УДК 519.642.7

# Обоснование численного решения граничных интегральных уравнений задачи рассеяния волн на экранированной импедансной ленте

Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

*Национальная академия Национальной гвардии Украины, Украина*

Предлагается метод численного решения системы граничных сингулярных интегральных уравнений, которая возникает при рассмотрении задачи рассеивания волн на экранированной импедансной ленте. Доказана сходимость последовательности приближённых решений к точному решению. Дана оценка скорости сходимости этого процесса.

***Ключевые слова:*** *импедансные структуры, существование приближённого решения, скорость сходимости приближённых решений.*

Запропоновано метод чисельного розв'язків системи граничних сингулярних інтегральних рівнянь, яка виникає при розгляді завдання розсіювання хвиль на екранованій імпедансній стрічці. Доведено збіжність послідовності наближених розв'язків до точного рішення. Дана оцінка швидкості збіжності цього процесу.

***Ключові слова:*** *імпедансні структури, існування наближеного розв'язку, швидкість збіжності наближених розв'язків.*

The method for numerical solution of boundary singular integral equations of the problems of waves scattering of on shield impedance lattice had been discussed. The convergence of the approximate solutions to the exact solution had been proved. The rate of convergence of this process had been found.

***Key words:*** *impedance structures, existence of approximate solution, the rate of convergence of the approximate solutions.*

## 1. Постановка задачи и её актуальность

При построении математических моделей задач рассеяния волн на экранированной сверхпроводящей системе лент [1] и рассеяния волн на импедансной ленте, расположенной на экранированном диэлектрическом слое [2,3] возникают следующие системы интегральных уравнений:

$$\nu_2(\xi)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{1,1}(\xi,\tau)\cdot\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{1,2}(\xi,\tau)\cdot\frac{\nu_2(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$
$$+\frac{c_1}{\pi}\int_{-1}^{\xi}\sqrt{1-\xi^2}\cdot\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{c_2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}\cdot\ln|\xi-\tau|\cdot\frac{\nu_2(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f_1(\xi),\quad |\xi|<1. \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tau-\xi}\cdot\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{2,1}(\xi,\tau)\cdot\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{2,2}(\xi,\tau)\cdot\frac{\nu_2(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$
$$+\frac{c_3}{\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{c_4}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\xi-\tau|\cdot\frac{\nu_2(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f_2(\xi),\quad |\xi|<1, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0. \tag{3}$$

В уравнениях (1) и (2) функции $f_i(\xi)$ и $Q_{i,j}(\xi,\tau)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем $\frac{1}{2}$. Эти системы уравнений получены с помощью метода параметрических представлений интегральных преобразований [4-7].

В статье предлагается схема приближённого решения систем интегральных уравнений вида (1)-(3) и даётся её обоснование. Она основывается на результатах работ [8,9], где были обоснованы схемы численного решения задач рассеяния волн на системах импедансных лент.

**2. Определение функциональных пространств и операторов в них.**

Введём гильбертовы пространства $L^2([-1,1],\rho)$ измеримых функций со скалярным произведением

$$(u,v)_\rho=\int_{-1}^{1}u(\tau)\cdot\bar{v}(\tau)\cdot\rho(\tau)d\tau, \tag{4}$$

и нормой: $\|v\|_\rho=\sqrt{(v,v)_\rho}$ и пространства:

$$L^{2,0}([-1,1],\rho)=\left\{u\in L^2([-1,1],\rho)\,\middle|\,(u,1)_\rho=0\right\}. \tag{5}$$

Обозначим $L_n^2([-1,1],\rho)$ - подпространства пространств $L^2([-1,1],\rho)$, элементами которого являются полиномы степени $n$. Введём в рассмотрение подпространства $L_n^{2,0}([-1,1],\rho)=\left\{u\in L_n^2([-1,1],\rho)\,\middle|\,(u,1)_\rho=0\right\}$.

