

Original article

<https://doi.org/10.26565/2075-3810-2021-46-02>

УДК 51.76

## ЗВОРОТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАДОНА БЕЗ СИНГУЛЯРНОСТІ ДЛЯ ПУЧКА З ТОЧКОВИМ ФОКУСОМ

Т. Г. Віхтинська , К. Є. Лапітан , К. Е. Немченко 

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6,  
м. Харків, 61022, Україна;

e-mail: [vikhtinskaya@karazin.ua](mailto:vikhtinskaya@karazin.ua), [konstantinlapitan@gmail.com](mailto:konstantinlapitan@gmail.com), [nemchenko@karazin.ua](mailto:nemchenko@karazin.ua)

Надійшла до редакції 14 листопада 2021 р. Переглянута 10 грудня 2021 р.

Прийнята до друку 13 грудня 2021 р.

**Актуальність.** Необхідність реконструкції зображень за його проєкціями багато раз впливала як засіб вивчення об'єкта у найрізноманітніших сферах науки, техніки та у медицині. Основу цього методу складає проникнення через об'єкт пучка променів під різними ракурсами та отримання на чутливій до цих променів поверхні тінювого зображення. Через те, що тканини та кістки мають різну поглинаючу густину, по таким проєкціям можливо отримати доволі точне уявлення про наявність патологічних утворень або пошкоджень.

Незважаючи на всі переваги томографії, вона має низку недоліків. Один з найсерйозніших — це перевищення дозвільної дози випромінювання для людини. Тому є декілька варіантів зниження навантаження на пацієнта, й один із них, це використання методу томосинтезу замість комп'ютерної томографії. Томосинтез займає середнє положення за інформативністю між комп'ютерною томографією та двовимірною рентгенографією, незначно перевищуючи дозу випромінювання в останньому випадку. Тому через це зараз по всьому світу ведуться роботи у напрямку покращення методу томосинтезу аби розширити кількість захворювань, які можливо діагностувати таким методом, та роботи з підвищення якості отриманих зображень.

**Мета роботи** — визначення ефективності методу відновлення зображення при використанні перетворення Радона у загальному вигляді порівняно з класичними методами.

**Матеріали і методи.** Методи математичної фізики для відновлення медичних зображень, а саме Фур'є перетворення у полярній системі координат та перетворення Радона.

**Результати.** В результаті виконаної роботи було отримано вираз для зворотного перетворення Радона та змодельовано роботу томографа з точковим фокусом рентгєнівських променів. При порівнянні різних методів реконструкції об'єктів з оригінальним зображенням перетворення Радона в загальному вигляді має більшу точність.

**Висновки.** Не зважаючи на майже трикратний зріст часу обчислення реконструкції, даний метод має свої практичні переваги у випадку виявлення патологій, що тільки розвиваються та не мають чітких границь, або у випадку виявлення об'єктів малого розміру.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** перетворення Фур'є; перетворення Радона; томографія; томосинтез; реконструкція зображень.

**Як цитувати:** Віхтинська ТГ, Лапітан КЄ, Немченко КЕ. Зворотне перетворення Радона без сингулярності для пучка з точковим фокусом. Біофізичний вісник. 2021;46:23–33. <https://doi.org/10.26565/2075-3810-2021-46-02>

**In cites:** Vikhtinskaya TG, Lapitan KE, Nemchenko KE. Inverse radon transform without singularity for rays with a point focus. Biophysical Bulletin. 2021;46:23–33. <https://doi.org/10.26565/2075-3810-2021-46-02> (in Ukrainian)

**Open Access.** This article is licensed under a Creative Commons Attribution 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>

Візуалізація внутрішніх структур об'єктів широко розповсюджена у багатьох сферах науки, медицині та промисловості. Тому методи рентгенології застосовуються як у виявленні патологій людини, так і для вивчення структури туманностей за даними рентгенограм з космічних апаратів, або в дефектоскопії. Такі методи здатні генерувати тривимірні данні, які надають перевагу у повноті інформації про внутрішній стан піддослідного зразку, чи то структура кісток, чи наявність мікроскопічних тріщин у шарах металу.

### ТЕОРЕТИЧНА МОДЕЛЬ

Основою реконструктивної томографії є отримання великої кількості проєкцій перетинів об'єкта, для котрих розв'язують двовимірну задачу відновлення зображення і потім зіставляють для отримання точної тривимірної структури.

На рис. 1 представлено схему отримання проєкційних даних у перетині об'єкта.

