНТГЕНІВСЬКИХ МЕДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Л.А. Булавін, Ю.Ф. Забашта, О.В. Мотолига, С.П. Сенчуров

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, просп. Глушкова 2 А, м. Київ, Україна

e-mail: oleksandr.motolyha@gmail.com

Надійшла до редакції 28 лютого 2017 року

Прийнята 11 квітня 2017 року

Задача реконструкції зображень в рентгенівській комп'ютерній томографії зводиться до розв'язку інтегрального рівняння або системи алгебраїчних рівнянь для дискретного випадку. Задача є некоректною через невідповідність кількості рівнянь та кількості невідомих та через наявність похибки у експериментально вимірних даних. Тому задача пошуку кращого методу реконструкції в томографії є відкритою, всі наявні методи дають наближений результат. У статті проведено порівняння двох методів реконструкції: оберненого проєціювання та варіаційного. Порівняння виконано за допомогою чисельного експерименту, ціллю якого було отримання залежності між похибкою зображення і похибкою експерименту. Встановлено, що на відміну від варіаційного методу зображення, отримане методом оберненого проєціювання, нестійке: для нього відсутня збіжність наближеного зображення до точного при наближенні похибки експерименту до нуля. Варіаційний метод показав гарні результати реконструкції, незважаючи на малу кількість проєкцій та наявність в них похибки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рентгенівська комп'ютерна томографія, метод оберненого проєціювання, варіаційний метод.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ РЕНТГЕНОВСКИХ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Л.А. Булавин, Ю.Ф. Забашта, А.В. Мотолига, С.П. Сенчуров

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, просп. Глушкова 2 А, г. Киев, Украина

Задача реконструкции изображений в рентгеновской компьютерной томографии сводится к решению интегрального уравнения или системы алгебраических уравнений для дискретного случая. Задача является некорректной из-за несоответствия количества уравнений и количества неизвестных и из-за наличия погрешности в экспериментально измеренных данных. Поэтому задача поиска лучшего метода реконструкции в томографии является открытой, все имеющиеся методы дают приближенный результат. В статье проведено сравнение двух методов реконструкции: обратного проецирования и вариационного. Сравнение выполнено с помощью численного эксперимента, целью которого было получение зависимости между погрешностью изображения и погрешностью эксперимента. Установлено, что в отличие от вариационного метода изображения, полученное методом обратного проецирования, неустойчиво: для него отсутствует сходимость приближенного изображения к точному при приближении погрешности эксперимента к нулю. Вариационный метод показал хорошие результаты реконструкции, несмотря на малое число проекций и наличие погрешности в них.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: рентгеновская компьютерная томография, метод обратного проецирования, вариационный метод.

ANALYSIS OF STABILITY OF TOMOGRAPHIC RECONSTRUCTION OF X-RAY MEDICAL IMAGES

L.A. Bulavin, Y.F. Zhabashita, O.V. Motolyha, S.P. Senchurov

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2 A Glushkova Ave., Kyiv, Ukraine

Slice reconstruction in X-ray computed tomography is reduced to the solution of integral equations, or a system of algebraic equations in discrete case. It is considered to be an ill-posed problem due to the inconsistencies in the number of equations and variables and due to errors in the experimental data. Therefore, determination of the best method of the slice reconstruction is of great interest. Furthermore, all available methods give approximate results. The aim of this article was two-fold: i) to compare two methods of image reconstruction, viz. inverse projection and variation, using the numerical experiment; ii) to obtain the relationship between image accuracy and experimental error. It appeared that the image

obtained by inverse projection is unstable: there was no convergence of the approximate image to the accurate one, when the experimental error reached zero. In turn, the image obtained by variational method was accurate at zero experimental error. Finally, the latter showed better slice reconstruction, despite the low number of projections and the experimental errors.

KEY WORDS: X-ray computed tomography, inverse projection method, variational method.