Обозначим:

$$\rho_1(\tau)=\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)^{-1},\quad \rho_2(\tau)=\sqrt{1-\tau^2}, \tag{6}$$

$$Q_{1,3}(\xi,\tau)=\frac{c_1}{2}\cdot(1+sign(\xi-\tau))\cdot\sqrt{1-\xi^2}, \tag{7}$$

$$Q_{1,4}(\xi,\tau)=c_2\cdot\sqrt{1-\xi^2}\cdot\ln|\xi-\tau|, \tag{8}$$

$$Q_{2,3}(\xi,\tau)=\frac{c_3}{2}\cdot(1+sign(\xi-\tau)),\qquad Q_{2,4}(\xi,\tau)=c_4\cdot\ln|\xi-\tau|. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение операторы:

$$\Gamma: L_n^{2,0}([-1,1],\rho_1)\to L^2([-1,1],\rho_2),\quad (\Gamma u)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-1}\frac{1}{\tau-\xi}\cdot\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},\quad |\xi|<1; \tag{10}$$

$$\Theta_{i,j}: L^2([-1,1],\rho_1)\to L^2([-1,1],\rho_i),\quad (\Theta_{i,j}u)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{i,j}(\xi,\tau)\cdot\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \tag{11}$$

$$|\xi|<1,\ i=1,2,\ j=1,\ldots,4.$$

Пусть $H_1^2 = L^{2,0}([-1,1],\rho_1)\times L^2([-1,1],\rho_1)$ и $H_2^2 = L^2([-1,1],\rho_1)\times L^2([-1,1],\rho_2)$ - гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$\left(\vec{V},\vec{U}\right)_{H_1^2} = \sum_{i=1}^{2}\left(v_i,u_i\right)_{\rho_1}, \quad \vec{V} = \left(v_1,v_2\right)\in H_1^2, \quad \vec{U} = \left(u_1,u_2\right)\in H_1^2; \tag{12}$$

$$\left(\vec{W},\Upsilon\right)_{H_2^2} = \sum_{i=1}^{2}\left(\omega_i,\gamma_i\right)_{\rho_i}, \quad \vec{W} = \left(\omega_1,\omega_2\right)\in H_2^2, \quad \vec{U} = \left(\gamma_1,\gamma_2\right)\in H_2^2; \tag{13}$$

и нормами: $\left\|\vec{W}\right\|_{H_i^2} = \sqrt{\left(\vec{W},\vec{W}\right)_{H_i^2}}, \quad (i=1,2).$

Расширим оператор $\Gamma$ на пространство $L^{2,0}([-1,1],\rho_1)$ по норме этого пространства. Введём операторы:

$$\mathbf{G}: H_1^2 \to H_2^2, \quad \left(\vec{W} = \mathbf{G}\vec{V}\right)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_1 = v_2 \\ w_2 = \Gamma v_1 \end{array}\right\}; \tag{14}$$

$$\mathbf{K}: H_1^2 \to H_2^2, \quad \left(\vec{W} = \mathbf{K}\vec{V}\right)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_1 = \Theta_{1,1}v_1 + \Theta_{1,2}v_2 \\ w_2 = \Theta_{2,1}v_1 + \Theta_{2,2}v_2 \end{array}\right\}; \tag{15}$$

$$\mathbf{R}: H_1^2 \to H_2^2, \quad \left(\vec{W} = \mathbf{R}\vec{V}\right)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_1 = \Theta_{1,3}v_1 + \Theta_{1,4}v_2 \\ w_2 = \Theta_{2,3}v_1 + \Theta_{2,4}v_2 \end{array}\right\}; \tag{16}$$

$$\mathbf{A}: H_1^2 \to H_2^2, \quad \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{K} + \mathbf{R}. \tag{17}$$

Теперь систему уравнений (1)-(3) можно записать в виде.

$$\mathbf{A}\vec{V} = \vec{F}, \tag{18}$$

где $\vec{F} = \left(f_1, f_2\right)$.

***Лемма 1.*** *Оператор* $\mathbf{A}: H_1^2 \to H_2^2, \quad \mathbf{A} = \mathbf{G} + \mathbf{K} + \mathbf{R}$ *ограничен и непрерывно обратим в паре пространств* $\left(H_1^2, H_2^2\right)$.