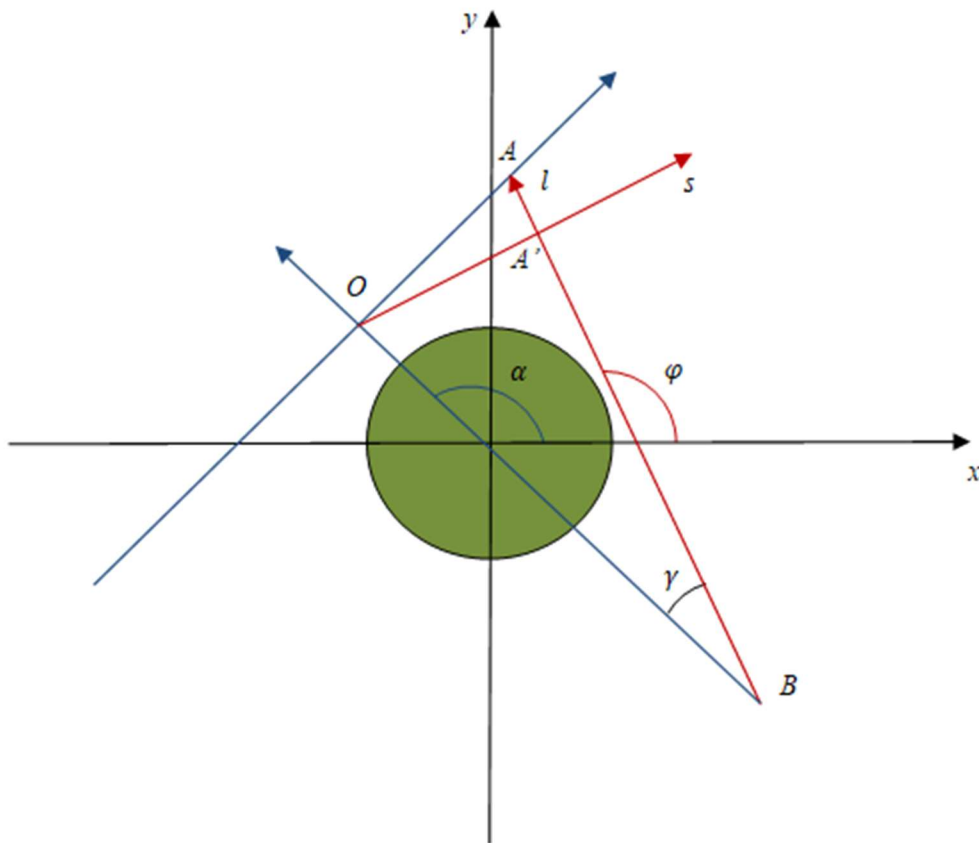


Рис. 1. Дослідження внутрішньої структури об'єкта томографом з точковим фокусом та відповідна система координат для паралельного проєктування. Тут  $\alpha$  – кут нахилу системи детекторів та випромінювача,  $\gamma$  – кут нахилу променя проєктування,  $OA$  – відповідна координата детектора для кута  $\gamma$ ,  $l$  – напрямок проєктування,  $s$  – відповідна координата детектора для паралельного вигляду проєктування,  $\varphi$  – кут нахилу паралельної системи проєктування.

Fig. 1. The study of the internal structure of the object with a point-focused tomograph and the corresponding coordinate system for parallel projecting. Here  $\alpha$  is the angle of the detector and emitter system,  $\gamma$  is the angle of the projection beam,  $OA$  is the corresponding coordinate of the detector for the angle  $\gamma$ ,  $l$  is the direction of the projecting,  $s$  is the corresponding coordinate of the detector for the parallel projecting,  $\varphi$  is the angle of the parallel projecting.

Якщо розподіл густини всередині об'єкта представити функцією  $f(x, y)$ , то значення проєкції, отриманої на детекторі, можна записати у вигляді інтеграла вздовж напрямку проєктування  $l$ :

$$Q(\gamma, \alpha) = \int f(x, y) dl. \quad (1)$$

Зв'язок між декартовими координатами  $x, y$  та променем проєктування  $l$  дається виразом

$$l = x \cos(\alpha - \gamma) + y \sin(\alpha - \gamma) - H \sin \gamma. \quad (2)$$

Тут  $H$  — це відстань  $OB$  від детектора до випромінювача.

Цей зв'язок надає змогу переписати інтеграл (1) у вигляді двократного інтеграла

$$Q(\gamma, \alpha) = \int \int f(x, y) \delta(x \cos(\alpha - \gamma) + y \sin(\alpha - \gamma) - H \sin \gamma) dx dy. \quad (3)$$

З теореми про центральний перетин [1] випишемо зв'язок між Фур'є простором функції  $f(x, y)$  та її перетворенням Радона для паралельного проєктування.

$$F(w_1, w_2) = F(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{R}(\omega, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) e^{-i\omega s} ds. \quad (4)$$

Тут функція  $F(w_1, w_2)$  є двовимірним Фур'є-зображенням функції  $f(x, y)$ ,  $R(s, \varphi)$  — радонівський образ функції  $f(x, y)$ ,  $\tilde{R}(\omega, \varphi)$  — це одновимірне перетворення Фур'є для радонівського образу по змінній  $s$ .