У сучасній медичній фізиці одна з ключових ролей належить рентгенівській комп'ютерній томографії. Як відомо [1], її задача полягає в отриманні зображення структури досліджуваного об'єкту за даними про поглинання ним рентгенівського випромінювання. Ця задача формулюється наступним чином:

Інтенсивність $I_\phi(x')$ випромінювання, що пройшло крізь досліджуваний об'єкт, записують у вигляді:

$$I_\phi(x') = I_\phi^0(x') \exp\left(-\int \mu(x, y) dy'\right), \quad (1)$$

де $I_\phi^0(x')$ – інтенсивність рентгенівського випромінювання до об'єкту, $\mu(x, y)$ – просторовий розподіл коефіцієнта послаблення рентгенівського випромінювання на певному перерізі об'єкту. При цьому рентгенівський пучок напрямлений паралельно осі y' , ϕ – кут між осями x та x' .

Проекція об'єкту $\lambda_\phi(x')$ визначається співвідношенням [2]:

$$\lambda_\phi(x') = -\ln \left[\frac{I_\phi(x')}{I_\phi^0(x')} \right] = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi - x') dx dy, \quad (2)$$

де $\delta(x \cos \phi + y \sin \phi - x')$ – дельта функція.

Функція $\mu(x, y)$ є шуканим томографічним зображенням, вона описує просторовий розподіл інтенсивностей поглинання рентгенівського випромінювання речовиною. Отримання цієї функції за значеннями експериментально вимірної функції $\lambda_\phi(x')$ є цілком томографії. Ця задача називається реконструкцією рентгенівської томограми за проекціями та зводиться до розв'язку інтегрального рівняння (2).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Оскільки функція $\lambda_\phi(x')$ визначається з експерименту, вона є наближеною, отже, розв'язуючи рівняння (2), ми можемо отримати лише наближену функцію $\mu(x, y)$.

Позначимо через $\mu_0(x, y)$ точне значення функції $\mu(x, y)$ і введемо похибку δ_μ наближеної функції $\mu(x, y)$

$$\delta_\mu = \rho_\mu(\mu, \mu_0), \quad (3)$$

де $\rho_\mu(\mu, \mu_0)$ – відстань між згаданими функціями. Можливе використання різних метрик, в наших експериментах ми будемо користуватись гільбертовим метричним простором.

Позначимо через $\lambda_{0\phi}(x')$ функцію, отриману в результаті підстановки $\mu_0(x, y)$ в рівняння (2), і введемо похибку δ_λ наближеної функції $\lambda_\phi(x')$, визначивши її рівнянням:

$$\delta_\lambda = \rho_\lambda(\lambda_\phi, \lambda_{0\phi}), \quad (4)$$

де ρ_λ – відстань між функціями λ_ϕ та $\lambda_{0\phi}$.

Похибка експерименту Δ представляє собою верхню межу значень δ_λ , що описується нерівністю

$$\delta_\lambda \leq \Delta. \quad (5)$$

Як відомо [3], за наближений розв'язок рівняння (2) варто розглядати розв'язок μ_Δ , стійкий до малих змін функції $\lambda_\phi(x')$. Цю вимогу записують у вигляді:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\mu = 0. \quad (6)$$

На сьогодні, для реконструкції переважно використовується метод оберненого проєціювання [4]. Для цієї ж цілі може бути використаний варіаційний метод [3]. Ціллю даної статті є перевірка на стійкість розв'язків рівняння (2), отриманих цими методами. Цю задачу ми будемо вирішувати за допомогою чисельного експерименту. Щоб зробити це, потрібно, перш за все, пристосувати варіаційний метод для реконструкції зображення.

ЗАСТОСУВАННЯ ВАРІАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

Представимо рівняння (2) в операторному вигляді

$$A\mu = \lambda. \quad (7)$$

При використанні варіаційного методу [3] за наближений розв'язок рівняння (2) приймається функція $\mu_\Delta(x, y)$, що задовольняє рівняння

$$A^* A\mu + \alpha\mu = A^* \lambda, \quad (8)$$

де A^* – оператор, спряжений з оператором A , α – коефіцієнт регуляризації, що має бути визначений з рівняння:

$$\rho^2(A\mu_\Delta, \lambda) = \Delta^2, \quad (9)$$

де $\rho(Z, Z')$ – відстань між функціями Z та Z' .