**Доказательство**.

Введём вектор-функции:

$$\vec{X}_{2k}(\tau) = \left(T_{k+1}(\tau),0\right), \quad \vec{X}_{2k+1}(\tau) = \left(0,T_k(\tau)\right), \quad (k = 0,1,2,\ldots,\infty); \tag{19}$$

$$\vec{Y}_{2k}(\tau) = \left(0,U_k(\tau)\right), \quad \vec{Y}_{2k+1}(\tau) = \left(T_k(\tau),0\right), \quad (k = 0,1,2,\ldots,\infty); \tag{20}$$

где $\mathrm{T}_k(\tau)$- многочлены Чебышева первого рода, а $U_k(\tau)$ - многочлены Чебышева второго рода. Система вектор-функций $\left\{\vec{X}_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $H_1^2$ и система вектор-функций $\left\{\vec{Y}_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $H_2^2$. Из свойств оператора $\Gamma$ [10,с.514], [11,с.48] и определения оператора $\mathbf{G}$ следует, что

$$\mathbf{G}\vec{X}_k = \vec{Y}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,\infty. \tag{21}$$

Таким образом, оператор $\mathbf{G}$ переводит базис пространства $H_1^2$ в базис пространства $H_2^2$ и ограничен. Следовательно, оператор $\mathbf{G}$ является изоморфизмом векторных пространств $H_1^2$ и $H_2^2$. Из теоремы Банаха об изоморфизме [12,с.113] следует, что оператор $\mathbf{G}$ ограничен и непрерывно обратим в паре пространств $\left(H_1^2, H_2^2\right)$.

Ядра интегральных операторов $\Theta_{i,j}$ обладают свойством:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|Q_{i,j}(\xi,\tau)\right|^2 \rho_i(\xi)\,\rho_1(\tau) d\tau\, d\xi < \infty, \quad i = 1,2; \quad j = 1,\ldots 5. \tag{22}$$

Следовательно, операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}$ компактны. Согласно критерию Никольского [12,с.150], из ограниченности оператора $\mathbf{G}$ и компактности оператора $\mathbf{K}+\mathbf{R}$ следует, что оператор $\mathbf{A}$ - фредгольмов и $ind\left(\mathbf{A}\big|_{H_1^2\to H_2^2}\right) = 0.$ Из единственности решения системы граничных интегральных уравнений (1)-(3) следует, что $\dim\ker\left(\mathbf{A}\big|_{H_1^2\to H_2^2}\right) = 0.$ Следовательно, $\mathbf{A}\left(H_1^2\right) = H_2^2$. Из теоремы теоремы Банаха изоморфизме [12,с.113] следует справедливость леммы 1.

**3. Постановка задач для приближённого решения системы интегральных уравнений (1-3).**

Пусть $\left\{t_{1,n,k}\right\}_{k=1}^{n}$ - множество нулей многочленов Чебышева первого рода $T_n(\tau)$ и $\left\{t_{2,n,p}\right\}_{p=1}^{n-1}$ - нули многочленов Чебышева второго рода $U_{n-1}(\xi)$.

Введём в рассмотрение базисные полиномы:

$$l_{1,n,k}(\tau) = \frac{T_n(\tau)}{T'_n\left(t_{1,n,k}\right)\cdot\left(\tau - t_{1,n,k}\right)}, \quad k = 1,\ldots,n; \tag{23}$$

$$l_{2,n,p}(\tau) = \frac{U_{n-1}(\tau)}{U'_{n-1}\left(t_{2,n,p}\right)\left(\tau - t_{2,n,p}\right)}, \quad p = 1,\ldots,n-1. \tag{24}$$

Введем, далее, функции:

$$Q_{i,j,n}(\xi,\tau) = \sum_{p=1}^{n-i+1}\sum_{k=1}^{n} Q_{i,j}\left(t_{i,n,p}, t_{1,n,k}\right)\cdot l_{i,n,k}(\xi)\cdot l_{1,n,k}(\tau), \quad i = 1,2,\ j = 1,2; \tag{25}$$

$$Q_{i,j,n}(\xi,\tau) = \sum_{p=1}^{n-i+1} Q_{i,j}\left(t_{i,n,p}, \tau\right)\cdot l_{i,n,k}(\xi), \quad i = 1,2,\ j = 3,4; \tag{26}$$

$$f_{i,n}(\xi) = \sum_{p=1}^{n-i+1} f_i\left(t_{i,n,p}\right)\cdot l_{i,n,k}(\xi), \quad i = 1,2. \tag{27}$$