Розглянемо тепер задачу відновлення функції  $f(x, y)$  з двовимірного Фур'є зображення  $F(w_1, w_2)$ .

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w_1, w_2) e^{i(w_1 x + w_2 y)} dw_1 dw_2. \quad (5)$$

Використовуючи вирази (4) приведемо (5) до вигляду

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(X, \varphi) G(s - X) dX d\varphi. \quad (6)$$

Тут функція

$$G(s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega s} d\omega \quad (7)$$

представляє собою ядро зворотного проєктування з фільтрацією методом згортки [1] і використовується для відновлення даних, отриманих під час паралельного проєктування. Для переходу до проєктування променями з точковим фокусом зробимо заміну змінних (див. рис. 1).

$$\begin{cases} s = H \sin \gamma \\ \varphi = \alpha - \gamma \end{cases} \quad (8)$$

В цьому випадку формула (6) набуває вигляду

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} H \cos \gamma Q(\gamma, \alpha) G(H \sin(\gamma)) d\gamma d\alpha, \quad (9)$$

де  $\gamma_{max}$  — максимальний кут відхилення променя від лінії, яка з'єднує фокус  $B$  з центром обертання.

Розпишемо тепер внутрішню функцію  $G(H \sin(\gamma))$ , зробивши заміну

$$\omega = \hat{\omega} \frac{\gamma}{H \sin(\gamma)}, \quad (10)$$

яка приводить до наступного виразу для функції (7):

$$G(H \sin(\gamma)) = \left( \frac{\gamma}{H \sin(\gamma)} \right)^2 G(\gamma). \quad (11)$$

Тепер рівняння (9) набуває такого вигляду:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \frac{\cos \gamma}{H} \left( \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \right)^2 Q(\gamma, \alpha) G(\hat{\gamma} - \gamma) d\gamma d\alpha. \quad (12)$$

Цей вираз (12) використовується для відновлення зображень, отриманих під час комп'ютерної томографії, та відображає суть перетворень Радона.

Проблемою такого метода є той факт, що інтеграл (7) має особливість, і тому замість нього використовують наближені функції [2, 3] які приводять до наближеного відновлення.

Найпростіше наближення (7) полягає у введенні максимальної просторової частоти  $W_{max}$ ,

$$G(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-W_{max}}^{W_{max}} |\omega| e^{i\omega\gamma} d\omega, \quad (13)$$

що приводить до наступного вигляду функції  $G(\gamma)$

$$G(\gamma) = \frac{2}{(2\pi)^2} \left[ \frac{W_{max}}{\gamma} \sin(W_{max}\gamma) - \frac{1 - \cos(W_{max}\gamma)}{\gamma^2} \right]. \quad (14)$$

До недоліків введення такої моделі фільтрації під час відновлення зображень відноситься відсутність алгоритму вибору максимальної частоти  $W_{max}$  та наявність артефактів у відновленому зображенні при зашумленні проєкційних даних. Для згладжування даних можна використовувати метод помноження ядра фільтрації на швидко спадаючу функцію [4].

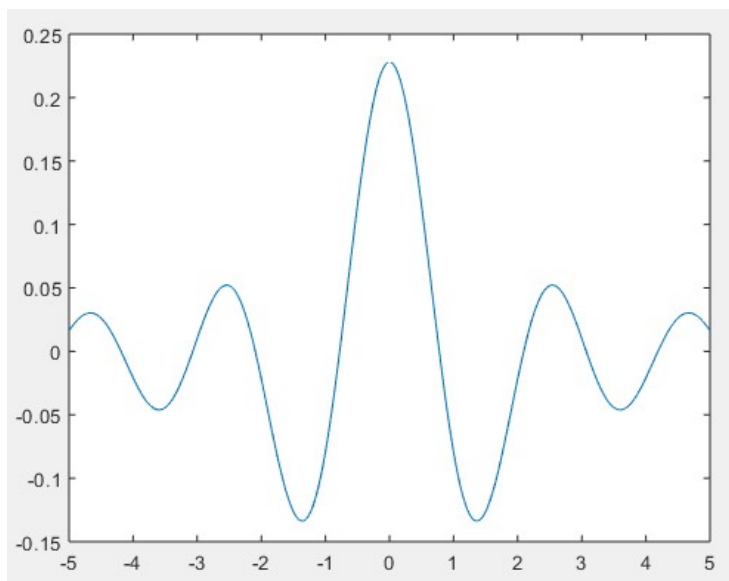
Ще один спосіб складається з комплексного представлення величини  $s$ , що входить до інтегралу у виразі (7) за умови, що уявна частина  $\delta$  нової величини  $s$  є малою та позитивною:

$$s \rightarrow s + i\delta \quad (\delta > 0).$$

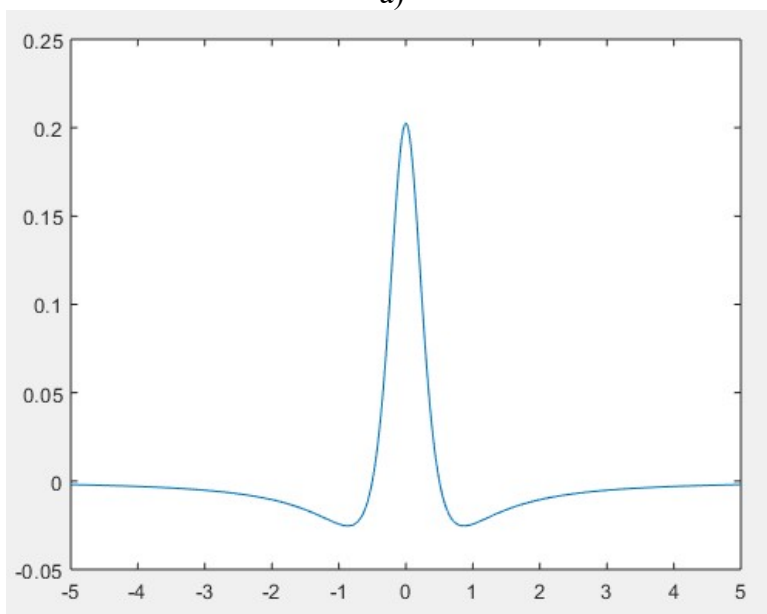
В цієї моделі отримуємо таке представлення для ядра  $G$ :

$$G(\gamma, \delta) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\gamma^2 - \delta^2}{(\gamma^2 + \delta^2)^2}. \quad (15)$$

На рис. 2 представлено загальний вигляд ядра  $G$ : в обох випадках



а)



б)

Рис. 2. Ядро перетворення  $G$ : а) з обмеженням максимальної частоти інтегрування (14), б) з введенням комплексної змінної (15).

Fig. 2. The kernel of the transformation  $G$ : a) with the limitation of the maximum frequency of integration (14), b) with the introduction of a complex variable (15).

Ідея роботи полягає у використанні зворотного перетворення Радона у загальному вигляді без введення максимальної просторової частоти, та проведенні обробки початкових даних за допомогою потрібного інтегрування. Для зручності перевизначимо границі інтегрування виразу (7)

$$G(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega\gamma} d\omega = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} |\omega| \cos(\omega\gamma) d\omega. \quad (16)$$

Тепер підставимо значення функції (16) до виразу (12)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\gamma_{max}}^{\gamma_{max}} \int_0^{\infty} |\omega| \frac{\cos \gamma}{H} \left( \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \right)^2 Q(\gamma, \alpha) \cos(\omega(\hat{\gamma} - \gamma)) d\gamma d\alpha. \quad (17)$$

У даному випадку не виникає поняття фільтра  $G$ , який використовується для попередньої фільтрації проєкцій. Такий метод позбавлений недоліків стандартного методу відновлення, зокрема відсутня необхідність підбору просторової частоти  $W_{max}$ .

## РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ

На рис. 3 зображено результати роботи алгоритмів реконструкції та оригінальне тестове зображення, з яким будемо порівнювати.