Перепишемо рівняння (2) у вигляді:

$$\iint K(x', \phi; x, y) \mu(x, y) dx dy = \lambda(x', \phi). \quad (10)$$

Відповідно маємо:

$$A^* A\mu = \iint \bar{K}(x, y; X, Y) \mu(X, Y) dXdY, \quad (11)$$

де прийнято позначення

$$\bar{K}(x, y; X, Y) = \iint K(x', \phi; x, y) K(x', \phi; X, Y) dx' d\phi. \quad (12)$$

Праву частину рівняння (8) записуємо у вигляді:

$$A^* \lambda = \iint K(x', \phi; x, y) \lambda(x', \phi) dx' d\phi. \quad (13)$$

Рівність (5) набуває вигляду:

$$\iint dx' d\phi \left[\iint K(x', \phi; x, y) \mu_\Delta(x, y) dx dy - \lambda(x', \phi) \right]^2 = \Delta^2. \quad (14)$$

Виконаємо наближену заміну δ -функції в рівнянні:

$$\delta(x \cos \phi + y \sin \phi - x') \approx A \exp \left[-\frac{(x \cos \phi + y \sin \phi - x')^2}{2h^2} \right], \quad (15)$$

де h – ширина рентгенівського променя. Константу A визначаємо з рівняння:

$$\int_\Gamma \delta dS = 1, \quad (16)$$

де Γ – лінія, перпендикулярна пучку.

Величину dS розраховуємо з рівняння:

$$y = a + x \tan \phi, \quad (17)$$

отримуючи

$$dS = dx(1 + tg\phi)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Після підстановки (15), (17), (18) у (16) і інтегрування маємо:

$$A = \frac{1}{h\sqrt{2\pi\cos\phi}}. \quad (19)$$

Рівняння (2), після заміни δ -функції виразом (15) приймає вигляд (10) з ядром:

$$K(x', \phi, ; x, y) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi\cos\phi}} \exp\left[-\frac{(x\cos\phi + y\sin\phi - x')^2}{2h^2}\right]. \quad (20)$$

Згідно з (8), (11-13), для невідомої функції $\mu(x, y)$ ми отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} & \iint dXdY \left\{ \iint dx'd\phi \frac{1}{h\sqrt{2\pi\cos\phi}} \exp\left[-\frac{(x\cos\phi + y\sin\phi - x')^2}{2h^2}\right] \times \right. \\ & \times \exp\left[-\frac{(X\cos\phi + Y\sin\phi - x')^2}{2h^2}\right] \left. \right\} \mu(X, Y) + \alpha\mu(X, Y) = \\ & = \iint dx'd\phi \frac{1}{2h\sqrt{2\pi\cos\phi}} \exp\left[-\frac{(x\cos\phi + y\sin\phi - x')^2}{2h^2}\right] \lambda(x', \phi). \end{aligned} \quad (21)$$

Рівняння (14) згідно з (20) може бути записане як:

$$\iint dx'd\phi \left\{ \iint \frac{1}{h\sqrt{2\pi\cos\phi}} \exp\left[-\frac{(X\cos\phi + Y\sin\phi - x')^2}{2h^2}\right] \times \mu_{\Delta}(X, Y) dXdY - \lambda(x', \phi) \right\} = \Delta^2. \quad (22)$$

Таким чином, співвідношення (8-9) варіаційного методу у випадку їх використання для реконструкції в томографії приймають вигляд (21-22).

МЕТОДИКА І РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Програма експерименту являє собою послідовність наступних етапів.

1) Вибираємо математичний фантом з відомим розподілом інтенсивностей $\mu_0(x, y)$.

2) Користуючись виразом (2), розраховуємо значення $\lambda_{\phi}(x')$ для цього фантому.

Позначимо його як $\lambda_{0\phi}(x')$. Для спрощення розрахунків обрано таку саму дискретизацію, як у фантому: 32 по координаті x' та використано 32 проєкції.

3) "Псуємо" функцію $\lambda_{0\phi}(x')$, вводячи замість неї деяку наближену функцію $\lambda_{\Delta\phi}(x')$ із заданою похибкою Δ , яку розраховуємо за допомогою виразу (4).