Для системы (1-3) рассмотрим аппроксимирующую систему уравнений:

$$\nu_{2,n}(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{1,1,n}(\xi,\tau) + Q_{1,3,n}(\xi,\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{1,2,n}(\xi,\tau)+Q_{1,4,n}(\xi,\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{2,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f_{1,n}(\xi),\quad |\xi|<1, \tag{28}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tau-\xi}\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{2,1,n}(\xi,\tau)+Q_{2,3,n}(\xi,\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{2,2,n}(\xi,\tau)+Q_{2,4,n}(\xi,\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{2,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=f_{2,n}(\xi),\quad |\xi|<1, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0. \tag{30}$$

Пусть:

$$\Theta_{i,j,n}:L^2_{n-1}([-1,1],\rho_1)\to L^2([-1,1],\rho_i),\quad (\Theta_{i,j,n}u)(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_{i,j,n}(\xi,\tau)\cdot\frac{u(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \tag{31}$$

$$|\xi|<1,\ i=1,2,\ j=1,\ldots,4.$$

Введём гильбертовы пространства $H^2_{1,n}=L^{2,0}_{n-1}([-1,1],\rho_1)\times L^2_{n-1}([-1,1],\rho_1)$, $H^2_{2,n}=L^2_{n-1}([-1,1],\rho_1)\times L^2_{n-2}([-1,1],\rho_2)$ и операторы:

$$\mathbf{K}_n:H^2_{1,n}\to H^2_2,\quad \left(\vec W_n=\mathbf{K}_n\vec V_n\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} w_{1,n}=\Theta_{1,1,n}\nu_{1,n}+\Theta_{1,2,n}\nu_{2,n}\\ w_{2,n}=\Theta_{2,1,n}\nu_{1,n}+\Theta_{2,2,n}\nu_{2,n}\end{array}\right\}; \tag{32}$$

$$\mathbf{R}_n:H^2_{1,n}\to H^2_2,\quad \left(\vec W_n=\mathbf{R}_n\vec V_n\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} w_{1,n}=\Theta_{1,3,n}\nu_{1,n}+\Theta_{1,4,n}\nu_{2,n}\\ w_{2,n}=\Theta_{2,3,n}\nu_{1,n}+\Theta_{2,4,n}\nu_{2,n}\end{array}\right\}; \tag{33}$$

$$\mathbf{A}_n:H^2_{1,n}\to H^2_2,\quad \mathbf{A}_n=\mathbf{G}+\mathbf{K}_n+\mathbf{R}_n. \tag{34}$$

В операторных обозначениях (32)-(34) система уравнений (28)-(30) имеет вид:

$$\mathbf{A}_n\vec V_n=\vec F_n, \tag{35}$$

где $\vec F_n=\left(f_{1,n},f_{2,n}\right)$.

Заметим, что система векторов $E_1=\left\{\vec X_{2k}\right\}_{k=0}^{n-2}\cup\left\{\vec X_{2k+1}\right\}_{k=0}^{n-1}$ является базисом в пространстве $H^2_{1,n}$ и система векторов $E_2=\left\{\vec Y_{2k}\right\}_{k=0}^{n-2}\cup\left\{\vec Y_{2k+1}\right\}_{k=0}^{n-1}$ является базисом в пространстве $H^2_{2,n}$. Из определений (31)-(35) $Q_{i,j,n}(\xi,\tau)$ и свойств (8) оператора $\Gamma$ [10,с.514], [11,с.48] следует, что $\mathbf{A}_n\left(H^2_{1,n}\right)\subset H^2_{2,n}$.

**4. Существование решения приближённых задач (35) и их сходимость к точному решению задачи (1)-(3).**

Для произвольной непрерывной функции введём в рассмотрение её интерполяционные полиномы:

$$\left(P_{i,n} g\right)(\xi) = \sum_{p=1}^{n-i+1} g\left(t_{i,n,p}\right) \cdot l_{i,n,k}(\xi), \quad i = 1,2. \tag{36}$$

***Утверждение 1.*** *Для всех функций* $g$ *удовлетворяющих условию Липшица с показателем* $\frac{1}{2}$ *справедливы асимптотические оценки:*

$$\left\| P_{i,n} g - g \right\|_{L^2([-1,1],\rho_i)} \le \frac{M_i(g)}{\sqrt{n}}, \tag{37}$$

*где константы* $M_i(g)$, $(i = 1,2)$ *не зависят от n.*

Утверждение 1 является следствием теорем Джексона (см. следствие 1 теоремы 2 в [13], с.128) и результатов, приведенных в работе [11].