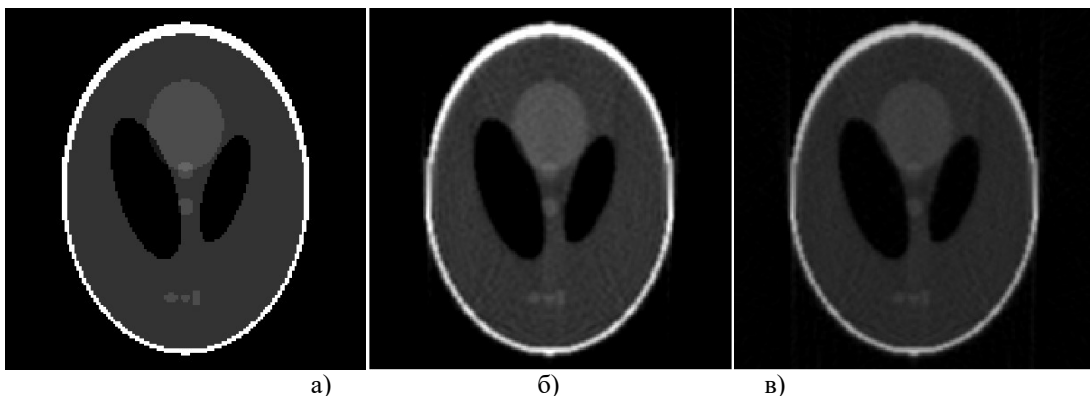


Рис. 3. Перевірка роботи алгоритмів реконструкції: а) оригінал зображення, б) результат алгоритму відновлення без фільтрації, в) результат алгоритму з одновимірною фільтрацією.

Fig. 3. Testing of the reconstruction algorithms: a) the original image, b) the result of the recovery algorithm without filtering, c) the result of the algorithm with one-dimensional filtering.

Для перевірки якості відновлення було розраховано середньоквадратичне відхилення яскравості відповідних пікселів від оригінального зображення. Для випадку перетворення Радона у загальному вигляді відхилення складає 0,0883 одиниці, а для класичного методу 0,0922 одиниці.

Окрім цього, проведено перевірку відновлення на декількох тестових зображеннях, щоб визначити пороговий контраст та просторове розподілення. На рис. 4 представлено результат роботи алгоритму для зображення з малою зміною густини об'єкта.

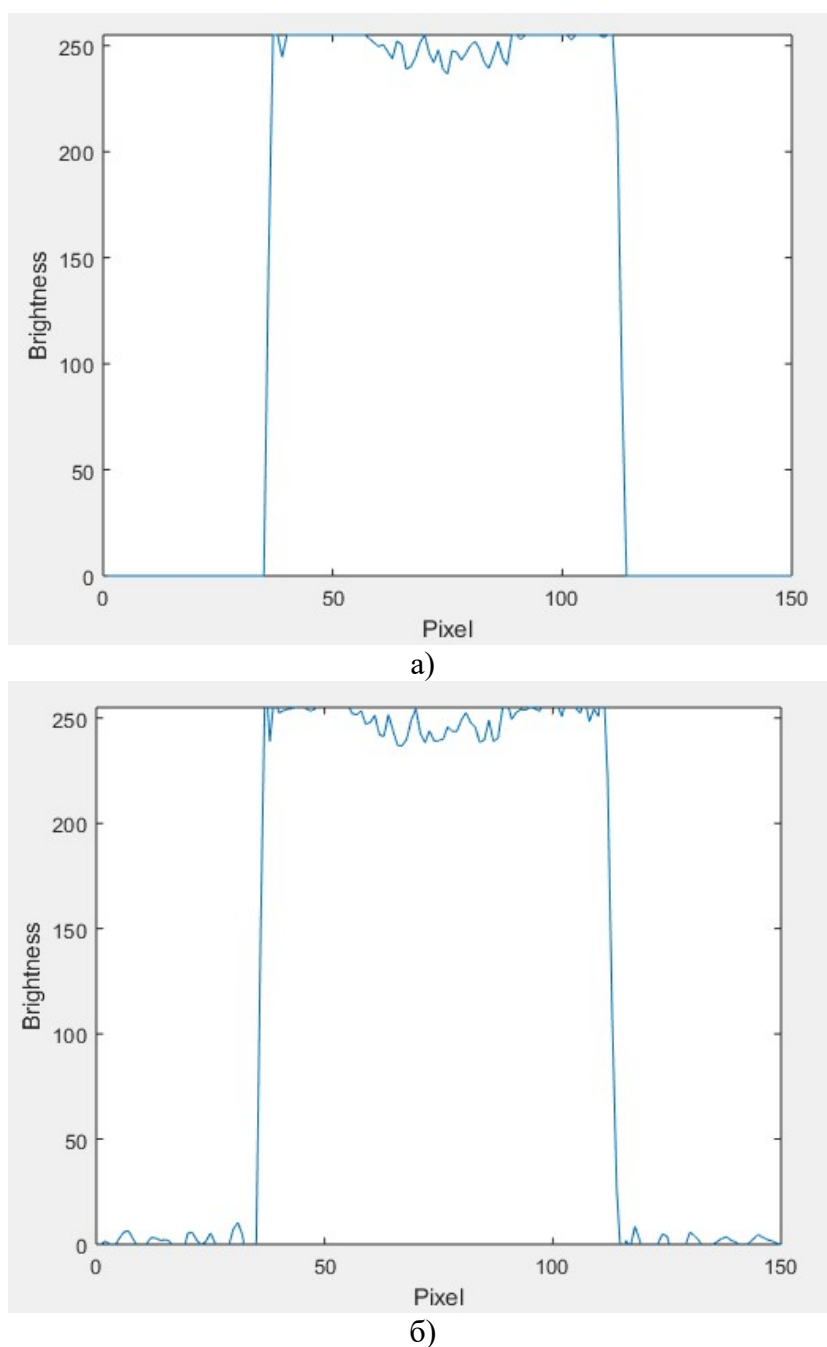


Рис. 4. Розподіл густини об'єкта з незначним дефектом: а) алгоритм відновлення без фільтрації, б) алгоритм відновлення з одновимірною фільтрацією.