4) Підставляємо значення функції $\lambda_{\Delta\phi}$ в інтегральне рівняння (2), вирішуємо його, отримуємо функцію μ_{Δ} відповідну функції $\lambda_{\Delta\phi}$.

5) Розраховуємо похибку δ_{μ} , використовуючи формулу (3).

Нами було вибрано фантом Шепа-Логана, який традиційно використовується при перевірці ефективності методів реконструкції [5]. Фантом наближено моделює переріз голови людини.

Розрахунки з використанням оберненого проєціювання були виконанні стандартними програмами.

При використанні варіаційного методу проведено дискретизацію задачі: інтеграли у виразах (21-22) замінено на суми, в результаті чого інтегральне рівняння (21) було зведено до системи алгебраїчних рівнянь. При цьому, оператор A замінено матрицею.

Розмір фантому складав 32×32 пікселі, відповідно розмірність матриці A дорівнювала 1024×1024 .



Рис. 1. Фантом Шепа-Логана.

При розрахунку відстані ρ між функціями, вважалося, що останні є елементами гільбертового метричного простору. Досліджувався інтервал похибок $\Delta \in [0; 0.2]$.

Для кожного з вибраних значень Δ розраховувався параметр регуляризації α . Для довільно вибраного значення α розв'язувалась система алгебраїчних рівнянь, що замінювала інтегральне рівняння (21), далі отриманий розв'язок μ_Δ підставлявся у вираз (22) і обчислювалась різниця $R = \rho^2(A\mu_\Delta, \lambda_\Delta \phi)$. Підбиралось таке значення α_{\min} , яке відповідало мінімуму цієї різниці. Відповідне йому μ_Δ і приймалось як розв'язок системи рівнянь.

Процедура знаходження параметра регуляризації проілюстрована на рис. 2, де представлена залежність $R(\alpha)$ для $\Delta = 0,1$. Згідно з цим графіком параметр регуляризації у даному випадку дорівнює $\alpha = 2 \times 10^{-5}$.

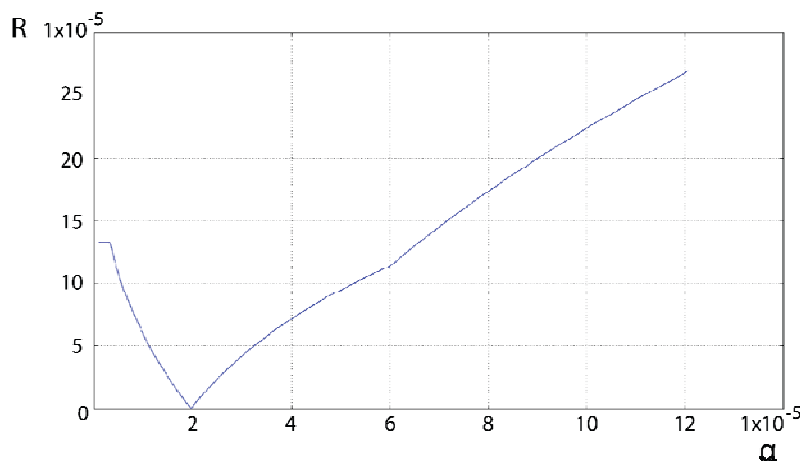


Рис. 2. Визначення параметра регуляризації.

Рис. 3 показує, який вигляд мають реконструйовані фантоми при застосуванні обох згаданих методів. На рис. 4 представлено екваторіальні перерізи реконструйованих фантомів. На рис. 5 приведено залежність δ_μ від Δ для кожного із застосованих методів реконструкції. Цей графік є відповіддю на поставлене у статті питання. Як бачимо з даного рисунку, умова збіжності не виконується у випадку використання методу оберненого проєціювання і виконується для варіаційного методу. Іншими словами, зображення, отримане методом оберненого проєціювання, нестійке на відміну від стійкого зображення, отриманого варіаційним методом.