***Лемма 2.***

*Для всех натуральных значений n выполняется неравенство*

$$\left\| \mathbf{A} - \mathbf{A}_n \right\|_{H^2_{1,n} \to H^2_2} \le \frac{M^*}{\sqrt{n}}. \tag{38}$$

*Кроме того,*

$$\left\| \mathbf{A} - \mathbf{A}_n \right\|_{H^2_{1,n} \to H^2_2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{39}$$

***Доказательство.***

Пусть

$$\widehat{Q}_{i,j,n}(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{n} Q_{i,j}\left(\xi, t_k^n\right) \cdot l_{1,n-1,k}(\tau), \quad j = 1,2. \tag{40}$$

Тогда

$$\left\| \left( \Theta_{i,j,n} - \Theta_{i,j} \right) \right\|^2_{L^2([-1,1],\rho_1) \to L^2([-1,1],\rho_i)} \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{i} \left( \left| Q_{i,j,n}(\xi,\tau) - \widehat{Q}_{i,j,n}(\xi,\tau) \right|^2_{C[-1,1]} + \left| Q_{i,j,n}(\xi,\tau) - \widehat{Q}_{i,j,n}(\xi,\tau) \right|^2_{C[-1,1]} \right) \tag{41}$$

Из утверждения 1 следует существование константы $M_1$, для которой справедливо неравенство:

$$\left\| \left( \Theta_{i,j,n} - \Theta_{i,j} \right) \right\|^2_{L^2([-1,1],\rho_1) \to L^2([-1,1],\rho_i)} \le \frac{M_1}{\sqrt{n}}. \tag{42}$$

Из (42) следует, что

$$\left\| \mathbf{K} - \mathbf{K}_n \right\|_{H^2_{1,n} \to H^2_2} \le \frac{2M_3}{\sqrt{n}}. \tag{43}$$

Из результатов работ [10,с.453,459], [11] получаем, что

$$\mathbf{R}\vec{X}_k = \vec{Z}_k, \quad (k = 0,1,2,\ldots,\infty). \tag{44}$$

где

$$\vec{Z}_{2k}(\xi) = -\frac{U_k(\xi)}{k+1}\left( c_1 \cdot \left(1-\xi^2\right), c_3 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \right), \quad k = 0,1,2,\ldots,\infty; \tag{45}$$

$$\vec{Z}_{2k+1}(\xi) = -\alpha_k \cdot T_k(\xi) \cdot \left(c_2 \cdot \sqrt{1-\xi^2},\, c_4\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,\infty; \tag{46}$$

где $\alpha_0 = \ln 2, \quad \alpha_k = k^{-1}, \quad k \in N$ .

Из свойств операторов $\Theta_{i,j,n}$ получаем, что

$$\mathbf{R}_n \vec{X}_k = \vec{W}_k, \quad (k = 0,1,2,\ldots,\infty), \tag{47}$$

где

$$\vec{W}_k(\xi) = \left(\left(P_{1,n} z_{k,1}\right)(\xi), \left(P_{2,n} z_{k,2}\right)(\xi)\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,\infty. \tag{48}$$

Все функции $z_{k,i}(\xi)$ удовлетворяют условию Липшица с показателем $\frac{1}{2}$. Из утверждения 1 и равенств (44), (47) следует, что

$$\left\|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_n)\vec{X}_k\right\|_{H_2^2} \le \sum_{i=1}^{2} \left\|P_{i,n} z_{k,i} - z_{k,i}\right\|_{L^2([-1,1],\rho_{i1})} \le \frac{M_2}{\sqrt{n}}, \tag{49}$$

где константа $M_2$ не зависит от номера $n$. Следовательно,

$$\left\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_n\right\|_{H_{1,n}^2 \to H_2^2} = \max_{\vec{X}_k \in E_1} \frac{\left\|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_n)\vec{X}_k\right\|_{H_2^2}}{\left\|\vec{X}_k\right\|_{H_1^2}} \le \frac{2M_2}{\sqrt{n}}. \tag{50}$$

Из (43) и (50) следует справедливость оценки (38) при $M^* = 2\cdot\left(M_1 + M_2\right)$.