Fig. 4. Density distribution of an object with a small defect: a) recovery algorithm without filtering, b) recovery algorithm with one-dimensional filtering.

В обох випадках пороговий контраст зображення складає 4% (густина дефекту 245 одиниць, густина тіла об'єкта 255 одиниць). За наявності дефектів меншого контрасту алгоритми не відокремлюють їх.

На рис. 5 представлено роботу алгоритму для об'єктів малого розміру.

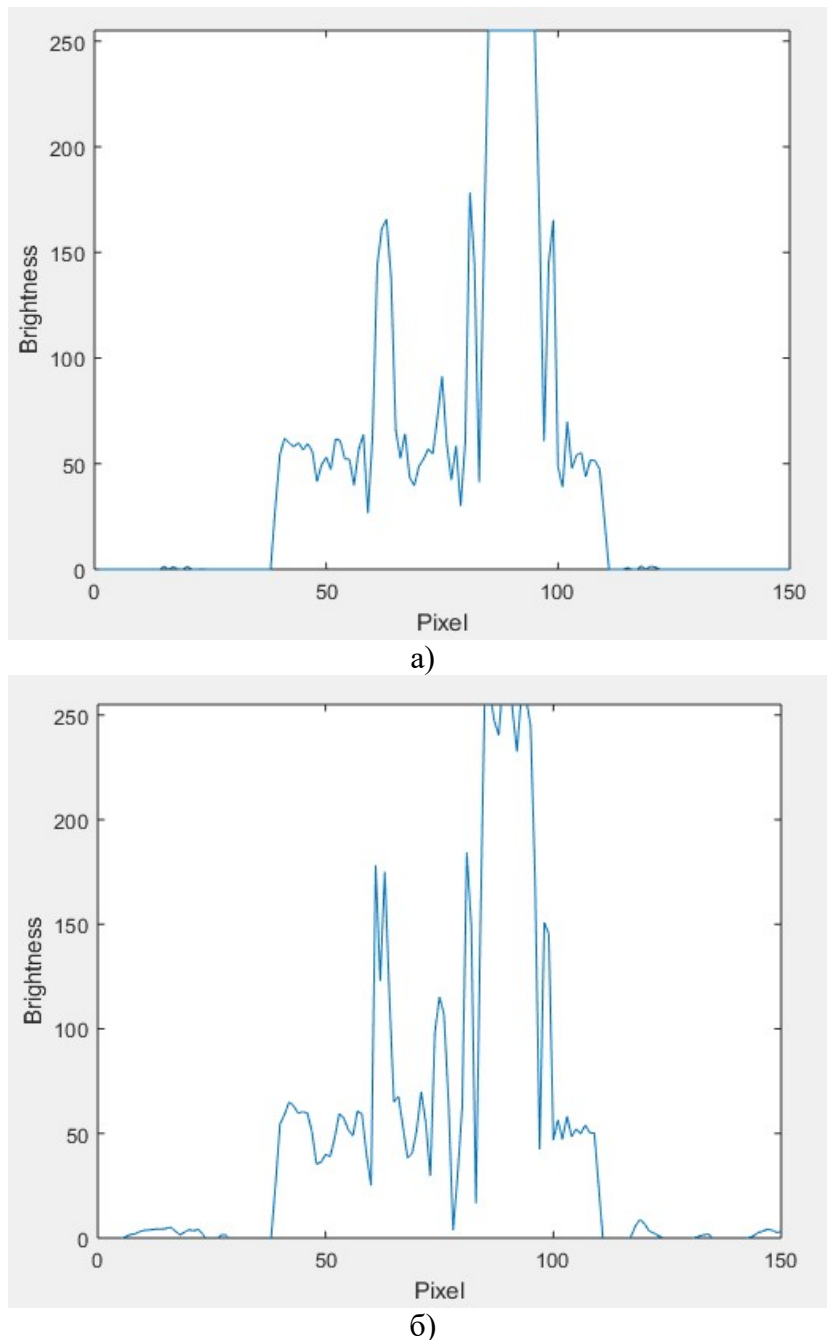


Рис. 5. Розподіл густини об'єктів малого розміру: а) алгоритм відновлення без фільтрації, б) алгоритм відновлення з одновимірною фільтрацією.