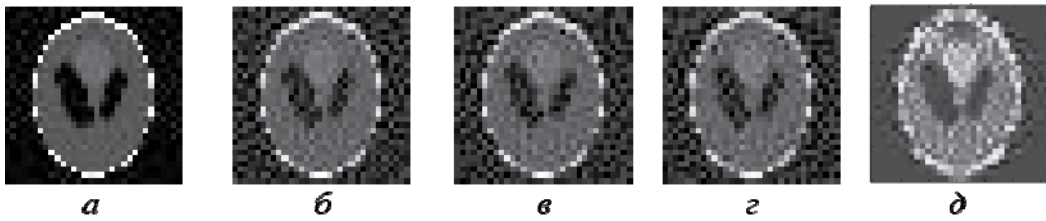


Рис. 3. Результати реконструкції отримані варіаційним методом для різних значень похибки Δ : $a - 0,02$, $b - 0,05$, $v - 0,1$, $z - 0,15$, а також методом оберненого проєціювання (d).

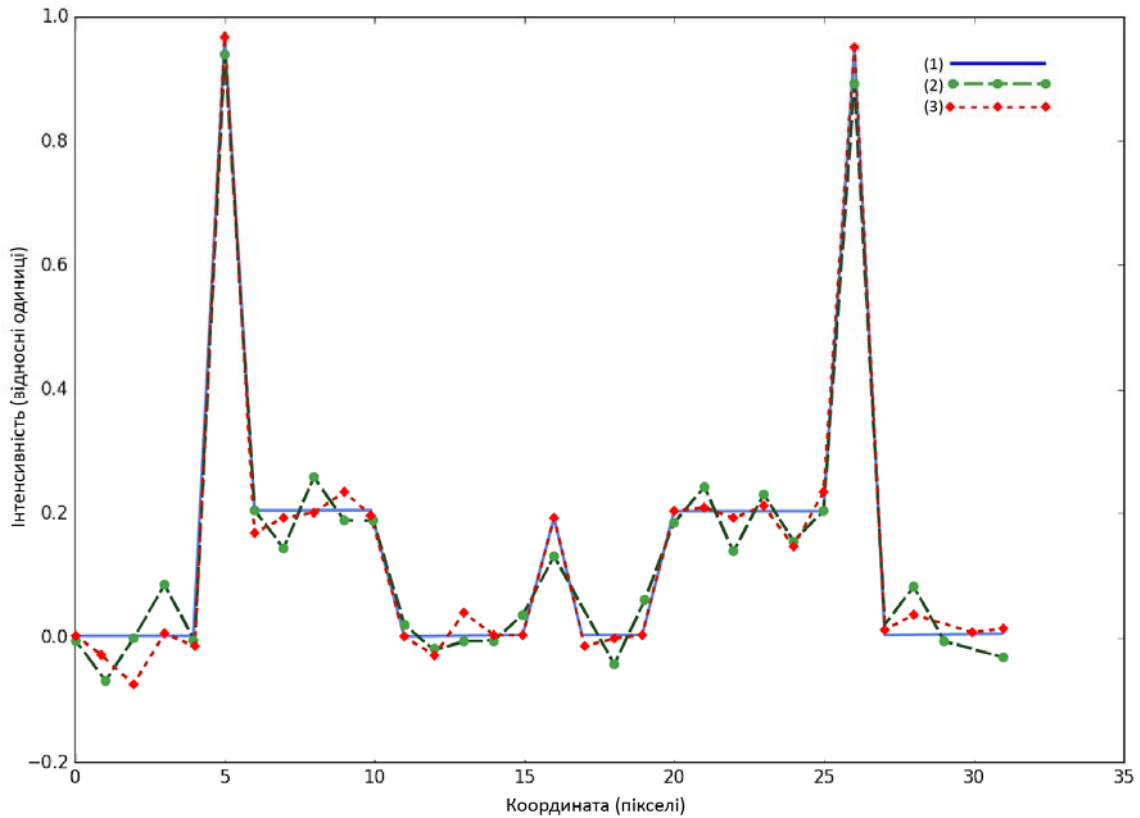


Рис. 4. Екваторіальний переріз оригінального (1) та реконструйованого фантому методом оберненого проєціювання (2) та варіаційним методом (3).