**Теорема 1**

Пусть $M = \left(2 \cdot M^* \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2}\right)^2$.

Верны следующие утверждения для всех натуральных n>M .

1) Задача (35) имеет единственное решение.

2) $\vec{V}_n \in H_{1,n}^2$, т.е. $\nu_{1,n} \in L_{n-1}^{2,0}([-1,1],\rho_1), \quad \nu_{2,n} \in L_{n-1}^{2}([-1,1],\rho_1)$.

3) Последовательность $\left\{\vec{V}_n\right\}_{n=[M]+1}^{\infty}$ решений задач (35) сходится к точному решению задачи (18) по норме пространства $H_1^2$. Кроме того,

$$\left\|\vec{V} - \vec{V}_n\right\|_{H_1^2} \le \frac{M^{**}}{\sqrt{n}}, \tag{51}$$

где константа $M^{**}$ не зависит от n.

**Доказательство.**

Определим числа:

$$p_n = \left\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_n\right\|_{H_{1,n}^2 \to H_2^2} \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2}. \tag{52}$$

Из (52) и леммы 2 получаем оценку $p_n \le M^* \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2} \cdot \sqrt{n^{-1}}$. Кроме того $p_n \le 2^{-1}$, $n > M$. Из теоремы Габдулхаева [14,с.19] следует существование и единственность решения задач (35), где $\vec{V}_n \in H_{1,n}^2$. Также оценки

$$\left\|\vec{V} - \vec{V}_n\right\|_{H_1^2} \le \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2} \cdot (1 - p_n)^{-1} \cdot \left(\left\|\vec{\mathbf{F}}_n - \vec{\mathbf{F}}\right\|_{H_2^2} + p_n \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\|_{H_1^2}\right), \quad n > M; \tag{53}$$

следуют из утверждений этой теоремы. Из утверждения 1 следует справедливость оценки:

$$\left\| f_{i,n} - f \right\|_{L^2([-1,1],\rho_i)} = \left\| P_{i,n} f - f \right\|_{L^2([-1,1],\rho_i)} \le \frac{M_3}{\sqrt{n}}, \tag{54}$$

где константа $M_3$ не зависит от $n$.

Из оценки величины $p_n$ и (54), следует справедливость теоремы 1 для значения $M^{**} = 2 \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2} \cdot \left( M_3 + \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_{H_2^2 \to H_1^2} \cdot M^* \cdot \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\|_{H_1^2} \right)$.

**5. Дискретная математическая модель задачи.**

Из теоремы 1 следует, что результатом подстановки многочленов $\nu_{1,n}(\tau)$ и $\nu_{2,n}(\tau)$ в левую часть уравнений (28) и (29) являются многочлены степени $n-2$ и $n-1$ соответственно. В правой части уравнений (28) и (29) стоят многочлены тех же степеней. Из однозначности определения полинома степени $n$ по его значениям в $n+1$ точке следует эквивалентность задачи (28)-(30) системе уравнений:

$$\nu_{2,n}(t_{1,n,k}) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{1,1}(t_{1,n,k},\tau) + Q_{1,3}(t_{1,n,k},\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{1,2}(t_{1,n,k},\tau) + Q_{1,4}(t_{1,n,k},\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{2,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_1(t_{1,k,p}), \quad (k = 1,\ldots,n); \tag{55}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tau - t_{2,n,p}}\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{2,1}(t_{2,n,p},\tau) + Q_{2,3}(t_{2,n,p},\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(Q_{2,2}(t_{2,n,p},\tau) + Q_{2,4}(t_{2,n,p},\tau)\right)\cdot\frac{\nu_{2,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f_2(t_{2,n,p}), \quad (p = 1,\ldots,n-1); \tag{56}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0. \tag{57}$$