Fig. 5. Density distribution of small objects: a) recovery algorithm without filtering, b) recovery algorithm with one-dimensional filtering.

При дослідженнях об'єктів малого розміру кращий результат показав алгоритм з одновимірною фільтрацією, він розрізняє перепади густини розміром в один піксел, що складає 0,270 мм.

Отримані зображення показують, що відновлення без фільтрації має значну контрастність та точно передає границі місць зміни густини об'єкта, і тому мають більшу практичну користь при дослідженнях об'єктів, в яких наявні структури малих розмірів або структур, що незначно відрізняються за густиною. Використання такого методу відновлення має артефакти відновлення від різких границь, проте вони



відрізняються від можливих структур всередині досліджуваних об'єктів та зменшують свій вплив з підвищенням частоти інтегрування  $\omega$ , що представлено на рис. 6.

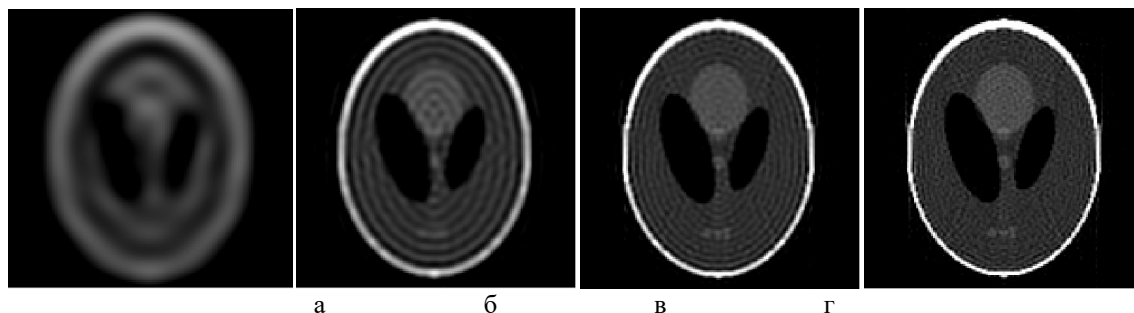


Рис. 6. Зображення отримані при різних просторових частотах  $\omega$ :  
а)  $\omega = 5$ , б)  $\omega = 15$ , в)  $\omega = 25$ , г)  $\omega = 35$ .

Fig. 6. Images obtained at different spatial frequencies  $\omega$ :  
а)  $\omega = 5$ , б)  $\omega = 15$ , в)  $\omega = 25$ , д)  $\omega = 35$ .

Також в реальних дослідженнях дані представлені у значному діапазоні і для відновлених внутрішніх структур вибирають необхідний проміжок, який відповідає за ті чи інші структури, чи то кістки, чи то м'якої тканини, чи то судини, тому в реальній томографії похибки такого роду можуть бути не критичні, але вони потребують подальшого дослідження для можливого усунення.

## ВИСНОВКИ

Використання запропонованого в статті зворотного перетворення Радона в узагальненому вигляді (17) забезпечує цілу низку переваг у порівнянні з класичними методиками відновлення [1]. Перш за все, пропонується метод не містить параметрів підгонки, таких як гранична просторова частота у співвідношенні (14) або величина уявної добавки, яка модулює зменшення функції фільтрації (15) зі зростанням частоти. Це дозволяє використовувати цей метод як при відновленні великих об'єктів малого контрасту, так і об'єктів великого контрасту та малого розміру.

Таке поєднання особливо важливо для прикладних медичних досліджень, зокрема, молочної залози, де необхідно одночасно забезпечувати якісне визначення мікрокальцинатів, що є провісниками захворювань, та пухлин на ранній стадії існування.


Крім того, запропонована методика забезпечує узагальнення на більш складні алгоритми для конусної томографії, а також може бути використана в томосинтезі, де кількість проєкцій робиться малою з метою зменшення дозового навантаження на пацієнта.


## КОНФЛІКТ ІНТЕРЕСІВ

Автори повідомляють про відсутність конфлікту інтересів.

### Authors' ORCID ID

T. G. Vikhtinskaya  <https://orcid.org/0000-0001-8265-4371>

K. E. Lapitan  <https://orcid.org/0000-0003-0050-405X>

K. E. Nemchenko  <https://orcid.org/0000-0002-0734-942X>

## REFERENCES

1. Herman GT. Image reconstruction from projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. New York: Academic Press; 1980. 346 p. ISBN 0-12-342050-4.