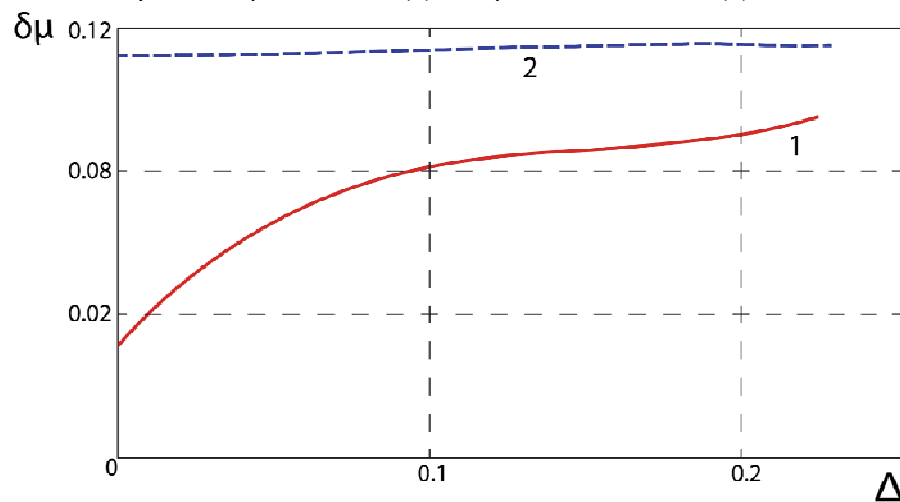


Рис. 5. Залежність похибки реконструйованого зображення δ_μ від похибки експерименту Δ . При використанні варіаційного методу (1), та методу оберненого проєціювання (2).

ВИСНОВКИ

Головний результат виконаного в даній статті дослідження полягає у встановленні того факту, що зображення, отримане методом оберненого проєціювання, є нестійким. На нашу думку, цей факт не може залишатись поза увагою фахівців, адже саме метод оберненого проєціювання найбільш широко застосовується в сучасних комп'ютерних томографах.

Реконструювання зображень – це розв'язок відповідного інтегрального рівняння. Нестійкість цього розв'язку проявляється у появі значних флуктуацій. По відношенню до зображення це означає, що останнє стає сильно зашумленим.

Чому ж тоді виявлена нами нестійкість не заважала дотепер використанню метода оберненого проєціювання? Як показано у цій статті, це відбувалось завдяки тому, що похибка реконструйованого зображення приблизно дорівнювала похибці експерименту. Усі ж спроби зменшити похибку експерименту при збереженні для реконструкції метода оберненого проєціювання обов'язково призведуть до появи зашумленості.

У даній роботі встановлено, що цю проблему можна вирішити, застосувавши при реконструкції варіаційний метод. В цьому випадку при наближенні похибки експерименту до нуля, результат реконструкції збігається до точного. Але тут ми стикаємось з новою проблемою: реалізація цього методу пов'язана зі значно більшим числом обчислювальних операцій і майже невиконувана для реальних об'ємів даних.

На нашу думку, вихід із ситуації, що склалася, можливий за допомогою компромісу: за рахунок використання в методі оберненого проєціювання ідеї регуляризації, притаманної варіаційному методу. Це тема наступної статті, над якою працюють автори.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Buzug Thorsten M. Computed Tomography / Thorsten M. Buzug. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 522 p. – ISBN 978-3-540-39408-2.
2. Deans Stanley. The Radon Transform and Some of its Applications / S. Deans. – New York : Wiley, 1983. – 304 p. – ISBN 978-0-486-46241-7.
3. Tikhonov Andrey Nikolayevich. Solution of Ill-posed Problems / A. Tikhonov, V. Arsenin. – Washington: Winston and Sons, 1977. – 272 p. – ISBN 978-0-470-99124-4.
4. Herman G. T. Fundamentals of computerized tomography: Image reconstruction from projection, 2nd edition / G. Herman. – London : Springer, 2009. – 300 p. – ISBN 978-1-84628-723-7.
5. Shepp Larry. The Fourier Reconstruction of a Head Section / L. Shepp, B. Logan // IEEE Transactions on Nuclear Science. – 1974. – NS-21. – P. 21-43.