Для дискретизации уравнений (55)-(57) используются формулы Эрмита и квадратурные формулы интерполяционного типа [11]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\tau-t_{2,n,p}}\cdot\frac{\nu_{1,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_{1,n}(t_{1,n,k})}{t_{1,n,k}-t_{2,n,p}}\quad (p=1,\ldots,n-1); \tag{58}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\xi-\tau|\cdot\frac{\nu_{2,n}(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu_{2,n}(t_{1,n,k})\left[\ln 2+2\sum_{m=1}^{m-1}T_m(\xi)\cdot\frac{T_m(t_{1,n,k})}{m}\right],|\xi|<1; \tag{59}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\xi}\frac{\nu_1(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\nu_{1,n}(t_{1,n,k})\left[\arccos\xi-\pi+2\sum_{m=1}^{n-1}U_{m-1}(\xi)\cdot\frac{T_m(t_{1,n,k})}{m}\sqrt{1-\xi^2}\right],\qquad |\xi|<1; \tag{60}$$

Заметим, что все формулы (58)-(60) являются точными для многочленов степени $n-1$. В результате дискретизации получаем системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных $\nu_{i,n}=\nu_{1,n}(t_{1,n,k})$, $k=1,\ldots n-i+1$, $(i=1,2)$. Существование и единственность решения данных СЛАУ есть следствие существования и единственности решения задач (55)-(57) и их эквивалентности задачам (28)-(30). Через решения этих СЛАУ восстанавливаются решения задач (28)-(30) по формулам:

$$\nu_{1,n}(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\nu_{1,n}(t_{1,n,k})\cdot l_{1,n,k}(\tau). \tag{61}$$

## 6. Выводы.

Предложена модификация метода дискретных особенностей решения исходной задачи (1)-(3). С помощью квадратурных формул интерполяционного типа проведена дискретизация системы интегральных уравнений задачи, получена система линейных алгебраических уравнений, через решения которой выражаются приближённые решения задачи. Доказана сходимость последовательности приближений к точным решениям и получена оценка скорости сходимости.

ЛИТЕРАТУРА


1. Yu.V. Gandel' and G.L. Sidel'nikov, The method of integral equations in the third boundary value problem of diffraction on a bounded grating over a flat screen. – Differential Equations. 35(1999), No.9, 1169-1175.
2. Yu. V. Gandel', V.D. Dushkin Mathematical model of polarized wave scattering on impedance strips located on screened dielectric layer // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2014. – 57, №1. –с. 125-132
3. Yu. V. Gandel, V. D. Dushkin Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer // Journal of Mathematical Sciences, 2016, Springer US. - pp. 156-166
4. N. I. Akhiezer, Lectures on integral transforms. Translations of Mathematical Monographs, 70. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
5. Yu.V. Gandel', Parametric representations of integral and psevdodifferential operators in diffraction problems. – Conf. Proc., 10th Int.Conf. on Math. Methods

in Electromagnetic Theory. (Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14-17), Dnepropetrovsk, 2004. 57 - 62.
6. Yu. V. Gandel’, Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. – Journal of Mathematical Sciences. 171 (2010). No. 1, 74-88.
7. Y.V. Gandel and V.D. Dushkin, The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. – Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012 (28 May-1 June 2012), St. Petersburg, 2012, 76-81.
8. V.D. Dushkin The Justification of Numerical Solution of Boundary Integral Equations of Wave Scattering Problems on Impedance Lattice / Душкин В. Д. // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2014. – № 1120. Сер. "Математика, прикладная математика и механика", вып. 69. – С. 20-28
9. Gandel Yu., and Dushkin V.D. "The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice." American Journal of Applied Mathematics and Statistics, Science and Education Publishing, 2.6 (2014): 369-375.
10. Гандель Ю. В., Душкин В. Д. Математические модели двумерных задач дифракции: Сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей [Текст]: монография. – Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. –544с.
11. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. — Х: Издательство Харьковского национального университета, 2001. — 92 с.
12. Kutateladze S.S. Fundamentals of Functional Analysis . — Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers Group, 1996. — 277 p.
13. I.P. Natanson, Constructive Function Theory, Volume 1, Frederic Ungar Puplishing Co., New York, 1964. 232p.
14. Габдулхаев, Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 1980. – 232 с.

Надійшла - 18.11.2016.