2. Hungerbühler N. Singular Filters for the Radon Backprojection. J Appl Anal. 1998;5(1):17–33. <https://doi.org/10.1515/JAA.1999.17>
3. Kunyansky LA. Generalized and Attenuated Radon Transforms: Restorative Approach to the Numerical Inversion. Inverse Probl. 1992;8(5):809. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/8/5/008>
4. Ershova AA. A modified regularization method for solving integral equations of the 1st kind in problems of mathematical modeling [dissertation]. Ekaterinburg: Ural Federal University, 2019. 109 p. (in Russian)

## INVERSE RADON TRANSFORM WITHOUT SINGULARITY FOR RAYS WITH A POINT FOCUS

T. G. Vikhtinskaya , K. E. Lapitan , K. E. Nemchenko 

*V. N. Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, 61022, Ukraine*

**Background:** The need to reconstruct images from their projections has been repeated many times as a means of studying an object in a wide variety of fields of science, technology and medicine.

The basis of this method is the penetration through object of beams under different angles and the acquisition of a shadow image on the surface sensitive to these rays. Since that the tissues and bones have different absorption densities from such projections it is possible to get a reasonably accurate idea of the presence of pathological formations or lesions.

Despite all the advantages of tomography, it has disadvantages. One of the most serious is the exceedance of radiation for humans. Therefore, there are several options for reducing the burden on the patient, one of which is the use of tomosynthesis instead of CT scanning. Tomosynthesis occupies an average position in informativeness between computer tomography and radiology not much higher than the dose of the latter. As a result, work is underway worldwide to improve the tomosynthesis method to increase the number of diseases that can be diagnosed by this method and to improve the quality of the images obtained.

**Objectives:** Defines the efficiency of the image recovery method when using the Radon transform in general form compared to classical methods.




**Materials and methods:** Mathematical physics methods for reconstructing medical images, namely the Fourier transform in the polar coordinate system and the Radon transform.

**Results:** As a result of the work done, an expression for the reverse Radon transform was obtained and the work of the tomograph with point focus of X-ray rays was modeled. When comparing different reconstruction techniques with the original image, the Radon transform is generally more accurate.

**Conclusions:** Despite the considerable increase in the time of reconstruction computation, about three times, this method has practical advantages in the case of detection of pathologies that only develop and have no clear boundaries or in the case of detection of small objects.

**KEY WORDS:** Fourier transformation, Radon transformation, tomography, tomosynthesis, image reconstruction.

## ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА БЕЗ СИНГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ ПУЧКА С ТОЧЕЧНЫМ ФОКУСОМ

Т. Г. Вихтинская , К. Е. Лапитан , К. Э. Немченко 

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
площадь Свободы, 6, г. Харьков, 61022, Украина*

**Актуальность.** Необходимость реконструкции изображений по его проекциям много раз вытекала как средство изучения объекта в различных сферах науки, техники и в медицине. Основу этого метода составляет проникновение через объект пучка лучей под разными ракурсами и получение на чувствительной к этим лучам поверхности теневого изображения. Так как ткани и кости имеют разную впитывающую плотность, по таким проекциям можно получить довольно точное представление о наличии патологических образований или повреждений.

Несмотря на все преимущества томографии, она имеет недостатки. Один из самых серьезных — это превышение допустимой дозы излучения для человека. Тому есть несколько вариантов снижения нагрузок на пациента, и один из них — это использование метода томосинтеза вместо компьютерной томографии. Томосинтез занимает среднее положение по информативности между компьютерной томографией и двумерной рентгенографией, незначительно превышая дозу излучения по отношению к последнему случаю. По этой причине сейчас по всему миру ведутся работы по улучшению метода томосинтеза, чтобы расширить количество заболеваний, которые можно диагностировать таким методом, и работы по повышению качества полученных изображений.

**Цель работы** — определить эффективность метода восстановления изображения при использовании преобразования Радона в общем виде по сравнению с классическими методами.

**Матеріали і методи.** Методи математическої фізики для відновлення медических зображень, в частності Фур'є перетворення в полярних координатах і перетворення Радона.

**Результати.** В результаті виконаної роботи було отримано вираження для зворотного перетворення Радона і смодельовано роботу томографа з точковим фокусом рентгеновських лучей. При порівнянні різних методів реконструкції об'єктів з оригінальним зображенням перетворення Радона в загальному вигляді має більшу точність.

**Висновки.** Незважаючи на більш ніж тріхкратний зростання часу обчислення реконструкції, даний метод має свої переваги в разі визначення патологій, які тільки розвиваються і не мають чітких границь, або в разі визначення об'єктів малого розміру.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** перетворення Фур'є, перетворення Радона, томографія, томосинтез, реконструкція зображень.